



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES



3 3433 06639468 9









Dec. 14, '82

J. V.

LEHRBUCH
DER
XPERIMENTALPHYSIK

VON

DR. ADOLPH WÜLLNER,

PROFESSOR DER PHYSIK AN DER KÖNIGL. TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU AACHEN.

ERSTER BAND.

ALLGEMEINE PHYSIK UND AKUSTIK.

VIERTE VIELFACH UMGEARBEITETE UND VERBESSERTE AUFLAGE.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1882.

69

Zweites Kapitel.

Von der drehenden Bewegung.

	Seite
§ 13. Entstehung der drehenden Bewegung; Winkelgeschwindigkeit.	76
§ 14. Die statischen Momente; Princip der virtuellen Geschwindigkeiten	78
§ 15. Zusammensetzung verschieden gerichteter Drehungen.	82
§ 16. Mittelpunkt paralleler Kräfte; Kräftepaare.	86
§ 17. Gleichgewicht eines Systemes, an welchem beliebige Kräfte angreifen	90
§ 18. Schwerpunkt; Stabilität	93
§ 19. Von den Trägheitsmomenten	96
Trägheitsmoment eines Cylinders in Bezug auf die Axe desselben; einer Kugel in Bezug auf einen Durchmesser	98
§ 20. Allgemeiner Satz über die Trägheitsmomente	101
§ 21. Die Wage, Theorie derselben	102
Einrichtung und Aufstellung	106
§ 22. Prüfung der Wage, Methode der Wägungen.	109
§ 23. Specifisches Gewicht und Dichtigkeit	112
§ 24. Das Pendel	114
§ 25. Ableitung der Schwingungsdauer eines Pendels	116
§ 26. Mathematisches und physisches Pendel	120
§ 27. Experimentelle Prüfung der Pendelgesetze.	121
§ 28. Korrektur wegen der Amplitude	123
§ 29. Bestimmung von g , Methode von Borda und Bessel	124
§ 30. Bestimmung von g mittels des Reversionspendels; Bessels Form des Reversionspendels	132
§ 31. Anwendung des Pendels bei Uhren	136
§ 32. Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze.	137
Experimentelle Bestimmung der Trägheitsmomente.	138
§ 33. Centripetalkraft und Centrifugalkraft	140
§ 34. Erhaltung der Rotationsebene	142
§ 35. Foucaults Pendelversuch.	146

Drittes Kapitel.

Von der allgemeinen Gravitation.

§ 36. Allgemeine Anziehung; Keplers Gesetze	148
§ 37. Die Anziehung ist gegen die Sonne gerichtet	149
§ 38. Entwicklung des Anziehungsgesetzes	150
Über Fernwirkung	152
§ 39. Identität der Schwere und der allgemeinen Anziehung	154
Anziehung einer Kugel auf außerhalb derselben befindliche Punkte	155
Anziehung über einer Hochebene; Versuche Jollys	159
§ 40. Verschiedenheit von g in verschiedenen Breiten, Abplattung der Erde	163
§ 41. Dichtigkeit der Erde, Versuche von Cavendish, Reich, Baily, Cornu und Baille, Jolly.	165
§ 42. Versuche von Maskelyne	171
§ 43. Methode von Airy; Anziehung der Masseneinheit.	173
§ 44. Ebbe und Flut	176
Litteratur des ersten Abschnittes	178

Zweiter Abschnitt.

Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Körper
in ihren einzelnen Theilen.

Erstes Kapitel.

Von den festen Körpern.

§ 45. Beschaffenheit der Materie; Atomistische Theorie	182
Tabelle der Atomgewichte der einfachen Körper.	192

	Seite
§ 46. Die Aggregatzustände	193
§ 47. Elasticität	195
§ 48. Elasticität beim Zuge; Elasticitätskoeffizient	196
§ 49. Volumänderung während des Zuges; Querkontraktion	200
§ 50. Kubische Zusammendrückbarkeit fester Körper; Hohlkugel, Hohlzylinder	208
§ 51. Torsionselasticität; Methode von Wertheim und Coulomb	216
§ 52. Beziehung zwischen dem Torsions- und Elasticitätskoeffizienten	223
§ 53. Biegungeelasticität	228
§ 54. Elastische Nachwirkung	233
§ 55. Elasticitätsgrenze	241
§ 56. Festigkeit	244
§ 57. Stofs der Körper; gerader und schiefer Stofs	245
§ 58. Adhäsion	251
§ 59. Reibung	252
§ 60. Innere Reibung bei festen Körpern	253

Zweites Kapitel.

Von den tropfbar flüssigen Körpern.

§ 61. Konstitution der Flüssigkeiten; gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes	260
§ 62. Kompressibilität der Flüssigkeiten	264
§ 63. Hydrostatischer Druck	276
§ 64. Kommunizierende Röhren; hydraulische Presse; Manometer von Desgoffe	282
§ 65. Gleichgewicht einer Flüssigkeit, auf welche beliebige Kräfte wirken	286
§ 66. Archimedisches Princip	290
§ 67. Schwimmende Körper	292
§ 68. Bestimmung des specifischen Gewichtes fester Körper	294
§ 69. Bestimmung des specifischen Gewichtes der Flüssigkeiten	298
Aerometer für besondere Flüssigkeiten	302
§ 70. Molekularwirkungen zwischen Flüssigkeiten und festen Körpern	304
§ 71. Normaldruck in der Oberfläche der Flüssigkeiten; Oberflächenspannung	306
§ 72. Einfluß der Wände	311
§ 73. Niveaüänderungen in kapillaren Röhren	316
§ 74. Steighöhen in verschiedenen Räumen	320
§ 75. Bildung von Tropfen auf horizontaler Ebene	328
Bildung von Luftblasen	331
§ 76. Kapillaritätskonstanten	332
§ 77. GröÙe der Wirkungssphäre der Molekularkräfte	343
§ 78. Bewegungen infolge von Kapillarwirkungen	347
§ 79. Ausbreitung von Flüssigkeiten auf festen Körpern; Auflösung	349
§ 80. Mischung und Schichtung von Flüssigkeiten; Plateaus Versuche	350
§ 81. Ausbreitung von Flüssigkeiten auf Flüssigkeiten	355
§ 82. Diffusion von Flüssigkeiten und Lösungen	357
§ 83. Endosmose	365
§ 84. Ausfluß der Flüssigkeiten; Toricellis Theorem; Hydraulischer Druck	370
§ 85. Ausflußmenge; Contractio venae	375
§ 86. Reibung der Flüssigkeiten; Ausfluß durch kapillare Röhren; Reibungskoeffizienten	379
§ 87. Konstitution des ausfließenden Strahles	391

Drittes Kapitel.

Von den gasförmigen Körpern.

§ 88. Allgemeine Beschaffenheit der Gase	397
§ 89. Eigenschaften der Gase, welche sie mit den Flüssigkeiten gemeinsam haben	398
§ 90. Das Barometer	402
§ 91. Konstruktion der Barometer	403
§ 92. Verschiedene Formen der Barometer	406
§ 93. Korrektion wegen der Kapillarität	409

	Seite
§ 94. Heberbarometer	410
§ 95. Aneroidbarometer	413
§ 96. Anwendung des Barometers in der Meteorologie	414
§ 97. Größe des Luftdruckes	417
§ 98. Mariottesches Gesetz	418
Versuche von Oersted, Despretz, Arago und Dulong, Pouillet	421
Versuche von Regnault	427
§ 99. Abweichung der Gase vom Mariotteschen Gesetz bei hohem Druck	432
§ 100. Dynamische Theorie der Gase	439
§ 101. Mittlere Wegelänge der Moleküle	441
§ 102. Ableitung des Mariotteschen Gesetzes	452
§ 103. Bestimmung der Geschwindigkeit u der Moleküle	458
§ 104. Abnahme des Luftdruckes mit der Höhe; Barometrische Höhenmessungen	459
§ 105. Anwendung des Mariotteschen Gesetzes auf Manometer	463
§ 106. Volumenometer	468
§ 107. Die Luftpumpe	473
§ 108. Fall der Körper im luftleeren Raum	483
§ 109. Quecksilberluftpumpen	484
§ 110. Die Kompressionsmaschine	489
§ 111. Flüssigmachen der Gase	492
§ 112. Molekularwirkungen zwischen festen und gasförmigen Körpern	494
§ 113. Mosersche Bilder	495
§ 114. Molekularwirkungen zwischen Gasen und Flüssigkeiten, Absorption der Gase	498
§ 115. Ausströmen der Gase	504
§ 116. Reibung der Gase, Theorie	511
§ 117. Bestimmung der Reibungskoeffizienten der Gase	517
§ 118. Diffusion der Gase	526
§ 119. Ableitung der Diffusion aus der dynamischen Gastheorie	530
§ 120. Absolute Werte der mittlern Wegelängen; Größe und Zahl der Moleküle	535
§ 121. Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen	539
§ 122. Stofs und Widerstand der Luft	542
Anhang zu Abschnitt I und II. Ueber absolute Maßsysteme	544
Dimensionen der abgeleiteten Maße	548

Dritter Abschnitt.

Von der Wellenbewegung.

Erstes Kapitel.

Theoretische Principien der Wellenbewegung.

§ 123. Schwingende Bewegung eines Punktes	559
§ 124. Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes	560
§ 125. Schwingung von Punktreihen; Entstehung der Wellen	564
§ 126. Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer Punktreihe	568
§ 127. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung	576
§ 128. Zusammensetzung mehrerer Bewegungen; Interferenz	577
§ 129. Interferenz von Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen; Bildung stehender Wellen	581
§ 130. Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen, deren Schwingungen nicht gleich gerichtet sind; elliptische Schwingungen	585
§ 131. Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge	592
§ 132. Schwingungen eines Systems von Punkten	600
§ 133. Huyghensches Princip	604
§ 134. Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen; Reflexion der Wellen	609
§ 135. Brechung der Wellen	615

Zweites Kapitel.

Von der Wellenbewegung fester Körper.

	Seite
§ 136. Schwingende Bewegung einzelner Teile fester Körper, infolge der Elasticität	618
§ 137. Longitudinale Schwingungen der Stäbe	620
§ 138. Longitudinale Schwingungen begrenzter Stäbe	622
§ 139. Transversale Schwingungen von Saiten	628
§ 140. Stehende Schwingungen von fadenförmigen, durch Spannung elastischen Körpern	632
§ 141. Einfluß der Steifigkeit der Saiten	638
§ 142. Transversalschwingungen von Stäben	641
§ 143. Transversalschwingungen von Platten; Chladni's Klangfiguren; Staubfiguren	647
§ 144. Drehende Schwingungen von Stäben	654
§ 145. Zusammengesetzte Schwingungen	658

Drittes Kapitel.

Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

§ 146. Longitudinale Wellen in Flüssigkeiten und Gasen	672
§ 147. Stehende Wellen in Flüssigkeitscylindern und Luftsäulen	678
§ 148. Transversale Wellen in Flüssigkeiten	680
§ 149. Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen	683
§ 150. Die Ursachen der Flüssigkeitswellen	686
§ 151. Durchkreuzung und Reflexion der Wellen	689

Vierter Abschnitt.

Vom Schalle.

Erstes Kapitel.

Über die Erregung des Schalles.

§ 152. Von der Ursache des Schalles	693
§ 153. Qualität des Schalles	695
§ 154. Bestimmung und Vergleichung der Schwingungszahlen	697
§ 155. Von dem Verhältnis der Töne und den Intervallen	701
§ 156. Von den mehrfachen Accorden	703
§ 157. Die Tonleiter	705
§ 158. Die musikalische Temperatur	714
§ 159. Absolute Schwingungszahl der Töne	718
§ 160. Analyse des Klanges	722
§ 161. Klänge durch Schwingungen fester Körper, Saiteninstrumente	732
§ 162. Töne durch Schwingungen luftförmiger Körper, gedeckte und offene Pfeifen, kubische Pfeifen	742
§ 163. Töne durch Schwingung von Flüssigkeitssäulen	755
§ 164. Zungenpfeifen, harte Zungen, Theorie von W. Weber; weiche Zungen, Theorie von Helmholtz	759
§ 165. Die Blasinstrumente	769
§ 166. Die menschliche Stimme	772
§ 167. Die menschliche Sprache, Helmholtz's Vokaltheorie	776

Zweites Kapitel.

Von der Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

§ 168. Ausbreitung des Schalles in der Luft	783
Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles nach den Messungen der pariser Akademie	786

	Seite
Moll und van Beek, Bravais und Martin, Regnault	788
Einwendungen von Rink gegen die Schlüsse von Regnault.	792
Fortpflanzungsgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen nach Regnault	794
§ 169. Indirekte Messung der Schallgeschwindigkeit mit Orgelpfeifen	795
Methode von Kundt, Theorie von Helmholtz und Kirchhoff	797
Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Temperatur; Versuche von Wüllner	802
§ 170. Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern.	804
§ 171. Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten nach Wertheim, Helm- holtz, Kundt, Dvořák	810
§ 172. Reflexion des Schalles; Sprachrohr.	814
§ 173. Übergang des Schalles in andere Mittel; Resonanz	817
Edisons Phonograph	822
§ 174. Das menschliche Ohr.	825
§ 175. Einfluß der Bewegung des tönenden Körpers oder des Ohres auf die Höhe des wahrgenommenen Tones	829
§ 176. Interferenz des Schalles; Wellen gleicher Länge	832
§ 177. Interferenz von Wellen ungleicher Länge; Stöße	836
§ 178. Kombinationstöne; Theorie von Helmholtz	841
§ 179. Ursachen der Konsonanz und Dissonanz	845

Einleitung.

Aufgabe der Physik.

Die uns umgebende Körperwelt, welche wir in dem Begriffe der Natur zusammenfassen, kann nach einer doppelten Richtung der Gegenstand unseres Studiums werden. Wir können einerseits die Körper, welche wir vorfinden, im einzelnen kennen zu lernen, zu beschreiben und zu klassificieren suchen. Diese Aufgabe haben sich die beschreibenden Naturwissenschaften gestellt. An diesen Naturkörpern nehmen wir dann aber eine ganze Reihe von Veränderungen wahr, die an denselben teils ohne, teils mit unserer Einwirkung erfolgen, welche wir mit dem Namen Naturerscheinungen bezeichnen. Das Studium dieser Naturerscheinungen, der Bedingungen, unter denen sie stattfinden, der Gesetze, nach denen sie verlaufen, und der Folgen, welche sie für die Naturkörper haben, an denen sie stattfinden, ist die Aufgabe des zweiten Zweiges der Naturwissenschaften, der Physik und der Chemie.

Die als Naturerscheinungen bezeichneten Veränderungen der Körper können sich entweder auf deren Form, diesen Begriff in seiner allgemeinsten Bedeutung genommen, oder auf deren Inhalt beziehen. Was der letztere eigentlich ist, wissen wir nicht, da wir den Inhalt der Körper nicht direkt wahrzunehmen imstande sind. Wir nehmen die Körper nur wahr durch den Eindruck, den sie auf unsere Sinne machen, indem wir sie sehen oder auch bei der Berührung fühlen, das heißt, indem wir durch unsern Gesichtssinn oder Gefühlssinn erkennen, daß ein gewisser Teil des uns umgebenden Raumes andere Eigenschaften hat, als der übrige Raum. Dasjenige nun, was sich im Innern dieses von der Umgebung sich unterscheidenden Raumes befindet und bewirkt, daß er sich von der Umgebung unterscheidet, bezeichnet man ganz allgemein als Materie. Die Materie ist also die Trägerin der Eigenschaften, welche die Körper besitzen, sie ist die Ursache der Eindrücke, welche dieselben auf unsere Sinne machen.

Die Naturerscheinungen können wir also genauer als Vorgänge definieren, welche an und in der Materie stattfinden, welche die Eigenschaften der Materie ändern. Das Studium dieser Vorgänge, welches wir als die Aufgabe der Physik und Chemie bezeichnet haben, setzt demnach voraus, daß wir zunächst die Eigenschaften der Materie selbst kennen lernen, denn nur wenn uns diese bekannt sind, können wir die Änderungen derselben erkennen.

Physik und Chemie haben also das Gemeinsame, daß sie die Eigenschaften der Materie und die Vorgänge untersuchen, welche dieselbe verändern; die beiden Schwesterwissenschaften unterscheiden sich durch die Eigenschaften der Materie, welche jede derselben vorwiegend ins Auge faßt.

Gewisse Eigenschaften sind allen Körpern gemeinsam, sie kommen denselben nur in größerem oder geringerem Maße zu, wie z. B. die oben schon erwähnte Sichtbarkeit oder Fühlbarkeit. Andere Eigenschaften kommen dagegen gewissen Körpern zu, anderen nicht, es sind diejenigen, welche einem Körper charakterisieren, d. h. ihn von andern unterscheiden. Da wir die Materie nur an ihren Eigenschaften erkennen, müssen wir aus dem letztern Umstande schließen, daß es verschiedene Materien gibt. Unter den Naturerscheinungen können wir nun zunächst solche unterscheiden, welche diese einer bestimmten Materie eigentümlichen Eigenschaften dauernd ändern, die Materie also in eine andere verwandeln, indem sie ihr andere Eigenschaften erteilen. Es sind das vorzugsweise solche Erscheinungen, bei denen sich zwei oder mehrere Materien zu einer neuen vereinigen, oder aus einer Materie andere abgeschieden werden. Das Studium dieser Erscheinungen und ihrer Folgen für die einzelnen Materien ist die Aufgabe der Chemie; dieselbe hat demnach zunächst auch jene Eigenschaften aufzusuchen, durch welche sich die einzelnen Materien von einander unterscheiden.

Es hat sich dabei herausgestellt, daß es eine gewisse Anzahl von Materien gibt, deren Eigenschaften sich durch Abscheiden von Materie nicht ändern lassen; man nennt diese deshalb einfache Materien oder Elemente. Man hat weiter erkannt, daß aus diesen einfachen Materien sich sämtliche in der Natur vorhandenen Materien herstellen, indem zwei oder mehrere Materien zu einer neuen zusammentreten, daß somit die eine bestimmte Materie als solche charakterisierenden Eigenschaften durch die innere Zusammensetzung derselben bedingt werden. Wir können demnach als die Aufgabe der Chemie auch bezeichnen das Studium jener Eigenschaften der Materie, welche von deren innerer Zusammensetzung abhängen und jener Erscheinungen, welche die innere Zusammensetzung derselben ändern.

Die Physik läßt alle diese Erscheinungen außer Acht; sie hat daher auch nicht die Eigenschaften kennen zu lehren, welche die einzelnen Materien von einander unterscheiden, sondern jene, welche allen den verschiedenen Materien gemeinsam sind, ihnen in größerem oder geringerem Maße zukommen, je nach dem Zustande, in welchem wir die Materien vorfinden, dem festen, flüssigen oder luftförmigen und unabhängig davon, welche von der Chemie erkannten Materien den Körper gerade bilden. Die Erscheinungen, welche die Physik dann zu untersuchen hat, sind solche, welche die innere Zusammensetzung der Körper ungeändert lassen, welche also an den Körpern im allgemeinen nicht dauernd, sondern vorübergehende Veränderungen bewirken. Die Erscheinungen dieser Art können wir, wie sich später zeigen wird, in fünf große Gruppen ordnen, die Bewegungserscheinungen, die Erscheinungen des Lichtes, der Wärme, des Magnetismus und der Elektrizität; wir kennen in der Natur keine Erscheinung, welche sich nicht in eine dieser Gruppen einordnen ließe. Die Betrachtung dieser fünf Erscheinungsgruppen ist daher die Aufgabe der Physik.

Methode der Physik.

Aus der im Vorigen dargelegten Aufgabe der Naturwissenschaften, Untersuchung der Naturerscheinungen nach ihrem Verlaufe, ihren Folgen, ihren Ursachen, ergibt sich, daß die Grundlage und der Ausgangspunkt

dieser Wissenschaft die Erfahrung sein muß von dem, was in der Natur vorgeht. Zu dieser Erfahrung gelangen wir aber lediglich durch die Beobachtung und zwar durch eine systematische, vorsichtige, genaue und ins einzelne gehende Beobachtung der Naturerscheinungen selbst.

Dieser Grundsatz der naturwissenschaftlichen Methode erscheint uns jetzt so selbstverständlich, so unmittelbar aus der Aufgabe dieser Wissenschaft, etwas außer uns Existierendes zu erforschen, sich zu ergeben, daß seine Richtigkeit keines besondern Beweises mehr bedarf. Es war indes nicht immer so; Jahrhunderte lang glaubte man auf rein spekulativem Wege die Naturgesetze, den Mechanismus der ganzen Natur auffinden zu können. Die Folge dieses Irrtums war der absolute Stillstand in der Erkenntnis der Natur; selbst die einfachsten Erscheinungen, deren Gesetze jetzt jeder kennt, wurden mißverstanden, weil man es verschmähte die Natur selbst zu befragen. Bis an das Ende des Mittelalters, bis zu den Zeiten Galileis, glaubte man, daß Körper von verschiedenem Gewichte mit verschiedener Geschwindigkeit zu Boden fallen, daß der schwerere in demselben Verhältnis schneller falle als der leichtere, in welchem er schwerer ist als dieser. Man glaubte es auf Grund eines von Aristoteles in seiner Schrift über den Himmel aufgestellten Satzes, daß derjenige Körper der schwerere sei, welcher bei gleichem Rauminhalt rascher abwärts gehe. Dieser letztere Satz ist nicht unrichtig; denn in der That wird die Fallgeschwindigkeit etwas durch den Luftwiderstand modificiert, und die Geschwindigkeit des leichtern Körpers wird bei gleichem Rauminhalt etwas stärker vermindert als die des schwerern. Völlig unrichtig war aber die obige aus diesem Satze gefolgerte Ansicht über den Fall der Körper, und die einfachste Beobachtung zweier verschiedener fallender Körper hätte ihre Unrichtigkeit bewiesen; man hätte gesehen, daß sich bei Körpern selbst des verschiedensten Gewichtes nur äußerst geringe Unterschiede in der Fallgeschwindigkeit zeigen, man hätte gefunden, daß im luftleeren Raume auch diese Unterschiede schwinden.

Damit die Beobachtung die Grundlage der Naturwissenschaften sein kann, muß sie, wie schon erwähnt, eine genaue und vollständige, die Erscheinungen in ihre Einzelheiten verfolgende sein. Genau, das heißt, wir müssen die Erscheinung so wahrzunehmen suchen, wie sie in der That verläuft, und uns vor jeder Täuschung hüten. Die erste dazu erforderliche Bedingung ist, daß wir an die Erscheinung ohne irgend eine vorgefaßte Meinung herantreten, da sonst die Phantasie des Beobachters leicht eine verderbliche Rolle spielt; schon mancher Beobachter hat das zu sehen geglaubt, was er auf Grund einer Auffassung, welche er aus vorherigen Spekulationen sich gebildet hatte, zu sehen gewünscht hat. Jede Anstellung einer Beobachtung ist eine Frage, welche wir an die Natur richten, das Resultat der Beobachtung ist die Antwort; welche Antwort wir erhalten, muß uns gleichgültig sein, möge sie unsern Ideen entsprechen oder nicht, nur dann können wir mit der nötigen Unbefangenheit beobachten.

Die Vollständigkeit der Beobachtung verlangt, daß sie uns Aufschluß gebe über den ganzen Verlauf der Erscheinung und über alle Umstände, welche denselben bedingen; jede Beobachtung einer Erscheinung setzt sich daher zusammen aus einer Summe von Einzelbeobachtungen, deren jede aus einem Moment des im zeitlichen Verlauf nach einander oder eine Seite

bei denen einander Vorübergehenden liegen. Diese Einzelbeobachtungen müssen wir dann systematisch so durchführen, daß wir aus ihnen den ganzen Verlauf der Erscheinungen erhalten. Bei einer einmaligen Beobachtung des gesamten Himmels werden uns alle Gestirne in einer und derselben gegenwärtigen Lage zu bleiben; eine zu verschiedenen Zeiten wiederholte Beobachtung zeigt uns, daß die Planeten ihre Lage gegenüber andern Sternen im Laufe der Zeit in einer scheinbar sehr unregelmäßigen Weise ändern, daß sie bald nach der einen bald nach der andern Seite sich verschieben. Wenn wir dann bei regelmäßig und systematisch wiederholten Beobachtungen die Lage der einzelnen Planeten scharf bestimmen, so gelangen wir zu der Erkenntnis, daß sie und mit ihnen unsere Erde sich in nahezu kreisförmigen Bahnen um die Sonne bewegen.

Die Beobachtung der Naturerscheinungen allein genügt indes nur in seltenen Fällen zu einer so genauen Kenntnis, daß wir den Verlauf derselben vollständig übersehen können, denn der Verlauf derselben ist meist nicht so einfach, daß wir durch Beobachtung allein alle Einzelheiten erkennen können. Fällt ein Stein aus einiger Höhe zu Boden, so erkennen wir bei genauer Beobachtung wohl, daß der Stein immer rascher fällt, wir sind aber nicht imstande die durchfallenen Strecken mit den Zeiten zu vergleichen, in denen sie durchfallen sind und so zu bestimmen, wie die Geschwindigkeit des fallenden Steines wächst.

Neben der Beobachtung müssen wir deshalb den Versuch zu Hilfe nehmen, das Experiment, durch welches wir die Naturerscheinungen unter solchen Umständen hervorrufen, daß wir sie in ihren Einzelheiten verfolgen, daß wir sie also beobachten können. Um die Gesetze des Falles erkennen zu können, müssen wir demnach Körper unter solchen Verhältnissen fallen lassen, daß die Bewegung eine langsamere wird, und daß wir imstande sind die durchfallenen Räume mit der Zeitdauer des Falls zu vergleichen. Die Kunst des Experimentierens liefert uns die Methode und Apparate, welche erforderlich sind, um den Naturerscheinungen diesen Verlauf zu geben und um die Größen, um welche es sich bei denselben handelt, mit aller Schärfe messen zu können.

Der Versuch lehrt uns aber nicht nur den genauern Verlauf der Erscheinungen kennen, die wir in der Natur auch ohne unser Zuthun beobachten, er führt uns selbst zur Kenntnis ganz neuer Naturerscheinungen, die ohne unsere Mitwirkung gar nicht eintreten würden, er lehrt uns die Körper in solchen Verhältnissen zusammen zu bringen, daß die in ihnen schlummernden Kräfte geweckt werden. Der weitaus größte Teil unserer Kenntnis der Naturerscheinungen ist nur durch Versuche erhalten worden, welche in systematischer Weise diese Erscheinungen, meist von unscheinbaren sehr oft nur zufällig beobachteten Wirkungen der Naturkräfte ausgehend, hervorriefen. Man hat zufällig schon im Altertum die Beobachtung gemacht, daß geriebener Bernstein die Eigenschaft erhält, leichte ihm nahe gebrachte Körper, wie Strohhalme, anzuziehen; indem man auch andere Körper diesem Versuche unterwarf, fand man, daß diese als Elektrizität bezeichnete Kraft viel mächtigere Wirkungen hervorbringen könne, man erkannte, daß eine der gewaltigsten Naturerscheinungen, der Blitz, eine starke elektrische Entladung sei. Zufällig fand man, daß zwei Metalle wenn sie in passender Weise mit einander zur Berührung gebracht, und

dann getrennt werden, dieselbe Fähigkeit besitzen wie der geriebene Bernstein; die systematische Verfolgung dieses Versuches lieferte uns das große Gebiet der galvanischen Ströme, welche nicht nur unsere Kenntnis der Naturkräfte gewaltig erweitert, sondern auch durch ihre Verwendung zur Telegraphie das ganze Kulturleben umgewandelt haben.

Die Beobachtungen und Versuche lehren uns das Thatsächliche der Naturerscheinungen kennen, sie liefern uns so das Material, aus welchem dann der kombinierende Scharfsinn des menschlichen Verstandes die Gesetze ableitet, welche das Bedingende und das Bedingte in den Naturerscheinungen mit einander verknüpfen, welche uns also angeben, in welcher Weise der Verlauf einer Erscheinung von den Umständen abhängt, unter denen sie stattfindet. Ein Beispiel wird uns am besten zeigen, wie wir zu einem solchen Gesetze gelangen.

Wenn ein Lichtstrahl in seiner Bahn auf eine glatte Fläche trifft, so wird er von derselben immer zurückgeworfen, und man erkennt leicht, daß die Richtung, nach welcher der Strahl zurückgeworfen wird, verschieden ist, je nach der Richtung, in welcher der Strahl auf die Fläche auftrifft. Die Richtung des einfallenden Strahles ist hier somit das Bedingende, die Richtung des zurückgeworfenen das Bedingte. Das Gesetz der Zurückwerfung des Lichtes muß uns also allgemein sagen, in welcher Weise die Richtung des zurückgeworfenen Strahles von der Richtung des einfallenden abhängig ist. Man findet dasselbe, indem man in einer Reihe von Versuchen die Richtung des einfallenden Strahles willkürlich ändert, jedesmal diejenige des zurückgeworfenen messend bestimmt, und dann die zu einander gehörigen Richtungen mit einander vergleicht. Rechnet man die Richtung der beiden Strahlen von der in dem Punkte, in welchem der einfallende Strahl die Fläche trifft, zu derselben senkrecht genommenen Richtung, dem sogenannten Einfallslot, so findet man erstens, daß der reflektierte Strahl stets in der Ebene liegt, welche durch das Einfallslot und den einfallenden Strahl bestimmt ist, und daß in dieser die Winkel, welche der einfallende und der zurückgeworfene Strahl mit dem Einfallslot bilden, einander immer gleich sind. Wir schließen aus dieser stets im Versuche sich ergebenden Beziehung zwischen den Winkeln des einfallenden Strahles, dem Einfallswinkel, und dem des zurückgeworfenen Strahles, dem Zurückwerfungswinkel, als das die beiden verknüpfende Gesetz: „Der Zurückwerfungswinkel ist dem Einfallswinkel gleich“.

Man sieht, dieses Gesetz, und so ist es mit allen physikalischen Gesetzen, ist eine mathematische Beziehung zwischen den bedingenden und bedingten physikalischen Größen einer Naturerscheinung; man kann deshalb jedes physikalische Gesetz durch eine Gleichung ausdrücken.

Die physikalischen Gesetze sind hiernach zunächst der gemeinsame Ausdruck einer Reihe einzelner Thatsachen, deren Gemeinsames sie in einem allgemeinen Satze zusammenfassen. Ihre Bedeutung ist aber eine noch sehr viel weiter gehende; sie drücken nicht nur die Thatsachen aus, aus denen sie abgeleitet wurden, sondern sie enthalten auch alle Erscheinungen, welche aus jenen Thatsachen folgen. Man habe z. B. einen Spiegel von beliebiger, aber irgendwie geometrisch bestimmbarer Gestalt, und es fallen auf ihn Lichtstrahlen etwa von einer in bestimmter Entfernung aufgestellten Lichtlampe. Das eben ausgesprochene Gesetz gestattet uns dann, die Erscheinungen

der Reflexion in jedem Falle zu bestimmen, ohne daß wir den Versuch zu Hülfe nehmen, denn wir können auf Grund jenes Gesetzes für jeden einfallenden Strahl die Richtung des zurückgeworfenen mit Hülfe einfacher geometrischer Konstruktion oder auch nach den Rechnungsmethoden der analytischen Geometrie angeben. Wie hier, so können wir in allen Fällen aus jedem Gesetze mit Hülfe der Mathematik eine Reihe von Folgesätzen ableiten; man hat die Gesetze nur mathematisch zu formulieren, und dann indem man dieselben als Ausgangspunkt nimmt, durch mathematische Entwicklungen aus denselben die Folgerungen zu ziehen.

Aus dieser Bemerkung erhellt die äußerst wichtige Rolle, welche die Mathematik in der Physik spielt; sie ist für dieselbe von der gleichen Bedeutung wie Beobachtung und Versuche, denn sie dient dazu, diese zu berechnen und zusammenzufassen, die erhaltenen Gesetze scharf auszudrücken und die in ihnen enthaltenen Folgerungen abzuleiten.

Wenn hiernach aus einem physikalischen Gesetze sich eine Reihe von weiteren Erscheinungen auf mathematischem Wege ableiten läßt, so bedarf es selbstverständlich, um diese und ihre Gesetze kennen zu lernen, nicht mehr der Beobachtung und der Versuche; wir erhalten vielmehr diese Gesetze lediglich durch mathematische Deduktion. Die Versuche dienen dann zur Bestätigung unserer Folgerungen, sie bilden die Kontrolle, dass wir nicht in unsern Deduktionen nicht geirrt haben. Dieser Weg der Deduktion ist neben dem der Erfahrung der wichtigste, auf dem die Physik fortschreitet; er lehrt uns ebenso gut neue Erscheinungen kennen, wie der Versuch; wir werden Erscheinungen kennen lernen, die man voraussichtlich niemals aufgefunden hätte, wenn uns der Weg der Deduktion nicht vorher die Umstände kennen gelehrt hätte, unter welchen dieselben beobachtet werden können.

Hat uns die Erfahrung die fundamentalen Gesetze einer Erscheinungsgruppe kennen gelehrt, so können wir aus diesen alle zu dieser Gruppe gehörigen Erscheinungen ableiten. Da wir bei dieser Ableitung den inneren Zusammenhang aller zu einer Gruppe gehörigen Erscheinungen unmittelbar erkennen, so können wir es als ein Ziel der Physik bezeichnen, die fundamentalen Gesetze aufzusuchen und aus diesen das ganze Gebiet der zusammengehörigen Erscheinungen zu deducieren. Wir werden sehen, daß auf einigen Gebieten dieses Ziel schon erreicht ist, so vor allem in demjenigen der Bewegungserscheinungen.

Fassen wir die Resultate der bisherigen Betrachtungen zusammen, können wir in der Entwicklung der physikalischen Wissenschaften drei Epochen unterscheiden; die erste ist die der Empirie, durch Beobachtung und Versuche werden Thatssachen gesammelt und aus diesen durch die kombinierende Thätigkeit des Verstandes die Gesetze der einzelnen Erscheinung aufgestellt; an diese schließt sich, sobald hinreichendes Material vorhanden ist, die philosophische Thätigkeit der Abstraktion, des Aufsuchens der Hauptgesetze für eine Reihe aus gleicher Ursache hervortretender Erscheinungen und auf diese folgt dann eine Zeit, in welcher man durch Deduktion aus jenen Gesetzen neue Folgerungen und Thatssachen ableitet, eine Zeit, welcher Beobachtung und Versuch nur dazu dienen, die theoretisch abgeleiteten Folgerungen zu kontrollieren und nachträglich zu bestätigen.]

allgemeinen ist das auch der geschichtliche Gang in der Entwicklung der Physik, man findet fast stets diese drei Epochen auch zeitlich verschieden.

Die der Naturwissenschaft gestellte Aufgabe ist indes hiermit noch nicht vollständig gelöst, denn eine vollständige Kenntniss der Natur muß uns auch angeben, warum die Naturerscheinungen gerade den beobachteten Verlauf haben und nicht einen andern. Da nun aber der Verlauf einer Erscheinung wesentlich von der Ursache bedingt wird, welche diese Erscheinung bewirkt, so fällt die Frage nach dem Grunde, aus welchem die Erscheinungen gerade den ihnen eigenthümlichen Verlauf haben, zusammen mit der Frage nach der Ursache der Erscheinungen. Die Ursache einer Veränderung in der Natur bezeichnet man allgemein als eine Kraft, wir können daher das Aufsuchen der Ursachen auch bezeichnen als das der Naturkräfte.

Gerade diese letzte Aufgabe der Naturwissenschaften ist aber die schwierigste; denn die Naturkräfte selbst können wir niemals direkt beobachten, wir nehmen sie nur wahr in ihren Wirkungen. Um also irgend etwas über die Naturkräfte auszusagen, müssen wir aus den Wirkungen auf die Ursachen zurückschließen. Diese Art des Schlusses ist aber immer mit einer so großen Unsicherheit behaftet, daß wir über die wirksamen Naturkräfte niemals eine ähnliche Gewißheit erhalten können wie über die Gesetze, denen die Naturerscheinungen folgen. Denn eine und dieselbe Erscheinung kann aus sehr verschiedenen Ursachen hervorgehen, und von diesen möglichen Ursachen müssen wir bei jener Art des Schließens eine auswählen; nichts bürgt uns aber dafür, daß wir bei dieser Wahl aus den möglichen Ursachen die richtige treffen. Wenn wir wissen, daß das Wasser unter dem Drucke der Atmosphäre steht, so ist eine notwendige Folgerung, daß es in einer Pumpe aufsteigen muß, in welcher wir über dem Wasser einen luftleeren Raum hergestellt haben; weiß man aber nicht, daß das Wasser dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzt ist, und sieht man dasselbe in einer luftleer gemachten Pumpe aufsteigen, so kann man eine Reihe von Ursachen ersinnen, welche das Aufsteigen bewirken. Will man zwischen diesen wählen, so hat man alle Chancen dafür, daß man eine unrichtige wählt, gegen eine einzige, daß man die richtige wählt. Die Geschichte lehrt uns, wie sich die ältern Physiker in der That täuschten, als sie annahmen, die Natur habe einen Abscheu vor dem leeren Raume. Die Mechanik des Himmels beweist uns, daß zwischen den Gestirnen eine Kraft thätig ist, welche in dem Maße größer ist, als die Masse der Gestirne größer ist, und welche in dem Maße abnimmt, als das Quadrat der Entfernung der Gestirne zunimmt. Man nimmt an, daß diese Kraft in einer Anziehung der Materien ihren Grund habe. Auch diese Annahme wählt aus einer ganzen Reihe von möglichen Gründen einen aus, und wir haben strenge genommen ebenso wenig ein Recht diesen Grund für den wahren zu halten, wie aus dem Aufsteigen des Wassers in der Pumpe den *horrer vacui* zu folgern.

Über die Naturkräfte selbst können wir demnach nur Annahmen, sogenannte Hypothesen bilden, welche für uns einen geringern oder größern Grad von Wahrscheinlichkeit haben, je nach der Vorsicht, mit welcher man bei dem Aufstellen der Hypothesen verfuhr, und je nach der Menge von Naturerscheinungen, welche wir bei ihrer Wahl berücksichtigten, und welche sich dann als notwendige Folgen aus dieser Hypothese ergeben. So lange man nur wenige Erscheinungen aus einem Gebiete in Betracht zieht, findet

man stets, daß mehrere Hypothesen dieselben gleich gut erklären, das heißt als notwendige Folgen aus der supponierten Ursache hervorgehen lassen; je weiter aber unser Kenntnis der Erscheinungen in einem Gebiete sich ausdehnt, um so geringer wird die Anzahl der möglichen Hypothesen, bis schließlich nur eine Hypothese übrig bleibt, aus welcher man sämtliche experimentell gefundenen Thatsachen mathematisch entwickeln kann, und welche selbst zur Auffindung neuer Thatsachen führt. Diese Hypothese hat dann für uns den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit.

Eine solche Hypothese ist die jetzt der Behandlung der Optik zu Grunde gelegte Undulationstheorie. Seitdem man angenommen hat, das Licht sei eine zitternde Bewegung des Aethers, wurden alle experimentell gefundenen Gesetze der Lichterscheinungen Folgerungen dieses einen Grundsatzes, und mit ihr hat die Optik fast jene Stufe der Vollkommenheit erreicht, auf welcher die Beobachtung nur mehr ein Mittel ist, die Folgerungen der Theorie zu bestätigen, anstatt das einzige Mittel zu sein, um die Gesetze der Erscheinungen aufzufinden. Das ist eben das Charakteristische einer guten Hypothese.

Zunächst erhält man eine solche Hypothese für die verschiedenen Gruppen der unter sich gleichartigen Erscheinungen, wie diejenige des Lichts oder der Wärme, und man muß dieselbe für gut erklären, wenn sie das Gesamtgebiet der Erscheinungen, für welche sie ersonnen wurde, als notwendige Folgen erkennen läßt. Mit dem Fortschritte der Naturerkenntnis hat sich nun aber ergeben, daß die einzelnen Gruppen von unter sich gleichartigen Erscheinungen, welche scheinbar sich ganz fremd sind, wie die Bewegungserscheinungen, Licht- oder Wärmeerscheinungen, unter einander in dem innigsten Zusammenhange stehen. Bei der Abwägung der Hypothesen über die einer bestimmten Erscheinungsgruppe zu Grunde liegenden Naturkräfte darf man deshalb nicht nur diese Erscheinungsgruppe allein ins Auge fassen, sondern muss auch die übrigen mit in Erwägung ziehen, und sich die Frage stellen, ob es zur Erklärung der bestimmten Gruppe der Annahme einer besondern Naturkraft bedarf. Gerade durch diese Erwägung hat die neuere Physik die Zahl der von den ältern Forschern angenommenen Naturkräfte wesentlich beschränkt; wir werden sehen, wie sie immer mehr dahin strebt, die verschiedenartigsten Erscheinungen auf ein und dieselbe Grundursache, auf Bewegung, zurückzuführen und an die Stelle der früher angenommenen so mannigfachen Kräfte nur eine zu setzen, die Kraft, welche der Materie Bewegung erteilen kann, welche in einer Anziehung und Abstoßung der einzelnen Teile der Materie besteht.

Aber selbst, wenn es gelungen ist alle Erscheinungen auf diese eine, der Materie eigentümliche und deshalb unveränderliche Kraft zurückzuführen, darf man immer nicht vergessen, daß es eine Hypothese ist, auf welche wir die Erklärung der Naturerscheinungen stützen, die allerdings den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit hat, der wir aber eine Gewissheit erst dann beilegen dürfen, wenn wir beweisen können, daß die so angenommene Ursache der Naturerscheinungen die einzig mögliche ist. Dann erst wäre dieselbe, nach dem Ausspruche von Helmholtz¹⁾, als die notwendige Begriffsform der Naturauffassung erwiesen, es würde derselben

¹⁾ Helmholtz. Über die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. p. 7.

alsdann objektive Wahrheit zuzuschreiben sein. Dahin zu gelangen, das können wir als das letzte Ziel der Naturwissenschaften bezeichnen; ob es erreicht werden kann, das läßt sich jetzt noch nicht übersehen.

Ableitung der physikalischen Gesetze aus Messungen.

Wir haben im Vorigen bereits mehrfach gezeigt, daß die Grundlage des physikalischen Wissens genaue Beobachtungen und Messungen sind; die wir zur Besprechung der physikalischen Naturerscheinungen selbst übergeben, müssen wir uns daher noch die Frage vorlegen, wie wir aus den Messungen die Gesetze der Erscheinungen ableiten, und wie wir bei den Messungen zu verfahren haben. Wir wollen dieses an dem Beispiele der Zurückwerfung des Lichtes zeigen, welches wir vorhin bereits angeführt haben. Wir wissen also, daß jedesmal, wenn ein Lichtstrahl auf eine polirte Fläche fällt, derselbe zurückgeworfen wird, ferner, daß die Richtung, nach welcher der zurückgeworfene Strahl fortgepflanzt wird, sich ändert, wenn die Richtung des einfallenden sich ändert. Um das Gesetz zu erhalten, welches die Abhängigkeit der Richtung des zurückgeworfenen von der des einfallenden Strahles darstellt, setzen wir einen Spiegel in den Mittelpunkt eines getheilten Kreises, so daß die Ebene des Spiegels senkrecht ist zur Ebene des Kreises. An dem Kreise sind zwei bewegliche Radien, deren Enden mit einer Spitze auf die Theilung des Kreises zeigen. Die Radien tragen durchsichtige Röhren, deren Achsen den Radien parallel sind; vor der einen Röhre steht eine möglichst kleine Flamme, welche nur durch die Röhre Licht auf den Spiegel senden kann. Ist nun der Spiegel so aufgestellt, daß die Spiegelnormale, das Einfallslot, den Nullpunkt der Theilung trifft, so gibt uns der Abstand des die Flamme tragenden Radius vom Nullpunkte der Theilung den Einfallswinkel des Lichtstrahls. Wir verschieben dann den zweiten beweglichen Radius so lange, bis wir durch die Röhre blickend den zurückgeworfenen Strahl sehen. Da dann die Richtung dieses zweiten Radius jene des zurückgeworfenen Lichtstrahles ist, so gibt uns der Abstand seiner Spitze vom dem Nullpunkte der Theilung den Zurückwerfungswinkel. Man setzt dann die beiden beobachteten Winkel neben einander. Man wiederholt dann den Versuch, indem man nach und nach verschiedene Einfallswinkel wählt, dabei von dem kleinsten, der senkrechten Incidenz, bis zum größten, der streifenden Incidenz, fortschreitet, und entwirft sich eine Tabelle, auf welcher neben jedem gewählten Einfallswinkel der beobachtete Zurückwerfungswinkel verzeichnet ist. Eine Vergleichung der zusammengehörigen Winkel zeigt uns dann, unter Voraussetzung absoluter Genauigkeit, daß die zu einander gehörigen Winkel immer gleich sind. Indem man dann so eine ganz konstante Beziehung zwischen den beiden Winkeln in den beobachteten Fällen erkennt, schließt man, daß das in allen so sein wird, und erhält auf diese Weise ein experimentell bewiesenes Gesetz.

Der Beweis eines physikalischen Gesetzes ist somit der Nachweis einer bestimmten Beziehung zwischen Zahlen, welche durch direkte Messung erhalten oder aus direkt gemessenen Größen berechnet werden; wir erkennen diese Beziehung in einer größern oder geringern Anzahl von Fällen und schließen daraus, daß sie in allen bestehe.

Damit aber die zwischen den verglichenen Größen bestehende Beziehung in aller Schärfe hervortrete, ist es nötig, daß die Messungen absolut genau sind. Das ist niemals zu erreichen, einmal wegen der Ungenauigkeit der Instrumente, dann aber auch wegen der Unvollkommenheit unserer Sinne. In dem eben besprochenen Beispiele ist der Maßstab, an welchem gemessen wird, ein geteilter Kreis; eine solche Teilung läßt sich nie absolut genau herstellen, der eine Grad ist niemals dem andern absolut gleich, und die Teilstriche haben niemals absolut gleiche Breite. An dem Kreise lassen sich ferner niemals die beweglichen Radien mit absoluter Genauigkeit einstellen, und schließlich läßt sich die Stellung der Radien nicht mit vollkommener Sicherheit ablesen. Deshalb sind auch die besten Messungen mit unvermeidlichen Beobachtungsfehlern behaftet, welche je nach der Güte der Instrumente und der Geschicklichkeit des Beobachters größer oder kleiner sein können. Sind die Instrumente schlecht, besitzt der Beobachter nicht die notwendige Geschicklichkeit, oder wendet er nicht die gehörige Sorgfalt an, so können die Beobachtungsfehler eine solche Größe erreichen, daß die Messungen das Gesetz gar nicht erkennen lassen; man würde dann gar keine oder auch sehr viele algebraische Beziehungen finden, welche die beobachteten Werte mit der gleichen Genauigkeit wiedergeben, und keine dieser Beziehungen würde nach den Messungen den Vorzug verdienen.

Haben aber die Instrumente die nötige Feinheit, und hat der Beobachter die erforderliche Sorgfalt angewandt, so findet man immer eine Beziehung, welche die beobachteten Werte am genauesten wiedergibt, und indem man dann erwägt, daß vollkommene Genauigkeit nicht erreicht werden kann, darf man diese Beziehung als den Ausdruck des physikalischen Gesetzes betrachten.

Hierbei sind aber noch folgende Punkte zu beachten. Da man bei einer hinreichend großen Zahl von Messungen ebenso oft Wahrscheinlichkeit hat, daß die beobachteten Werte zu klein als daß sie zu groß sind, so müssen im allgemeinen ebenso viele Werte kleiner als größer sein wie diejenigen, welche das aus den Messungen abzuleitende Gesetz verlangt. Findet man dagegen, daß die gefundenen Werte, wenn auch innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler, stets größer oder stets kleiner sind, so muß man dennoch schließen, daß das Gesetz nicht genau besteht. Wir werden sehen, daß die Erkenntnis der nicht ganz strengen Gültigkeit des Mariotteschen Gesetzes lange Zeit dadurch verzögert wurde, daß Arago und Dulong diese Vorsicht bei den aus ihren Versuchen gezogenen Schlüssen verabsäumten.

Die Abweichungen der beobachteten Werte von den vom Gesetze verlangten müssen ferner ganz unregelmäßig sein, dieselben dürfen nicht eine bestimmte Gesetzmäßigkeit zeigen. Würde man finden, daß etwa für kleine Werte der gegebenen Größe der beobachtete Wert der von derselben abhängigen Größe immer größer, für große dagegen immer kleiner ist als der vom Gesetze verlangte, so würde man auch dann nicht schließen dürfen, daß das aus den Messungen abgeleitete Gesetz der Wirklichkeit vollständig entspricht; wir dürfen es auch dann, wie in dem vorigen Falle, nur für ein annähernd richtiges halten.

Wie groß in den einzelnen Fällen die Beobachtungsfehler sein können, ob die beobachteten Werte den wirklich stattfindenden entsprechen

können, das läßt sich nicht allgemein feststellen; es hängt das unter sonst gleichen Umständen von der Schwierigkeit der Messungen ab. Man hat in jedem Falle die Grenze der erreichbaren Genauigkeit zu bestimmen, in welcher Weise, das werden wir später bei den einzelnen Untersuchungen kennen lernen. Das aber ist immer festzuhalten, daß, wenn Beobachtungen ein Gesetz bestätigen sollen, die Differenzen des beobachteten und gesetzmäßigen Wertes nur ein kleiner Bruchteil des erstern sein dürfen.

Die in der Physik gebräuchlichen Maße.

Die Maße, welche in der Physik angewandt werden, sind dem neu-französischen Maßsystem entnommen, welches den großen Vorzug hat, daß es alle Maßbestimmungen auf ein und dieselbe Einheit, die des Längenmaßes zurückführt. Die Einheit des französischen Längenmaßes ist das Meter. Dasselbe ist von der Länge eines Erdmeridians abgeleitet, und zwar wurde der zehnmillionte Teil des durch genaue Messungen bestimmten Quadranten eines Erdmeridian dazu gewählt. Später hat sich zwar ergeben, daß in die dem Meter zu Grunde liegenden Messungen sich ein kleiner Fehler eingeschlichen hat, da aber die Maßeinheit einmal festgestellt und verbreitet war, so hat man es unterlassen, dieselbe darnach zu ändern. Das Meter ist sonach um ein sehr Geringes von dem zehnmillionten Teile eines Erdmeridianquadranten verschieden. Das Original-maß, nach welchem alle übrigen Maßstäbe abgeglichen werden, ist in den Archiven zu Paris niedergelegt.

Man teilt das Meter nach dem Decimalsystem

1 Meter = 10^{10} Decimeter = 100^{cm} Centimeter = 1000^{mm} Millimeter.

In deutschen Reiche ist seit dem 1. Januar 1872 dasselbe Maßsystem eingeführt worden. Als deutsche Bezeichnung ist für das Meter der Name Stab, für das Centimeter Neuzoll und für das Millimeter der Name Strich gewählt, welche Bezeichnungen indessen gegenüber den ältern oben angeführten wenig in Gebrauch sind.

Früher legte man in Frankreich und Deutschland und noch jetzt in vielen Ländern die willkürlich gewählte Einheit des Fusses (ungefähr von der Länge des menschlichen Fusses) zu Grunde.

Eine Vergleichung der wichtigsten Fußmaße, wie sie bisher gebraucht wurden, mit dem Metermaße gibt folgende Zusammenstellung:

Meter	Pariser Fuß	Preussen Rhal. Fuß	England Fuß	Österreich Wiener F.	Baiern Fuß	Baden Fuß	Sachsen Fuß	Schweden Fuß
1 =	3,078444	3,186199	3,280899	3,163446	3,426310	3,333333	3,531197	3,368126

Dem hier angegebenen preussischen ist das dänische, dem englischen das russische und dem badischen das schweizerische Fußmaße an Größe gleich.

Der Fuß wird entweder duodecimal, in $12''$ Zoll, der Zoll in $12'''$ Linien oder decimal, in $10''$, der Zoll in $10'''$ Linien eingeteilt.

Das Flächenmaße wird in dem metrischen System durch Quadrierung des Meters erhalten und ebenso das Körpermaße durch Kubation des Meters

1^{qm} Quadratmeter = 100^{qdm} = $10\,000^{qcm}$ = $1\,000\,000^{qmm}$.

1^{km} Kubikmeter = 1000^{kdm} = $1\,000\,000^{kcm}$ = $1\,000\,000\,000^{kmm}$.

Es ist leicht darnach das Verhältniß der Quadrat- und Kubik-Fusse, Zolle etc. zum metrischen Flächen- und Körpermaße zu erhalten, z. B.

$$1^{\text{qm}} = 9,476817 \text{ } \square' \text{ Paris} = 10,15187 \text{ } \square' \text{ preufs. etc.}$$

$$1^{\text{km}} = 29,17385 \text{ kub. Paris} = 32,32587 \text{ kub. preufs. etc.}$$

Als Einheit des Hohlmaßes nimmt das metrische System den Rauminhalt eines Kubikdecimeters und nennt dieses Maß ein Liter (französisch Litre).

Dasselbe Hohlmaß ist jetzt auch als Einheit im deutschen Reiche acceptiert.

Früher wurde bei uns, und noch jetzt in den Ländern, welche das metrische System nicht acceptiert haben, das Hohlmaß aus dem Fußmaß verschieden gebildet. In Preußen war das Quart = 64" kub., in Baiern das Maß = 84",304 kub., in England ist die Gallone = 277",2738 kub., das österreichische Maß ist = 0,0448 kub. u. s. f.

$$1 \text{ Liter} = 0,8733386 \text{ preufs. Quart} = 0,9354301 \text{ baier. Maß.}$$

$$= 0,2200967 \text{ engl. Gallone} = 0,7066483 \text{ östr. Maß.}$$

Auch die Einheit des Gewichtes ist im metrischen Systeme aus jenem des Längenmaßes abgeleitet. Man geht vom Centimeter aus und nennt **das Gewicht von einem Kubikcentimeter Wasser** bei der Temperatur 4° C. ein Gramm.

Im gewöhnlichen Leben wird das Gewicht von einem Liter Wasser als Einheit genommen; dasselbe enthält 1000^{cm} kub. und wiegt daher 1000 Gramm. Dieses Gewicht wird Kilogramm genannt. Ein bei der Aufstellung des metrischen Systemes mit der größten Sorgfalt hergestelltes Kilogramm wird in den Pariser Archiven aufbewahrt. Da man mit viel größerer Genauigkeit zwei Gewichte mit einander vergleichen kann, als das Gewicht eines bestimmten Volumens Wasser bestimmen, so werden alle Normalgewichte nach dem pariser Kilogramm abgeglichen.

Die Unterabteilungen des Grammes sind nach dem Decimalsystem gebildet

$$1 \text{ Gramm} = 10 \text{ Decigramme} = 100 \text{ Centigramme} = 1000 \text{ Milligramme.}$$

Besondere Zeichen werden für diese Unterabteilungen nicht benutzt, man schreibt sie als Decimalstellen des Grammes.

Im deutschen Reich ist seit Einführung des metrischen Systems auch dieses Gewichtssystem eingeführt, nur wird als Einheit die Hälfte des Kilogramms, das Pfund, genommen. Dasselbe wird dann ohne weitere Unterabteilung in 500 Gramm geteilt. Die in andern Ländern gewählten Gewichtseinheiten, die meist den Namen Pfund führen, sind von dem halben Kilogramm nicht sehr verschieden. Eine Vergleichung der wichtigsten Pfunde mit dem Kilogramm bietet folgende Zusammenstellung:

$$1 \text{ Kilogramm} = 2,204597 \text{ Pfd. englisch Avoirdupois}$$

$$1,785675 \text{ „ österreichisch}$$

$$2,441883 \text{ „ russisch}$$

$$2,002768 \text{ „ dänisch und norwegisch}$$

$$2,351063 \text{ „ schwedisch Schalgewicht}$$

$$2,000000 \text{ deutsch.}$$

Das Pfund wird meist in 16 Unzen, wie in England, oder in 32 Loth ilt.

In den Niederlanden, Spanien und Italien ist das metrische System eingeführt, zum Teil nur mit andern Benennungen.

Um eine Richtung im Raume mit einer andern zu vergleichen, hat man ein Maß für Winkel oder Richtungsverschiedenheiten eingeführt; man teilt zu dem Ende überall den Kreisumfang in 360 gleiche Teile, deren einer ein Grad genannt wird. Der Grad wird in 60' Minuten, die Minute in 60'' Sekunden geteilt.

Die Erscheinungen, welche wir in der Physik zu untersuchen haben, treten nicht nur räumlich, sondern auch zeitlich verschieden auf. Wir haben daher in vielen Fällen auch die Zeit zu messen. Das Zeitmaß ist auf die Länge des Tages gegründet, es ist

1 Tag mittlerer Zeit = 24 Stunden

1^h Stunde = 60' Minuten

1' Minute = 60'' Sekunden.

Bei den physikalischen Zeitangaben wird meist die Sekunde als Zeiteinheit gewählt.

Einige Meßinstrumente.

Der Komparator.

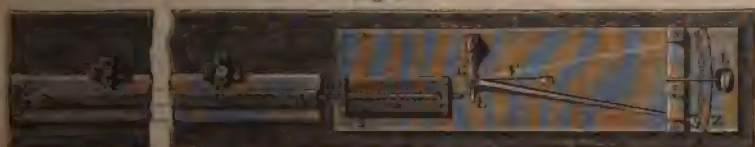
Der Angabe der in der Physik gebräuchlichen Maße lassen wir eine kurze Beschreibung der ohne besondere Theorie in ihrem Princip verständlichen Meßinstrumente, der Längenmeßinstrumente, und der Winkelmeßinstrumente folgen.

Die Grundlage für alle Längenmessungen ist das Meter, und zwar wird, wie vorhin erwähnt wurde, als das Normalmeter das in den Pariser Archiven befindliche aus Platin gefertigte Meter angenommen. Die sämtlichen in Gebrauch befindlichen Meter sind entweder direkt mit dem Pariser Normalmeter verglichen, oder nach solchen dargestellt, welche mit den Pariser Metern verglichen waren.

Zur Vergleichung der Längenmaße wendet man Komparatoren an, welche verschieden eingerichtet sind, je nachdem man Endmaße, das heißt Maße vergleichen will, welche zwischen den Endpunkten des Maßstabes eine bestimmte Länge haben sollen, oder Strichmaße, das heißt solche, welche zwischen zweien auf dem Maßstabe gezogenen Strichen eine bestimmte Länge haben. Wir begnügen uns damit, einen für die Vergleichung von Endmaßen konstruierten Fühlhebelkomparator zu beschreiben¹⁾.

Eine breite Platte von gehobeltem Gußeisen dient dem Apparat (Fig. 1) als Basis.

Fig. 1.



Diese Platte besitzt an dem einen Ende ein mit Schrauben befestigtes zählernes Aufsatzstück C; an diesem befindet sich eine vorspringende stumpfe

¹⁾ Andere Komparatoren siehe man im ersten Bande von *Karstens Encyclopädie der Physik* p. 602 ff. und *Wild, Bericht über die Reform der schweizerischen Urmaße*. Zürich 1868.

Schneide, gegen welche das Meter fest angelegt wird. Gegen das andere Ende des Apparats hin ist ein stählerner Stift DE angebracht, der seiner Länge nach gleiten kann; man kann ihn von D nach E hin verschieben, aber eine Spiralfeder drückt ihn immer nach D hin zurück. Der Meßsapparat des Instrumentes wird von einem um eine Axe G beweglichen Winkelhebel ZGE , dem Fühlhebel, gebildet. Der Winkelhebel hat einen sehr kurzen Arm GE , der durch eine Feder F immer an das Ende E des Stiftes DE angegedrückt ist, und einen 100mal längeren Arm ZG , dessen Ende auf eine getheilten Kreisbogen sich bewegt. Bei L befindet sich eine Lupe, durch welche man scharf beobachten kann, an welchem Teilstrich das Ende ansteht.

Um nun ein Meter zu prüfen, verfährt man folgendermaßen. Zunächst legt man den Etalon, mit welchem man den Maßstab vergleichen will, gegen die Scheide bei C und richtet ihn gerade durch Anschieben an den beiden festen Aufsatzstücke M und N . Der bewegliche Stift DE wird dadurch die ihn umgebende Spiralfeder gegen das Ende A des Etalons gedrückt; der Hebelarm GE wird dann durch die Feder F an das vordere Ende E des Stiftes DE angedrückt, und der Zeiger GZ stellt sich an irgend einen Teilstrich der Teilung ein. Man beobachtet und bemerkt sich denselben.

Darauf ersetzt man den Etalon durch den Maßstab, der geprüft werden soll. Wenn der Zeiger dann genau auf demselben Teilstrich einsteht, so ist derselbe richtig, zeigt er auf eine andere Stelle der Teilung, so ist der Maßstab unrichtig und muß, je nachdem der Zeiger sich mehr oder weniger entfernt von Z einstellt, verkürzt oder verlängert werden.

Um die Empfindlichkeit des Apparates zu beurteilen, genügt es zu beachten, daß der Unterschied der beiden verglichenen Maßstäbe in der Bewegung des Hebelendes Z hundertmal größer erscheint, weil der Arm ZG des Winkelhebels hundertmal größer ist als der Arm GE . Da man nun eine Verschiebung von $0^{\text{mm}},1$ auf der Teilung mit Hilfe der Lupe noch recht gut wahrnehmen kann, so kann man einen Unterschied der Maßstäbe von $0^{\text{mm}},001$ noch gut bestimmen.

Die Vergleichung eines Maßstabes mit dem Etalon ist aber dennoch meist nicht so einfach, da nur selten der verglichene Maßstab von Platin verfertigt ist. Die Wärme dehnt nämlich alle Körper aus, und der als Etalon benutzte Platinmaßstab hat nur bei der Temperatur des schmelzenden Eises genau die Länge des als Einheit angenommenen Meters. Man muß daher alle Vergleichenungen bei dieser Temperatur ausführen oder, wenn man sie bei einer andern Temperatur ausgeführt hat, Rücksicht nehmen auf die Ausdehnung der Körper durch die Wärme, welche für die verschiedenen Maßstäbe eine andere ist, wenn sie nicht aus dem gleichen Material gefertigt sind. Dadurch wird das Verfahren etwas komplizierter; wir werden später sehen, wie man diese notwendigen Korrekturen anbringen kann.

Mit Hilfe des Komparators kann man sich also jeder Zeit ein genau Meter verschaffen. Ist das geschehen, so müssen wir dasselbe in seine Unterabteilungen, Decimeter, Centimeter und Millimeter teilen. Die Operation geschieht mittels der Teilmaschine.

Die Teilmaschine.

Der wichtigste Teil dieses Apparates ist eine Mikrometerschraube. Dieselbe ist auf einem möglichst homogenen Cylinder von hartem Stahl eingeschritten und hat eine Länge von 50–80 Centimeter. Bei der Herstellung derselben sucht man es dahin zu bringen, daß ein Schraubengang genau einem Millimeter entspricht, das heißt also einmal zu erreichen, daß die Höhe aller Schraubengänge unter sich gleich und jeder gleich einem Millimeter ist. Es muß also die Anzahl der Schraubengänge genau der Anzahl Millimeter entsprechen, welche der Cylinder lang ist. Absolute Genauigkeit kann natürlich nicht erreicht werden, die Ungenauigkeiten dürfen aber nur sehr klein sein und müssen durch Messung bestimmt werden. Bei der Beschreibung des Instrumentes und seiner Anwendung nehmen wir an, daß die Schraube möglichst genau gearbeitet sei.

Fig. 2.



An seinen beiden Enden ist der mit der Schraube versehene Cylinder in zwei Zapfenlager *P* und *B* (Fig. 2) eingeschlossen, in denen er sich mit sanfter Reibung drehen kann, ohne die geringste fortschreitende Bewegung anzunehmen; eine Kurbel *A*, welche man mit der Hand dreht, bringt diese Bewegung hervor.

Die Schraube geht in einer Mutter *Q*, welche sie umfaßt, und welche sich nicht mit derselben drehen kann. Die Mutter bewegt sich daher vorwärts oder rückwärts, wenn man die Schraube in dem einen oder andern Sinne dreht. Die Mutter teilt ihre Bewegung einer stählernen Platte *F* mit, welche an ihr befestigt ist. An der Platte *F* ist ein Grabstichel *H* angebracht, der also genau die Bewegung der Platte und somit der Schraubennutter *Q* annimmt.

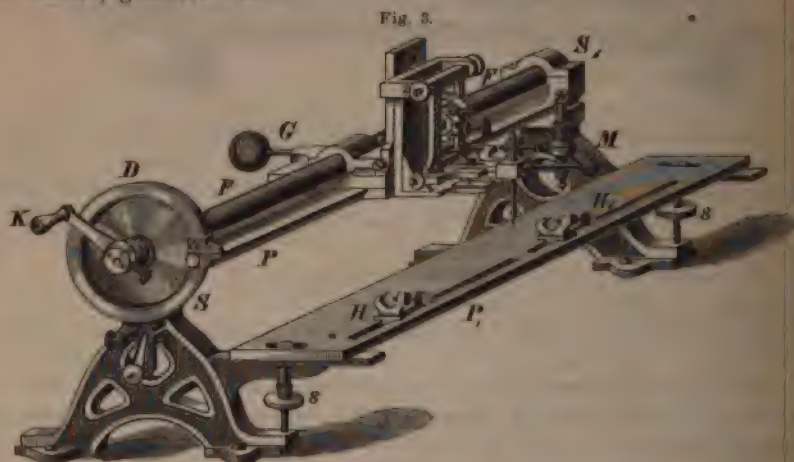
Durch eine ganze Umdrehung der Kurbel schreitet der Grabstichel um die Höhe eines Schraubenganges, also um 1^{mm} fort, durch eine zehntel, hundertstel, tausendstel Umdrehung bewegt sich auch der Stichel um $0^{\text{mm}},1$, $0^{\text{mm}},01$, $0^{\text{mm}},001$ weiter. Es genügt daher den Bruchteil der Umdrehung der Schraube zu kennen, um zu wissen, wie weit der Stichel vorgeschoben ist.

Zu dem Zwecke ist an dem mit der Kurbel versehenen Ende der Schraube auf den Cylinder eine kreisförmige Scheibe *D* aufgesetzt, welche sich mit der Schraube dreht, und deren Rand in 100 Teile geteilt ist; ein unbeweglicher an dem Tisch des Apparates angebrachter Zeiger *U* gibt dann an, um welchen Bruchteil einer Umdrehung die Schraube gedreht, um welchen Bruchteil eines Millimeter somit der Stichel vorgeschoben ist.

Will man z. B. eine Glasröhre teilen, so legt man dieselbe, wie die Figur zeigt, auf zwei Lager, in denen sie durch zwei Fäden *L* und *K* festgehalten wird, so daß sie sich drehen, aber nicht ihrer Länge nach ver-

schieben kann. Man nimmt dann als Stichel einen Schreibdiamanten, oder besser noch, man überzieht vorher die Röhre mit einer dünnen gleichmäßigen Schicht von Wachs oder Paraffin, und nimmt einen Stahlstich und führt denselben durch passendes Drehen der Schraube an das Ende der Röhre. Dort macht man den ersten Strich, indem man den Stichel mit der einen Hand sanft niederdrückt, und mit der andern Hand die Röhre in ihren Lagern herumdreht, so daß die Spitze des Stichels die Wachs- oder Paraffinschicht von dem Glase entfernt. Man dreht dann die Kurbel um n Teile des Kreises, bewirkt dadurch ein Fortschreiten des Stichels um $n \cdot 0,01 \text{ mm}$ und zieht den Stichel zurück; so fährt man fort, bis die Teilung auf die gewünschte Länge vollendet ist. Schließlich ätzt man die Teilung auf dem Glase durch Flußsäure.

Die Teilmaschine in dieser einfachen Form ist zur Anwendung nicht gerade bequem, indem sie zu jeder Operation die größte Aufmerksamkeit fordert. Man hat deshalb die Teilmaschine in ihrem mechanischen Teil vielfach verbessert, besonders um den richtigen Abstand der Teilstriche sicher zu erhalten, und die Teilstriche besser ziehen zu können. Fig. 2 zeigt die Teilmaschine in der Form, wie sie jetzt von Bianchi in Paris (K. de Rennes) geliefert wird.



Die Mikrometerschraube F , bei meinem Apparate 56 Centimeter lang, hat ihre Lager in dem eisernen Gestell SS_1 . An demselben Gestelle sind zwei abgehobelte Eisenplatten P und P_1 befestigt, deren obere sorgfältig eben gearbeitete Flächen der Axe der Schraube parallel sind. Die obere dieser Platten trägt einen Schlitten, an welchem der Stichel, resp. das beschreibende Reifserwerk befestigt ist. Eine in dem Schlitten befindliche Mutter greift in die Mikrometerschraube ein, so daß die Drehung der Schraube den Schlitten fortbewegt. Die Schraube kann nur in einem Sinne, von K aus gesehen im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers gedreht und deshalb der Schlitten nur von S_1 aus gegen K hin bewegt werden. Um den Schlitten im entgegengesetzten Sinne bewegen zu können, ist die Mutter des Schlittens aus zwei Teilen zusammengesetzt, so daß die obere Hälfte in einem Gelenke drehbar kann an dem Griffe G ange-

gehoben werden. Nur in diese obere Hälfte der Mutter sind Windungen eingeschnitten, so daß, wenn sie empor gehoben ist, der Schlitten frei auf der Platte verschoben werden kann. Die an dem Ende des Griffes angebrachte schwere Messingkugel bewirkt durch ihr Gewicht ein sicheres Eingreifen der Windungen der Mutter in jene der Schraube, wenn die obere Hälfte der Mutter niedergelassen ist.

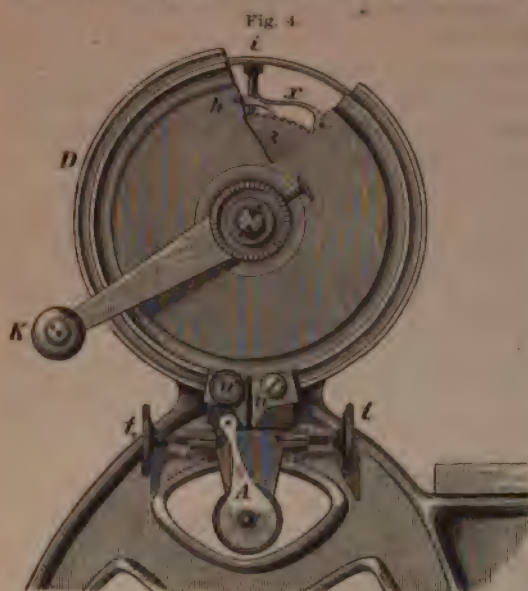
Neben dem Reifserwerk ist an dem Schlitten ein Mikroskop M angebracht, durch welches man die gezogenen Teilstriche scharf sehen kann, und welches außerdem in nachher zu beschreibender Weise die Teilmaschine befähigt als Längenmeßapparat zu dienen.

Die Platte P_1 dient zur Befestigung der Gegenstände, welche mit einer Teilung versehen werden sollen; zu dem Zwecke trägt sie in einem Schlitz verschiebbare Lager H, H_1 , in welchen die betreffenden Gegenstände, Röhren, Maßstäbe etc. befestigt werden. Um bei zu teilenden Objekten verschiedener Breite die Teilung an der richtigen Stelle anbringen zu können, ist die Platte P_1 etwas verschiebbar, so daß sie der Mikrometerschraube etwas näher gebracht, oder etwas von ihr entfernt werden kann. Gleichzeitig dient diese Verschiebbarkeit der Platte dazu die Gegenstände, welche mit einer Teilung versehen werden sollen, der Schraube genau parallel zu legen. Man bringt zu dem Zwecke den Schlitten zunächst an das eine Ende des zu teilenden Objektes und verschiebt die Platte P_1 so, daß der Stichel sich gerade über dem Punkte befindet, wo die Teilung beginnen soll. Dann bringt man den Schlitten an das andere Ende und bewirkt durch einen gelinden Druck auf dieses Ende der Platte, daß auch dort sich der Stichel gerade über dem Punkte befindet, wo die Teilung enden soll. Durch anziehen der Schrauben s wird dann die Platte so festgesetzt.

An dem mit der Kurbel versehenen Ende der Schraube befindet sich auch an dieser Maschine die auf ihrem Umfange in 100 gleiche Teile geteilte Scheibe D ; ein an dem Gestelle der Maschine befestigter Index läßt erkennen, um welchen Bruchteil des Umfanges die Schraube gedreht ist.

Bei der einfachen Teilmaschine erfordert es große Aufmerksamkeit, daß man die Schraube von einem zu dem andern zu ziehenden Teilstrich nicht zu wenig oder zu viel dreht, es ist deshalb sehr schwierig, die Teilung genau gleichmäßig zu machen. Diese Schwierigkeit ist bei der vervollkommenen Maschine durch einen besondern Mechanismus gehoben. Zunächst kann man mit der Kurbel K die Schraube nur in dem einen Sinne drehen; zu dem Zwecke ist die Scheibe D , welche mit der Kurbel gedreht wird, nicht fest mit der Schraube verbunden, sondern für sich drehbar auf das Ende der Schraube aufgesetzt. Dreht man die Scheibe nach links herum, so bewegt sie sich ohne die Schraube mitzunehmen, nur bei der Drehung nach rechts herum wird auch die Schraube gedreht. Um das zu erreichen, ist unmittelbar neben der Scheibe und derselben parallel, wie Fig. 4 zeigt, in der ein Stück der Scheibe fortgenommen ist, auf die Schraube ein gezahntes Rad z gesetzt, und an der Scheibe D ist ein Haken h befestigt, welcher bei der Drehung nach links auf den Zähnen des Rades schleift, bei derjenigen nach rechts aber durch die Feder f auf das Zahnrad aufgedrückt wird, in die Zähne eingreift, und so die Schraube mitnimmt.

An der Scheibe *D* sind, wie Fig. 4 zeigt, zwei Nasen angebracht *n* und *n'*, von denen die eine *n* unveränderlich befestigt ist, während die andere *n'* an jeder Stelle des Umfanges eingeklemmt werden kann. Diese Nasen stoßen gegen einen Anschlag *A*, der an dem Gestelle der Maschine



drehbar befestigt ist, um dessen Bewegung durch die Spitzen der Schrauben *t* und *t₁* gehemmt wird. Die Schraube *t* wird so gestellt, daß wenn bei einer Drehung nach links herum der Anschlag *A* durch die Nase *n* gegen die Spitze von *t* gedrückt wird, der Nullpunkt der Teilung auf der Scheibe *D* sich gerade am Index *i* befindet. Man kann dann mit der Kurbel *K* die Schraube nur so weit drehen, bis die Nase *n* den Anschlag *A* gegen das Ende der Schraube *t₁* drückt. In der Fig. 4 angedeuteter Stellung der Nase *n'* würde das nach einer ganzen Umdrehung der Schraube sein.

wenn man *t₁* so stellt, daß der Anschlag *A* gegen das Ende von *t₁* drückt, wenn sich wieder der Nullpunkt der Teilung an dem Index *i* befindet. Um die Schraube weiter zu drehen, muß man erst die Scheibe wieder nach links drehen, bis die Nase *n* den Anschlag *A* wieder gegen das Ende von *t* drückt. Die in Fig. 4 dargestellte Anordnung würde somit die geeignete sein, um, ohne besondere Aufmerksamkeit auf die Drehung verwenden zu müssen, einen Gegenstand, etwa einen Maßstab mit einer Millimeterteilung zu versehen. Man stellt durch Drehung nach links die Scheibe *D* so, daß der Nullpunkt der Teilung der Scheibe am Index *i* sich befindet, wenn die Nase *n* den Anschlag *A* an *t* drückt. Man bringt dann den Maßstab in die richtige Lage, so daß der Stichel den ersten Strich dort zieht, wo auf demselben die Teilung beginnen soll. Man zieht den betreffenden Strich; dann dreht man die Scheibe rechts herum, bis die Nase *n'* den Anschlag gegen das Ende von *t₁* drückt; bei dieser Drehung wird der Schlitten um 1^{mm} fortgeschoben, da bei derselben die Schraube einmal vollständig gedreht wurde. Man zieht den zweiten Strich und dreht dann die Scheibe zunächst links herum, bis die Nase *n* den Anschlag *A* trifft, und wieder rechts herum, bis die Nase *n'* wieder den Anschlag trifft. Die erste Drehung ließ den Schlitten stehen, brachte aber die Scheibe in die Lage, welche eine Drehung nach rechts und damit eine Drehung der Schraube möglich machte. Man zieht den zweiten Strich und so fort, so daß man zwischen je zwei Strichen die Scheibe einmal nach links, einmal nach rechts drehen muß, bis der Anschlag die Bewegung der Scheibe hemmt.

Will man den Maßstab statt in Millimeter in kleinere Teile teilen, so hat man nur die Nase *n'*, welche die Drehung nach rechts hemmt, zu versetzen. Entfernt man z. B. die Nase um ein viertel Umkreis nach links hin, so würde die Bewegung nach rechts jedesmal gehemmt, wenn die Schraube um drei viertel Umdrehung gedreht, somit der Stichel um $0,75^{\text{mm}}$ verschoben wäre. Wir erhielten somit eine Teilung, bei der je zwei Teilstriche um $0,75^{\text{mm}}$ von einander entfernt wären.

Man zieht auf einem Maßstabe, den man teilen will, nicht alle Striche gleich lang, sondern den ersten lang, dann vier kurze, den fünften von mittlerer Länge, dann wieder vier kurze und den zehnten mit dem ersten von gleicher Länge. Bei der alten Maschine mußte die Hand des Teilenden diese Gruppierung der Linien besorgen; das erforderte Geschicklichkeit und stete Aufmerksamkeit, ohne daß man jedoch imstande war, die gewünschte Regelmäßigkeit zu erreichen. Die neue Einrichtung des Grabstichels jedoch, wie sie Fig. 3 perspectivisch und Fig. 5 vom Profil zeigt, enthält einen besondern Mechanismus zur Lösung dieser Aufgabe. Man hat in der Hand den kleinen Haken *U* (Fig. 5).

Man zieht denselben anfangs gegen sich hin, indem man ihn ein wenig aufhebt, dann schiebt man ihn leicht niederdrückend zurück. Dabei dringt der Stift ein wenig in das zu teilende Objekt ein und hinterläßt den Strich. Um dem Striche die gewünschte Länge zu geben, genügt es, den Gang des Stichels passend zu hemmen.

Dazu ist über dem Stichel ein Rad *L V X* (Fig. 5) angebracht, welches sich um eine feste Ase drehen kann; das Rad

besteht aus zwei kreisrunden Platten, deren eine *L* auf ihrem Umfange mit Zähnen versehen ist, die andere *V X* aber mit Ausschnitten, welche abwechselnd tiefer und weniger tief sind, getrennt durch Zwischenräume von gleicher Länge, die durch den Umfang der Scheibe gebildet werden. In dem Augenblick nun, wo man den Haken *U* anzieht, bewegt sich ein vorspringendes Stück bei *X* gegen das Rad, dringt in einen tieferen Ausschnitt ein und hemmt auf den Boden desselben aufstosend die Bewegung des Schreibstiftes. Wenn man dann den Stift zurückschiebt, so bewegt er sich so weit, bis er an den Vorsprung *T* stößt, welcher ihm nicht weiter zu gehen erlaubt.

Während dieser Bewegung greift nun aber ein Haken *R* in die Zähne des Rades *L*, dreht es um einen Zahn voran und verschiebt den Ausschnitt des nebenliegenden Rades *V*. Wenn man dann den Stift von neuem anzieht, so trifft er nicht mehr auf einen Ausschnitt, sondern auf den äußeren Umfang des Rades, welcher an Stelle des Ausschnittes getreten ist. Die Bewegung des Stichels geht daher nicht so weit, und der von ihm gemachte

Fig. 5.



[illegible]

161 = 1.0000000

Die in der Teilung selbst ist es am zu erkennen, in die einzelnen Teilungslinien von der einen Seite sind. Man erkennt das, indem man die Teilung etwa von 2^{mm} bis 3^{mm}, die man sich mit dem Mikroskop selbst entlegen kann in der Maschine verschiebt. Man bringt zunächst an das eine Ende der Maschine, stellt das Mikroskop auf das andere Ende der Teilung an und verschiebt durch Drehung der Schraube des Mikroskops das Mikroskop auf dem andern Ende der Teilung einstellbar, so dass man das eine Ende der Teilung unter das Mikroskop rückt, um zu sehen, ob in der Teilung eine Teilung von 30^{mm} gegeben ist. Man sieht, dass die Teilungslinien alle gleich sind, stets 30^{mm} voneinander entfernt. Das Mikroskop von dem einen Ende der Teilung zum andern wandern. In dieser Weise fand ich z. B. bei meiner Teilung, dass die Teilungslinien in der Nähe der Enden nur etwa 100^{mm} voneinander entfernt sind, dass sie gegen die Mitte hin von beiden Seiten entfernt werden, etwa 150^{mm} von beiden Enden entfernt den Wert 1^{mm} erreichen und auf dem mittlern 250^{mm} zwischen 1 und 1,0003^{mm} schwanken. Es sind das Fehler, die in den allermeisten Fällen ganz zu vernachlässigen sind.

Der Beschreibung der Methoden, nach denen die Höhe der Schraube

gänge zu prüfen ist, läßt gleichzeitig erkennen, daß die Teilmaschine auch ein wertvoller Meßapparat ist; man kann die Länge von Platten, Röhren, kurz aller Gegenstände, die man wie die mit einer Teilung zu versiehenden Objekte auf der Platte P_1 der Teilmaschine befestigen kann, mit derselben auf das schärfste messen. Wir werden sehen, wie die Teilmaschine vielfach zu diesem Zwecke verwertet wird.

Die mit der Teilmaschine herzustellenden Maßstäbe teilt man selten in kleinere Abteilungen als Millimeter oder höchstens $0,5^{\text{mm}}$, weil bei zu enge gezogenen Teilungen die Ablesung zu große Schwierigkeit bietet. Um nun Unterabteilungen des Millimeters mit den Maßstäben noch genau bestimmen zu können, bringt man an denselben einen Nonius an.

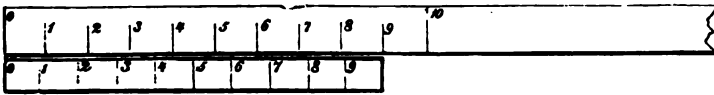
Der Nonius.

Nehmen wir einen Maßstab von genau 9^{mm} Länge und teilen ihn mit der Teilmaschine in 10 genau gleiche Teile, legen ihn dann der Länge nach an unser geteiltes Meter, so daß er längs des geteilten Randes verschoben werden kann, so ist dieser einfache Apparat ein Nonius. Da die Länge des Maßstabes 9^{mm} in 10 Teile geteilt ist, so ist der Wert jedes Teilstriches $0,9^{\text{mm}}$. Der Wert der Teilung unseres Metermaßes ist dagegen 1^{mm} . Der Unterschied beider daher

$$1^{\text{mm}} - 0,9^{\text{mm}} = 0,1^{\text{mm}}.$$

Es folgt daraus, daß, wenn die beiden Teilstriche 0 (Fig. 6) zusammenfallen, die beiden Teilstriche 1 um $0,1^{\text{mm}}$ von einander abstehen,

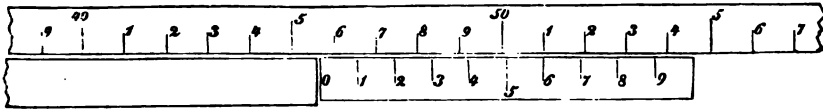
Fig. 6.



die beiden Teilstriche 2 um $0^{\text{mm}},2$ u. s. f., bis der Teilstrich 10 des Nonius mit dem Teilstrich 9 des Maßstabes zusammentrifft. Ähnlich wird es sein, wenn statt der Teilstriche 0 zwei andere Teilstriche auf einander treffen, von diesen aus werden dann die beiden nächsten zu jeder Seite um 1, die folgenden um 2 Zehntel eines Millimeters differieren.

Nehmen wir nun an, man wolle die Länge eines Objektes mit unserm Metermaß bestimmen, und es zeigte sich, daß es $4^{\text{cm}} 5^{\text{mm}}$ und einen Bruchteil eines Millimeters (Fig. 7) lang wäre. Dieser Bruchteil wird dann mittels des Nonius bestimmt.

Fig. 7.



Zu dem Ende führt man den Nonius, bis er das Ende des zu messenden Objektes berührt, und sucht, welcher Teilstrich des Nonius mit einem des Maßstabes zusammenfällt. In unserer Abbildung ist es der sechste.

Von diesem ausgehend findet man dann, daß die Teilstriche 5, 4, . . . 0 des Nonius um $0^{\text{mm}},1$ $0^{\text{mm}},2$. . . $0^{\text{mm}},6$ hinter denen des

Mafsstabes zurückbleiben. Der auszuwertende Bruchteil ist demnach $0^{\text{mm}},6$, sein Wert ist in Zehnteilen eines Millimeters angegeben durch die Zahl, welche neben dem mit einem des Mafsstabes zusammenfallenden Teilstrich steht.

Wir haben bei der Beschreibung des Nonius vorausgesetzt, dafs derselbe eine Länge von 9^{mm} habe und in 10 Teile geteilt sei. Dadurch erhielten wir die Teile des Millimeters in Zehnteln angegeben. Wir können nun ebenso gut die Länge desselben zu 19^{mm} , 29^{mm} , 39^{mm} nehmen und diese Länge in 20, 30, 40 Teile teilen; wir erhalten dann Zwanzigstel, Dreissigstel, Vierzigstel eines Millimeters. Wenn man jedoch die Teile zu sehr vervielfältigt, so tritt der Übelstand ein, dafs zur Rechten und Linken der koincidierenden Teilstriche eine Anzahl so wenig von einander abstehender Teilstriche sich findet, dafs sie noch zusammenzufallen scheinen, und man daher nicht imstande ist anzugeben, welche nun eigentlich die koincidierenden Teile sind. Indem man die Teilstriche möglichst fein zieht und dieselben durch ein Mikroskop betrachtet, kann man zwar die Genauigkeit ziemlich weit, vielleicht bis auf $0,01$ eines Millimeters bringen; es gibt jedoch immer eine Grenze, welche nicht überschritten werden kann.

Der Nonius kann an allen Teilungen, auch an geteilten Kreisen angebracht werden; dort befindet er sich auf den Alhidaden. Wir werden ihn an allen feineren Mefsapparaten wiederfinden.

Das Sphärometer.

Die Mikrometerschraube dient nicht allein dazu Längen zu teilen, sondern sie findet auch ganz besonders Anwendung, wenn es sich darum handelt, sehr kleine Abstände zu messen. Es folge hier die Beschreibung eines Apparates, in welchem sie benutzt wird, um sehr kleine Höhenunterschiede, z. B. die Dicke von Platten oder Drähten, mit grösster Genauigkeit zu messen, des Sphärometers.

Der Hauptteil dieses Apparates (Fig. 8) besteht in einer möglichst genau gearbeiteten Mikrometerschraube, deren Gänge die Höhe von $0^{\text{mm}},5$ haben. Dieselbe bewegt sich in einer Mutter, welche unten in der Hülse *A* sich befindet. Die Hülse *A* ist in dem Arm *B* unveränderlich befestigt und wird mittels desselben von dem Stativ *SSG* getragen, welches seinerseits auf dem Dreifufs *DD* aufgesetzt ist. Um durch dieses Stativ den Apparat nicht einseitig zu belasten, ist bei *G* an der anderen Seite des Punktes, mit welchem der Rahmen *S' S* auf den Dreifufs gesetzt ist, ein Gegengewicht angebracht. Der Dreifufs ist mit Stellschrauben versehen, um den Apparat vertikal zu stellen. In der Büchse *A* befindet sich ein oben hervorragender Stahlstift *J*, welcher mit sanfter Reibung auf und nieder bewegt werden kann. Wird die Mikrometerschraube in dem einen Sinne gedreht, so hebt sie den Stift *J* empor, wird sie in dem andern Sinne gedreht, so sinkt der Stift *J* durch sein eigenes Gewicht herab. Auf den Stift *J* kann ein kleiner Stahlsteller aufgeschraubt werden oder eine ziemlich scharfe Schneide, wie sie die Figur an dem Stifte *J'* zeigt. Gerade über dem Stifte *J* ist durch den horizontalen Arm *SH* ein unten mit einer Schneide versehener Stift *J'* geführt, welcher in der Durchbohrung des Armes mit sanfter Reibung auf und nieder bewegt werden kann. Auf der oberen Spitze dieses Stiftes ruht

die um eine bei a befestigte Axe drehbare Libelle L . Damit die Libelle auf die Spitze des Stiftes J' nur einen sehr leisen Druck ausübt und so der Stift J' auf den leisesten Druck von untenher emporsteigt, ist auf der andern Seite der Axe a das Gegengewicht c angebracht.

Durch Heben oder Senken des Stiftes J' , der mit seiner Schneide auf dem Teller oder der Schneide des untern Stiftes J ruht, kann man somit die eine Seite der Libelle heben oder senken, also immer dafür sorgen, daß die Libelle genau horizontal steht. Diese horizontale Stellung der Libelle ist das Hilfsmittel, um mit dem Apparate messen zu können.

Diese Messung selbst geschieht an der unten am Rahmen S angebrachten Millimeterteilung T und an der Scheibe Z , welche auf ihrem Rande eine Teilung trägt, welche den Umfang der Scheibe in 500 gleiche Teile teilt. Diese Scheibe ist unten an die Mikrometerschraube angeschraubt, so daß die Axe der Schraubenspindel gleichzeitig die Axe der Kreisscheibe ist. Wie erwähnt, ist die Höhe eines Schraubenganges der Mikrometerschraube ein halbes Millimeter, es bedarf daher zwei Umdrehungen der Schraube, um die Scheibe an der Teilung 1^{mm} zu heben. Die Teilung T ist an dem Apparate so befestigt, daß jedesmal, wenn die Scheibe einen Teilstrich passiert, der Nullpunkt der Teilung auf der Scheibe an dem Rande der Platte T' vorübergeht. Die auf die Teilung T gerichtete Lupe l hat den Zweck, genau zu erkennen, welche Stellung zwischen den Teilstrichen die Scheibe hat.

Ans der Beschreibung des Apparates ergibt sich leicht, wie bei den Messungen verfahren werden muß. Setzen wir voraus, es solle die Dicke einer planparallelen Glasplatte gemessen werden. Man schraubt auf die Spitze des Stiftes J den kleinen Stahlteller und schraubt die Mikrometerschraube so hoch empor, daß die Libelle genau horizontal steht. Man lost dann die Stellung der Scheibe Z an der Teilung T ab. Befinde sich der Rand der Scheibe zwischen den Teilstrichen 2 und 3, aber näher an 2, und sei der Teilstrich 325 der auf der Scheibe angebrachten Teilung an dem Rande der Platte T . Da die Höhe der Schraubengänge $0,5^{\text{mm}}$ ist, so entspricht der Drehung der Schraube um einen Teilstrich ein Heben oder Senken der Mikrometerschraube um $0,001^{\text{mm}}$. Die soeben abgelesene Stellung



der Scheibe gibt somit an, daß, wenn die Libelle genau horizontal steht, und zwischen der Schneide J' und dem Teller J nichts zwischen geschoben ist, daß dann die Scheibe sich $2,325^{\text{mm}}$ unter dem Nullpunkte der Teilung T befindet.

Nun wird die Mikrometerschraube und damit der Teller J gesenkt, soweit, daß man die Glasplatte auf denselben legen kann. Ist das geschehen, so wird die Mikrometerschraube wieder gehoben, bis die Schneide J' von der Glasplatte berührt wird, und dann die Mikrometerschraube vorsichtig weiter gedreht, bis die Libelle wieder genau horizontal steht. Diese Beobachtung beweist dann, daß die Schneide J' wieder genau dieselbe Höhe hat wie vorhin, die nach oben gewandte Fläche der Glasplatte ist also genau in der Lage, in der vorhin der Teller J war, der Teller J und damit die Scheibe Z ist also genau um die Dicke der Glasplatte niedriger wie vorhin. Wir erhalten also die Dicke der Glasplatte, wenn wir von der jetzt beobachteten Stellung der Scheibe die vorher bestimmte Stellung abziehen. Befinde sich die Scheibe jetzt zwischen dem Teilstrich 3 und 4, aber näher bei 4, und sei der Teilstrich 438 der Scheibe an der Schneide der Platte T . Da die Scheibe näher bei 4 als bei 3 ist, so folgt, daß sie mehr als $3,5^{\text{mm}}$ tiefer ist als der Nullpunkt der Teilung, und zwar, da der Teilstrich 438 der Scheibe an der Schneide der Platte T ist, um $0,438^{\text{mm}}$. Die jetzige Stellung der Scheibe ist also 3,938. Hiervon den vorhin bestimmten Wert $2,325$ abgezogen gibt $1,613^{\text{mm}}$ als Dicke der Glasplatte. Zur Erreichung größerer Genauigkeit wird man die Messung einige Male wiederholen. Da man die Libelle nicht absolut genau einzustellen imstande ist, so wird man bei den verschiedenen Messungen einige Teilstriche Differenz finden; man nimmt dann das Mittel aus den gefundenen Zahlen.

Zur Messung von Drähten wendet man an Stelle des Tellers auf dem unteren Stift die Schneide an; man schiebt dann ein kleines Stückchen des zu untersuchenden Drahtes zwischen die Schneiden, indem man im übrigen bei der Messung ganz in der angegebenen Weise verfährt¹⁾.

Das Kathetometer.

Bei physikalischen Untersuchungen findet man sich oft in die Notwendigkeit versetzt, kleinere oder größere Höhenunterschiede zu messen, besonders von Flüssigkeitssäulen, ohne daß man an dieselben direkt einen Maßstab anlegen kann.

Zu diesem Zwecke haben zuerst die französischen Physiker Dulong und Petit einen besondern Apparat konstruiert und bei ihren Versuchen über die Ausdehnung des Quecksilbers durch die Wärme zu Messungen benutzt. Später wurde dieser Apparat von Pouillet vergrößert und Kathetometer genannt.

Das in Fig. 9 und 10 abgebildete Kathetometer ist nach der ihm von Standinger gegebenen Form konstruiert, nur die Anbringung des Fernrohrs Fig. 10 weicht von der von Standinger gewählten Anordnung etwas ab. Das der Beschreibung zu Grunde liegende Exemplar ist vom Mechaniker Schubart in Gent verfertigt.

Die wesentlichen Bestandteile des Apparates sind ein vertikaler Maßstab, an dem ein horizontales Fernrohr auf und ab geschoben werden kann.

¹⁾ Sphärometer der beschriebenen Form sind in vortrefflicher Ausführung der Werkstatt von Hermann & Pfister in Bern zu beziehen.

Man stellt zu den Messungen das Fernrohr auf die Kuppen der beiden Flüssigkeitssäulen ein, und die beiden Stellungen des Fernrohres am Maßstab geben die Höhendifferenz der beiden Flüssigkeitssäulen.

So vorzüglich der Apparat ist, wenn er richtig geordnet ist, so unrichtige Resultate kann er andernfalls liefern, deshalb wird es gut sein, ihn etwas genauer zu beschreiben.

Auf einem massiven eisernen mit drei Stellschrauben *SS* versehenen Fuße *F'* (Fig. 9) steht eine vertikale stählerne Axe; sie ist bei *l* sichtbar, wo die Messinghülle in der Zeichnung fortgenommen ist. Um diese kann sich ein hohler Messingcylinder *HH'* frei drehen. Um die Drehung leicht zu machen, ist derselbe oben bei *H* von einer stählernen Schraube durchsetzt, welche oben auf der stählernen Axe aufliegt; durch gelindes Anziehen der Schraube kann man bewirken, daß die Reibung an dem unteren Ende der Hülse, wo sie auf einen den Fuß umgebenden Reif sich stützt, sehr gering ist, indem die Hülse dann fast ganz von der Schraube getragen wird. An der Hülse ist um einerseits der Maßstab *AB* der Axe genau parallel, an der andern Seite ein den Maßstab als Gegengewicht balancierender massiver Messingcylinder *GG'* befestigt. Der Maßstab besteht aus einem Prisma von Gussstahl, dessen Seiten in einer Breite von 8^{mm} möglichst glatt gehobelt, dann aber stark ausgehöhlt sind. Der Maßstab

ist wie das Gegengewicht oben und unten an der Hülse befestigt. Die Basis des Prismas, die vordere Seite ist ebenfalls glatt abgehobelt. In der Mitte derselben ist ein Silberstreifen eingesetzt, von 1^m,1 Länge und 8^{mm} Breite. Derselbe ist 1^m lang in Millimeter geteilt.



Auf den glattgehobelten und geschliffenen Seitenflächen des Prismas gleitet ein Schlitten *de*, von welchem Fig. 10 eine vergrößerte Abbildung gibt, auf und ab, welcher das Fernrohr mit Zubehör trägt. Der Schlitten besteht aus zwei Teilen, welche in der Zeichnung mit *d* und *e* bezeichnet sind. Derselbe gleitet mit sanfter Reibung, die durch etwas Öl noch ver-

mindert wird, an dem Prisma ganz regelmäßig und ohne Schwankung auf und ab.

Der obere Teil des Schlittens *d* ruht mit einem kleinen Stahlfortsatz auf dem obern Ende der im untern Teile des Schlittens in einer Mutter gehenden Mikrometerschraube *m* und wird durch eine elastische Feder von Stahl stets fest an dasselbe angeedrückt.

Durch eine Klemmschraube *q*, welche ein der Seite des Prismas angepaßtes Messingstück gegen das Prisma drückt, kann man den Schlitten festhalten. Mittels der Mikrometerschraube *m* kann dann der obere Teil des Schlittens noch etwas gehoben oder gesenkt werden, um eine möglichst feine Einstellung des Fernrohrs auf das Beobachtungsobjekt zu erzielen.

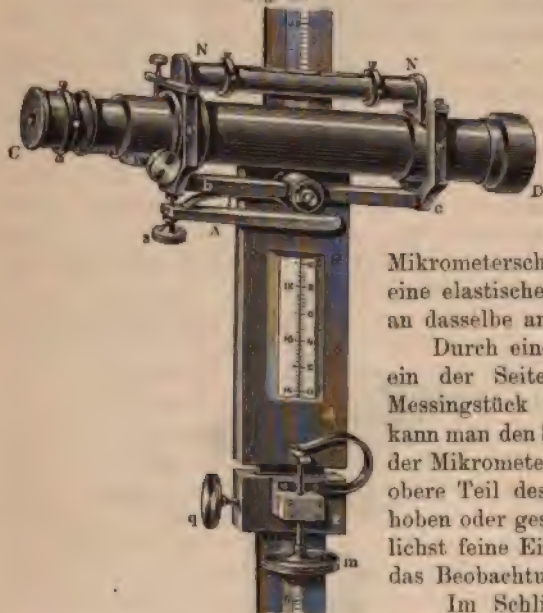
Im Schlitten ist ein abgeschrägter Ausschnitt über dem Buchstaben *d*, dessen

eine Seite mit einem Nonius versehen ist, der gerade an der Teilung des Silberstreifens anliegt. Die Stellung des Schlittens an der Skala liest man durch eine Lupe *l* (Fig. 9) ab; der Nonius gibt direkt $0,02^{mm}$.

Das Fernrohr *CD* ruht in den genau cylindrisch ausgedrehten Gabeln *r* und *r'* und wird dort mit gelindem Druck durch zwei zur Seite zu schlagende Schieber festgelegt. Dort, wo das Fernrohr auf den Gabeln aufliegt, hat dasselbe zwei genau cylindrisch abgedrehte Verdickungen. Auf diesen Verdickungen ruhen die unten genau ebenso cylindrisch ausgedrehten Füße der Libelle *N*, welche durch dieselben Schieber, die das Fernrohr festlegen, durch einen schwachen seitlichen Druck festgehalten werden.

Die beiden das Fernrohr tragenden Gabeln sind durch eine schmale Messingplatte mit einander verbunden, welche von der in dem Schlitten befestigten und dort gerade vor der Teilung befindlichen Axe *a* getragen wird und um diese Axe in einer der Ebene der Teilung parallelen Ebene drehbar ist. Diese Drehung, durch welche das Ende *C* des Fernrohrs etwas gehoben oder gesenkt werden kann, wird durch die kleine Schraubenmutter *s* bewirkt. Zu dem Zwecke ist bei *b* nahe dem einen Ende der das Fernrohr tragenden Platte *bc* an diese eine Mikrometerschraube *bs* angesetzt, welche durch eine Durchbohrung des an dem Schlitten unveränderlich fest verbundenen Armes *A* hindurchgeführt ist. Schraubt man die Mutter *s* in

Fig. 10.



dem einen Sinne, so wird dadurch die Mikrometerschraube und damit das Ende *C* des Fernrohrs herabgezogen; schraubt man die Mutter in dem andern Sinne, so läßt sie die Mikrometerschraube eine Strecke frei, und eine Feder *f* hebt dann die Schraube und damit das Ende *C* des Fernrohrs, bis die Mutter *s* wieder an der untern Fläche des Armes *A* anliegt. Der Zweck dieser Vorrichtung wird sofort hervortreten.

Nach der Beschreibung der Einrichtung unseres Meßapparates haben wir noch einiges zu bemerken über die Art, wie er zu regulieren ist.

Das Fernrohr ist ein optischer Apparat, den wir später zu beschreiben haben. Hier müssen wir nur erwähnen, daß es in seinem Innern zwei unter einem rechten Winkel gekreuzte Spinnfäden besitzt, ein sogenanntes Fadenkreuz, welches man stets zugleich mit dem Objekt, auf welches das Fernrohr eingestellt ist, genau sieht. Man kann leicht bewirken, daß der Kreuzungspunkt der Fäden den zu fixierenden Punkt deckt. Es gibt nun in jedem Fernrohr eine festbestimmte Linie, die optische Axe, welche durch den Kreuzungspunkt des Fadenkreuzes und durch den Mittelpunkt des Objectives geht. Wenn der Mittelpunkt des Fadenkreuzes den zu fixierenden Punkt deckt, so kann man sicher sein, daß der fixierte Punkt in der Verlängerung der optischen Axe liegt.

Die Gabel, in welcher das Fernrohr liegt, sowie das Fernrohr selbst, sind genau cylindrisch gearbeitet. Dreht man daher das Fernrohr in seinen Lagern um sich selbst, so kann seine geometrische Axe nicht geändert werden, es darf aber auch seine optische Axe dadurch nicht geändert werden, d. h. sie muß genau mit der geometrischen Axe zusammenfallen. Sieht man bei der Drehung des Fernrohrs nach und nach verschiedene Punkte in den Mittelpunkt des Fadenkreuzes fallen, so ist das nicht der Fall; dann muß man die optische Axe korrigieren, d. h. das Fadenkreuz so lange regulieren, bis bei einer Drehung des Fernrohrs um sich selbst stets derselbe Punkt von seinem Kreuzungspunkte bedeckt wird. Will man dann die Lage der optischen Axe korrigieren, so hat man nur die der geometrischen zu regulieren, da nach dieser Korrektion beide zusammenfallen.

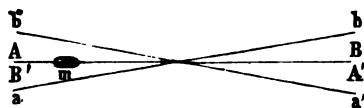
Nachdem also die Fernrohraxe korrigiert ist, hat man vor Gebrauch des Kathetometers

- 1) dafür zu sorgen, daß die Libelle der Axe des Fernrohrs parallel ist;
- 2) die Axe des Fernrohrs genau senkrecht zu dem Maßstab zu stellen;
- 3) die Rotationsaxe des Kathetometers und damit den Maßstab *AB* vertikal zu stellen.

Um die erste Bedingung zu prüfen, ist die Libelle auf die cylindrisch abgedrehten Verdickungen des Fernrohrs mit den ebenso genau ausgedrehten Füßen einfach aufgesetzt, so daß sie ab-

genommen und wieder in umgekehrter Lage hingestellt werden kann, so daß das vorher nach *D* weisende Ende jetzt nach *C* zeigt, und umgekehrt. Sei nun *XY* die Fernrohraxe und stelle *AB* (Fig. 11) die Libelle vor, deren Luftblase bei *m* stehe.

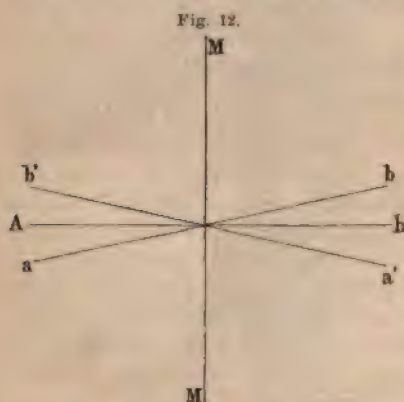
Fig. 11.



X ————— Y

Wird nun die Libelle in der angegebenen Weise umgesetzt, und ist sie der Fernrohraxe in der That parallel, so kehrt sich dieselbe blos um, in ihrer zweiten Lage die erste deckend; sie muß wieder in $A' B'$ liegen. Die Luftblase muß dann wieder genau so liegen wie früher, sie darf gegen den Beobachter ihre Lage nicht geändert haben. Hatte dagegen die Libelle die Lage ab , so hat sie nach der Umstellung die Lage $a' b'$, und die Luftblase würde ihre Lage geändert haben. Durch Drehung einer Schraube, welche das eine Ende der Libelle in ihren Lagern hebt und senkt, wird sie in dem letztern Falle korrigiert, bis eine Umstellung die Lage der Luftblase nicht mehr ändert.

Um die zweite Bedingung zu prüfen, hat man dem Instrument nur eine Drehung um 180° zu erteilen. Ist das Fernrohr AB (Fig. 12) senkrecht zum Maßstab MM , so ist es nach der Drehung sich selbst parallel, es muß



also die Luftblase in Bezug auf den Beobachter dieselbe Lage beibehalten haben. Steht das Fernrohr nicht senkrecht, sondern etwa parallel ab , so hat es nach der Drehung die Lage $a' b'$, und die Luftblase der Libelle muß ihre Stellung geändert haben. Ist das der Fall, so wird durch Drehung der Schraubenmutter s das eine Ende des Fernrohrs soviel gehoben oder gesenkt, bis die Drehung des Instrumentes um 180° die Stellung der Libellenblase nicht mehr ändert.

Diese Korrektion genügt es nicht ein für allemal vorzunehmen; denn auch bei den bestgearbeiteten Apparaten kann der Schlitten nicht immer vollkommen in der gleichen Weise an das Prisma angepresst werden, und deshalb ist das Fernrohr nicht an allen Stellen sich genau parallel. Hat man deshalb in gleich zu beschreibender Weise den Maßstab vertikal gestellt, muß man, wenn die Lage der Luftblase bei irgend einer Stellung des Schlittens anzeigt, daß das Fernrohr nicht mehr genau horizontal steht, durch Drehung der Mutter s das Fernrohr in die horizontale Lage zurückführen.

Um die dritte Regulierung, das Vertikalstellen der Rotationsaxe des Instrumentes vorzunehmen, stellt man das Fernrohr der Verbindungslinie zweier Stellschrauben des Fußes parallel, und dreht eine oder beide Stellschrauben so lange, bis die Blase der Libelle in der Mitte steht; darauf dreht man den Apparat um 90° und bringt durch Drehung der dritten Schraube die Blase ebenfalls in die Mitte. Hat man auf diese Weise die Fernrohraxe in zwei auf einander senkrechten Richtungen horizontal gestellt, so ist sie es in allen, und die zur Fernrohraxe senkrechte Rotationsaxe und somit auch der Maßstab des Apparates stehen vertikal.

Der Theodolith.

Außer der Abmessung von Längen haben wir, besonders in dem *hen* Teile der Physik, häufig genaue Winkelmessungen auszuführen.

Dieselben werden mittels des Theodolithen angestellt. Der Theodolith ist ein in geringerer oder größerer Vollkommenheit schon sehr lange bekanntes Winkelmessinstrument, dessen erster Verfertiger ebenso unbekannt ist als die eigentliche Bedeutung des Namens. Man hat zwar seinen Namen aus dem Griechischen herleiten wollen, doch ist die Ableitung ebenso unbestimmt als gezwungen.

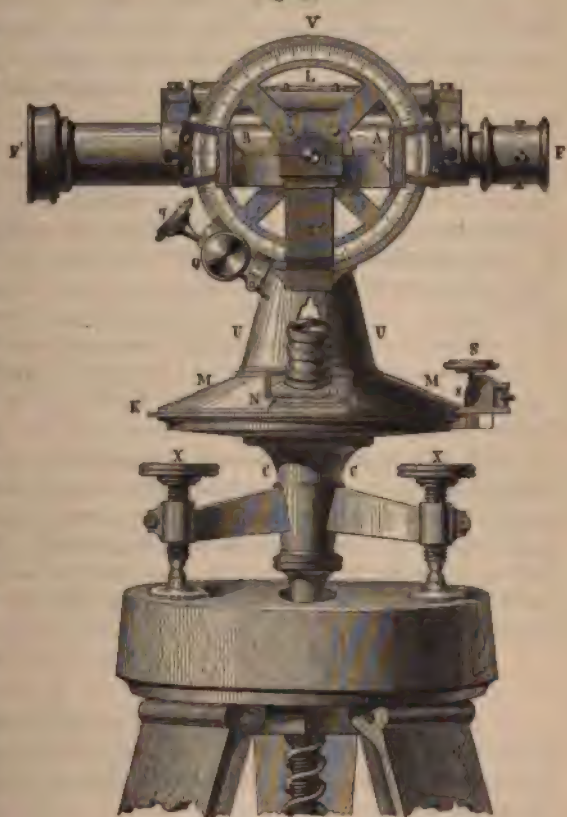
Der Theodolith ist ein Winkelmessinstrument, welches aus zwei getheilten Kreisen, einem horizontalen und einem vertikalen, mit Fernrohr besteht.

Nachfolgender Zeichnung (Fig. 13) und Beschreibung liegt ein Exemplar aus der Werkstätte mathematischer Apparate von Breithaupt in Kassel zu Grunde.

Auf einem massiven, mit Stellschrauben *X* versehenen Dreifuß *CC* befindet sich ein Kreis von Messing *K*, der mittels Speichen in dem Mittelstücke des Dreifußes befestigt ist. Auf dem Kreise ist ein silberner, mit einer genauen Kreisteilung versehener Streifen eingelegt. Mit diesem Kreise in gleicher Ebene und genau centriert liegt ein kleiner Kreis, dessen äußerer Umfang genau den innern Rand des Kreises *K* berührt. Derselbe ist um eine durch seinen Mittelpunkt gehende, im Mittelpunkt des Dreifußes genau eingeschliffene Axe, mit welcher er durch Speichen verbunden ist, drehbar. Der Kreis heißt der Alhidadenkreis. An den beiden Enden eines Durchmessers besitzt der Alhidadenkreis Nonien *N*, welche je nach der Teilung des Kreises halbe Minuten oder noch kleinere Bruchtheile von einem Grade geben. An denselben Kreise sind über den Nonien kleine Mikroskope befestigt zur genaueren Ablesung. Der Alhidadenkreis kann mittels der Klemmschraube *S* festgestellt werden, an der zur feineren Einstellung des Kreises die Mikrometerschraube *s* angebracht ist.

An einer Säule *UU*, welche auf dem Alhidadenkreis festgeschraubt ist,

Fig. 13.



befindet sich das Fernrohr FF' . Die optische Axe des Fernrohrs wird von der mit der Axe des Alhidadenkreises zusammenfallenden Drehungsaxe der Säule U geschnitten. Das Fernrohr selbst ist an einer auf seiner optischen Axe senkrechten Axe D befestigt, welche in zwei Zapfenlagern drehbar eingelegt ist. Die Axe D ist genau dem Horizontalkreis parallel. Auf dem Fernrohr befindet sich eine Libelle L . An dem Fernrohr in unveränderlich fester Verbindung und auf der Drehungsaxe D desselben senkrecht ist der Vertikalkreis V angebracht. Zu beiden Seiten des Kreises, an den Enden eines Durchmessers, befinden sich feste, nicht drehbare Nonien A und B . Den Nullpunkten der Nonien entsprechend sind auf der Teilung des Vertikalkreises zwei Nullpunkte, von denen aus die Teilung nach beiden Seiten von $0-90^\circ$ fortzählt. Die optische Axe des Fernrohrs muß mit dem durch die Nullpunkte angegebenen Durchmesser des Vertikalkreises zusammenfallen. Dreht man Fernrohr samt Kreis, so liest man an den Nonien die GröÙe der Drehung ab. Der Vertikalkreis kann durch die Klemmschraube Q festgestellt und mittels der an dieser befestigten Mikrometerschraube q feiner eingestellt werden.

Der ganze Apparat steht auf einem massiven Stativ, an welchem er mittels einer Schraube und einer Spiralfeder befestigt ist.

Will man nun mittels des Theodolithen z. B. die Winkeldistanz zweier in einer Horizontalebene befindlicher Punkte nehmen, so hat man das Instrument zunächst in ähnlicher Weise wie das Kathetometer zu regulieren, und zu prüfen, ob die Libelle parallel dem Fernrohr ist, ob die Drehaxe des Fernrohrs zur optischen Axe senkrecht und mit dieser in einer zur Axe des Alhidadenkreises senkrechten Ebene liegt, und dann, ob die Drehungsaxe des Alhidadenkreises senkrecht zum Horizontalkreis ist. Dann hat man den Horizontalkreis horizontal und damit die Rotationsaxe des Vertikalkreises vertikal zu stellen¹⁾.

Hat man so das Instrument vorbereitet, so stellt man das Fernrohr zunächst auf den einen Punkt ein und merkt den Stand der Nonien am Horizontalkreise. Darauf verfährt man ebenso mit dem andern Punkte, und die Differenz der Nonienangaben gibt die gesuchte Winkeldistanz. Die beiden Nonien N geben jedesmal zwei Ablesungen, also auch zwei sich kontrollierende Werte, die zugleich zum Eliminieren etwaiger Teilungsfehler dienen.

Außer Längen und Winkel sind es nun vorzüglich noch Gewichte, welche wir in der Physik zu messen haben. Dieses geschieht mit der Wage, deren Beschreibung und Gebrauch wir aber erst an einer andern Stelle vorführen können.

¹⁾ Eine vorzügliche Zusammenstellung aller Korrekturen am Theodolithen gibt *Bauernfeind*, „Elemente der Vermessungskunde“ Bd. I.

Einige Sätze aus der Differential- und Integralrechnung.

Differentiation.

Wir haben bei Besprechung der in der Physik anzuwendenden Methode die Bedeutung der Mathematik hervorgehoben, indem dieselbe nicht nur dazu dient, die physikalischen Gesetze in kurzer Form auszusprechen, sondern auch dazu, aus diesen Gesetzen weitere Folgerungen abzuleiten. Ganz besonders dient zu diesen Entwicklungen die Differential- und Integralrechnung, so daß man bei einer vollständigen Darlegung auch der experimentellen Physik dieses Hilfsmittel nicht ganz entbehren kann. Da wir nicht bei allen Lesern dieses Buches die Vertrautheit mit diesen Rechnungsoperationen voraussetzen dürfen, wollen wir an dieser Stelle die Grundbegriffe dieser Methoden kurz darlegen, soweit wir sie später unumgänglich nötig haben. Unsere späteren Entwicklungen gewinnen dadurch an Kürze und Übersichtlichkeit, da wir dann nicht genötigt sind in jedem einzelnen Falle die erforderlichen Ableitungen zu machen, sondern auf diese Stelle verweisen können.

Die physikalischen Gesetze geben uns eine Gleichung zwischen den eine Erscheinung bedingenden veränderlichen Größen, so daß also, wenn der Wert der einen, die wir in der Regel willkürlich ändern können, gegeben ist, die andere nach dieser Gleichung berechnet werden kann. Als Beispiel führten wir das Reflexionsgesetz an, der Zurückwerfungswinkel ist stets dem Einfallswinkel gleich; nennen wir erstern y , letztern x , so ist das Gesetz dargestellt durch die Gleichung

$$y = x.$$

Die Gleichung gibt somit für jeden Wert, den wir x willkürlich beilegen, den zugehörigen Wert von y . Andere Gesetze werden durch andere Beziehungen gegeben, wir werden Beziehungen finden wie $y = ax^2$, $x \cdot y = a$, $y = \sin ax$ u. a. m., wenn immer y die Größe bedeutet, welche bestimmt werden soll, und die Größe, von der sie abhängt, gleich x gesetzt wird, und außerdem a irgend eine konstante Größe bedeutet. Allgemein deutet man bekanntlich irgend eine Beziehung zwischen zwei solchen veränderlichen Größen durch das Zeichen

$$y = f(x)$$

an und nennt y eine Funktion von x .

In vielen Fällen ist es uns nun von der größten Bedeutung, die Änderung angeben zu können, welche y erfährt, wenn sich x um eine verschwindend kleine Größe ändert, das heißt um eine Größe, die kleiner ist als jeder angebbare Wert. Man nennt diese Änderungen die Differentialien von y und x und bezeichnet sie mit dy und dx , den Quotienten aus diesen beiden Differentialien, oder $\frac{dy}{dx}$ nennt man den Differentialquotienten von y nach x .

Die Berechnung dieser Größen ergibt sich unmittelbar aus dem Begriff der Funktion, daß sie jeden Wert von y darstellt, wenn der zugehörige Wert von x gegeben ist. Ist y der Wert für irgend einen Wert von x , so

können wir den dem Werte $x + dx$ zugehörigen Wert mit $y + dy$ zeichnen, und erhalten dann

$$y + dy = f(x + dx)$$

$$dy = f(x + dx) - f(y); \quad \frac{dy}{dx} = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}.$$

Es sind nur die durch das Funktionszeichen $f(x)$ angedeuteten Funktionen auszuführen. Nehmen wir z. B. die Funktion $y = ax^2$, so die Rechnung folgende:

$$y + dy = a(x + dx)^2 = ax^2 + 2axdx + dx^2$$

$$dy = 2axdx + dx^2.$$

Da nun der Voraussetzung nach schon dx einen verschwindend kleinen Wert hat, so ist $dx \cdot dx$ selbst gegen dx verschwindend klein, so daß es gleich Null setzen dürfen, und damit wird

$$dy = 2axdx; \quad \frac{dy}{dx} = 2ax.$$

Dieses Beispiel läßt zugleich erkennen, daß wenn auch dy einen schwindend kleinen Wert hat, doch der Differentialquotient, also der tinent aus den beiden verschwindend kleinen Größen dy und dx einen bestimmten Wert hat, und zwar um so genauer, je näher wir uns der Null denken. Denn die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + dx$$

gilt für jeden selbst endlichen Wert von dx ; lassen wir aber dx immer näher und näher gleich Null werden, so nähert sich der Quotient immer mehr dem Werte $2ax$; lassen wir also dx kleiner werden als jede angebare Gröfse, so unterscheidet sich auch der Quotient $\frac{dy}{dx}$ von $2ax$ weniger als jede angebbare Gröfse, das heißt er nimmt diesen Wert an.

Ehe wir nun dazu übergehen, die wichtigsten der uns später begegnenden Differentialien abzuleiten, wollen wir zunächst einige allgemeine Angaben, welche uns dabei dienen werden.

I. Ist die Funktion von x , der y gleich ist, eine Summe mehr Glieder, so ist dy gleich der Summe der Differentialien der einzelnen Glieder und der Differentialquotient der Summe gleich der Summe der Differentialquotienten der einzelnen Glieder. Es folgt das unmittelbar aus den Eigenschaften der Summe, nach welchem die Veränderung einer Summe gleich der Summe der Veränderungen der einzelnen Summanden.

Hieraus folgt sofort, daß wenn in dieser Summe ein Glied vorkommt, welches konstant ist, also sich nicht ändert, wenn x sich ändert, oder ein Glied in dem Differential nicht vorkommt, oder wie man sich kurz ausdrückt, das Differential einer konstanten Gröfse ist gleich Null.

Ist z. B.

$$y = ax^2 + b,$$

so ist

$$y + dy = a(x + dx)^2 + b$$

$$dy = a(x + dx)^2 + b - ax^2 - b = 2axdx.$$

II. Ist y gleich dem Produkte zweier Funktionen von x , so erhalten wir allgemein das Differential in folgender Weise. Seien die beiden Funktionen mit u und v bezeichnet, also $y = u \cdot v$. Wenn sich dann x um dx ändert, wird u in $u + du$ und v in $v + dv$ verwandelt, es wird also

$$y + dy = (u + du)(v + dv) = uv + u dv + v du + du dv.$$

Da nun auch hier das letzte Glied wieder verschwindend klein ist, so wird

$$dy = u dv + v du; \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}.$$

Es ist somit jede Funktion mit dem Differential resp. dem Differentialquotienten der andern Funktion zu multiplicieren und diese Produkte sind zu addieren.

III. Aus dem soeben abgeleiteten Satze erhalten wir auch unmittelbar das Differential oder den Differentialquotienten eines Quotienten zweier Funktionen. Ist

$$y = \frac{u}{v},$$

so können wir auch setzen

$$y \cdot v = u$$

$$y dv + v dy = du,$$

somit wird

$$dy = \frac{du - y dv}{v}$$

und ersetzen wir auf der rechten Seite wieder y durch seinen Wert

$$dy = \frac{du - \frac{u}{v} dv}{v} = \frac{v du - u dv}{v^2}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Das Differential, resp. der Differentialquotient eines Quotienten ist gleich dem Produkte aus dem Nenner und dem Differential resp. Differentialquotienten des Zählers, minus dem Produkte aus Zähler und dem Differential resp. Differentialquotienten des Nenners, die Differenz dividiert durch das Quadrat des Nenners.

Wir werden diese Sätze, wenn wir später darauf hinweisen, stets mit E I, E II, E III bezeichnen.

Differentiale der wichtigsten Funktionen.

Wir leiten jetzt die Differentiale der Funktionen, welche uns vorzugsweise bei unseren physikalischen Untersuchungen vorkommen werden, kurz ab.

Um das Differential einer Potenz

$$y = x^n$$

zu erhalten, haben wir nur $(x + dx)^n$ nach dem binomischen Satze zu entwickeln

$$(x + dx)^n = x^n + nx^{n-1} dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \dots$$

Unter Beachtung, daß alle höheren Potenzen von dx gegen die erste zu vernachlässigen sind, wird

$$1 \dots \dots \dots dy = nx^{n-1} dx; \quad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}.$$

Da der binomische Satz für jeden beliebigen Wert von n , positiv oder negativ, ganz oder gebrochen gilt, so gilt dieser Differentialausdruck ebenfalls für jeden Wert von n .

Das Differential des Ausdrucks

$$y = \log x$$

erhalten wir durch Entwicklung von $\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$ in eine Reihe, denn es ist

$$dy = \log(x + dx) - \log x = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right).$$

Ist der Logarithmus ein natürlicher, der auf die Grundzahl $e = 2,71828 \dots$ bezogen ist, so ist

$$\log\left(1 + \frac{dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \frac{dx^2}{x^2} + \frac{1}{3} \frac{dx^3}{x^3} - \dots + \dots$$

Ist der Logarithmus in einem andern System genommen, so muß die Reihe auf der rechten Seite mit dem in diesem System genommenen $\log e$ multipliziert werden. Es folgt dann ganz allgemein

$$2 \dots \dots \dots dy = d \log x = \frac{dx}{x} \cdot \log e; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log e.$$

Aus dem Differential des Logarithmus erhalten wir sofort das Differential der Exponentialfunktion

$$y = a^x.$$

Es ist

$$\log y = x \cdot \log a$$

$$\log(y + dy) = (x + dx) \log a$$

$$\frac{dy}{y} \cdot \log a = dx \log a, \quad \therefore$$

somit

$$3 \dots \dots dy = y \cdot dx \frac{\log a}{\log e} = a^x dx \frac{\log a}{\log e}; \quad \frac{dy}{dx} = a^x \frac{\log a}{\log e}.$$

Wird $a = e$ gleich der Basis des natürlichen Logarithmensystems gesetzt, so wird

$$3a \dots \dots \dots dy = e^x dx \quad \frac{dy}{dx} = e^x.$$

Der Differentialquotient der Exponentialfunktion mit der Basis e ist somit der Funktion selbst gleich.

Für das Differential der trigonometrischen Funktion

$$y = \sin x$$

erhalten wir zunächst

$$\begin{aligned} dy &= \sin x \cos dx + \cos x \sin dx - \sin x \\ &= \sin x (\cos dx - 1) + \cos x \sin dx. \end{aligned}$$

Für ein verschwindendes dx ist nun $\cos dx = 1$ und $\sin dx$ gleich dem Bogen dx selbst zu setzen, damit wird

$$4 \dots \dots \dots dy = d \sin x = \cos x \cdot dx; \quad \frac{dy}{dx} = \cos x.$$

Ganz in derselben Weise wird

$$5 \dots \dots \dots dy = d \cos x = - \sin x \cdot dx; \quad \frac{dy}{dx} = - \sin x.$$

Die Differentiale von $y = \tan x$ erhalten wir durch Anwendung des Satzes E III. Wir schreiben

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$dy = \frac{\cos x \, d \sin x - \sin x \, d \cos x}{\cos^2 x}$$

$$6 \dots dy = d \tan x = \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) dx}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Ganz in derselben Weise erhält man

$$7 \dots \dots \dots dy = d \cot x = - \frac{dx}{\sin^2 x}; \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Aus den Differentialen der trigonometrischen Funktionen ergeben sich auch sofort jene der cyklometrischen Funktionen. Ist nämlich

$$y = \sin x,$$

so ist

$$x = \arcsin(y).$$

Die Zunahme des Bogens x , wenn der Sinus um dy wächst, ergibt sich nun aus (4)

$$dy = \cos x \, dx$$

$$dx = \frac{dy}{\cos x} = \frac{dy}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Setzen wir also, um das Zeichen x für die gegebene willkürlich veränderliche GröÙe beizubehalten

$$y = \arcsin(x),$$

so wird

$$8 \dots \dots dy = d \arcsin(x) = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Ebenso wird

$$9 \dots dy = d \arccos(x) = - \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}; \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$10 \dots dy = d \arctan(x) = \frac{dx}{1 + x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$11 \dots dy = d \operatorname{arccot}(x) = - \frac{dx}{1 + x^2}; \quad \frac{dy}{dx} = - \frac{1}{1 + x^2}.$$

Bei einem Hinweis auf die hier entwickelten Ausdrücke werden wir dieselben stets mit E 1, E 2 bezeichnen.

Differentiation zusammengesetzter Funktionen.

Es wird uns mehrfach der Fall vorkommen, daß die Funktionen, zu denen wir bei den physikalischen Untersuchungen gelangen, zusammengesetzte sind, daß also innerhalb des Funktionszeichens \log , \sin , etc. selbst noch wieder eine Funktion steht. Sei uns also z. B. der Ausdruck gegeben $y = \log u$, und sei nun u wieder eine Funktion von x , etwa gleich $\sin x$. Wir erhalten dann zunächst unter Beachtung, daß jedenfalls y um dy wächst, wenn u um du zunimmt, nach E 2

$$dy = \log e \frac{du}{u}.$$

Die Zunahme von $u = \sin x$ oder du , wenn x um dx wächst, ist dann nach E 4

$$du = \cos x \, dx;$$

setzen wir diesen Wert von du in die Gleichung für dy ein, so wird

$$dy = \log e \frac{\cos x}{\sin x} \, dx; \quad \frac{dy}{dx} = \log e \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Da nun

$$\log e \cdot \frac{1}{\sin x} = \frac{dy}{du}; \quad \cos x = \frac{du}{dx},$$

so ist der für $\frac{dy}{dx}$ erhaltene Ausdruck gleich

$$\text{IV} \dots \dots \dots \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Wir leiten daraus die allgemeine Regel ab, die wir bei späterer Benutzung stets mit E IV bezeichnen, daß wir bei solchen zusammengesetzten Funktionen zunächst den Differentialquotienten so zu bilden haben, als wenn die Funktion u eine einfache veränderliche GröÙe wäre, und dann diesen Quotienten mit dem Differentialquotienten der Funktion u nach x multiplicieren müssen. Da nun das Differential eines Ausdrucks gleich ist dem Differentialquotienten multipliciert mit dem Differential der gegebenen veränderlichen GröÙe, so wird

$$dy = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx.$$

Unter Anwendung dieser Regel erhalten wir z. B. sofort

$$\frac{da^{\sqrt{x}}}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Denn setzen wir zunächst

$$y = a^{\sqrt{x}} = a^u,$$

so ist nach E 3

$$\frac{dy}{du} = \frac{\log a}{\log e} a^u.$$

Da nun $u = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, so ist nach E 1

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

somit

$$\frac{dy}{dx} = \frac{da\sqrt{x}}{dx} = \frac{\log a}{\log e} a^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Differentiation von Funktionen mit mehreren Veränderlichen.

Bisher haben wir vorausgesetzt, daß wir nur zwei veränderliche Größen haben, eine x , der wir willkürlich jeden Wert beilegen können, und die zweite y , welche als Funktion von x bestimmt wird. Wenn auch vorwiegend, so kommen uns später doch nicht lediglich solche einfachere Gleichungen zur Behandlung; in manchen Fällen hängt die zu bestimmende Größe von zwei oder drei Größen ab, die wir willkürlich ändern können. So z. B. werden wir später finden, daß der Raum, den eine gegebene Quantität eines Gases ausfüllt, abhängig ist von dem Drucke, unter welchen wir dasselbe bringen, und von der Temperatur, welche wir demselben erteilen. Wir können Druck und Temperatur beliebig wählen; erst wenn beide gegeben sind, ist das Volumen des Gases bestimmt. Sei nun wieder die zu bestimmende Größe gleich y gesetzt, und dieselbe durch die beiden willkürlich zu ändernden Größen x und z bestimmt. Der allgemeine Ausdruck dieser Abhängigkeit ist dann

$$y = f(x, z).$$

Nach dem Begriffe des Differentials ist dann

$$dy = f(x + dx, z + dz) - f(x, z).$$

Die so eintretende Änderung von y können wir auch als die Summe der beiden Änderungen auffassen, wenn sich erstens nur x um dx ändert, während z konstant bleibt, und sich zweitens z um dz ändert, wenn x konstant bleibt, also setzen

$$dy = \{f(x + dx, z) - f(x, z)\} + \{f(x, z + dz) - f(x, z)\}$$

Die in der ersten Klammer eingeschlossenen Glieder sind das Differential von y , wenn es nur eine Funktion von x wäre, die in der zweiten dasjenige, wenn es nur eine Funktion von z wäre. Da wir nun das Differential einer Funktion auch als das Produkt des Differentialquotienten in das Differential der veränderlichen Größe schreiben können, so schreibt man

$$f(x + dx, z) - f(x, z) = \frac{\partial y}{\partial x} \cdot dx; \quad f(x, z + dz) - f(x, z) = \frac{\partial y}{\partial z} dz,$$

worin man das Zeichen ∂ anstatt d wählt, um anzudeuten, daß bei Bildung dieses Differentialquotienten nur die Größe als veränderlich betrachtet wird, deren Differential im Nenner steht. Man nennt die so gebildeten Differentialquotienten die partiellen Differentialquotienten jedesmal nach der Größe, die bei Bildung derselben als veränderlich genommen wird. Für das

Differential dy , das sogenannte totale Differential der Funktion erhalten wir dann

$$V \dots \dots \dots dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz.$$

Die Regel zur Berechnung dieses Differentials ist somit folgende: Wir berechnen zunächst die Differentiale der Funktion, wie wenn jedesmal nur eine der veränderlichen Größen veränderlich wäre, und addieren dann diese einzelnen Differentiale zusammen.

Ganz dieselbe Regel liefert uns, wie man durch die gleichen Überlegungen erkennt, das Differential einer Funktion von drei Veränderlichen. Sei

$$r = f(x, y, z),$$

so ist

$$VI \dots \dots \dots dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy + \frac{\partial r}{\partial z} dz.$$

Um nach dieser Regel ein Beispiel durchzuführen, sei

$$y = \sqrt{x^2 + z^2} = (x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach E IV setzen wir zunächst $x^2 + z^2 = u$, dann wird zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dy}{du} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Da nun bei dieser Differentiation in u nur x veränderlich, z als konstant zu betrachten ist, so ist $\partial u = 2x \partial x$, somit

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x.$$

Ganz ebenso wird

$$\frac{\partial y}{\partial z} = (x^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} z$$

und darnach

$$dy = \frac{x dx + z dz}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Es wird hiernach nicht nötig sein noch ein specielles Beispiel für eine Funktion aus drei Veränderlichen zu berechnen, da die einzelnen Rechnungen genau dieselben sind, wie bei den Funktionen mit zwei Veränderlichen.

Zweiter Differentialquotient.

Schließlich haben wir noch zu erwähnen, daß in vielen Fällen außer dem bisher besprochenen Differential und Differentialquotienten, welche man als erste bezeichnet, noch die zweiten Differentiale und Differentialquotienten von Funktionen bei unseren Untersuchungen vorkommen werden. Das zweite Differential ist in folgender Weise definiert. Das erste Differential einer Funktion von einer Veränderlichen erhielten wir durch die Gleichung

$$y + dy = f(x + dx).$$

Setzen wir jetzt $y + dy = y_1$ und lassen jetzt x noch einmal um dieselbe GröÙe dx wachsen, so wird

$$y_1 + dy_1 = f(x + 2dx).$$

Die beiden Zunahmen dy_1 und dy sind nun im allgemeinen verschieden, und ihre Differenz

$$dy_1 - dy = d^2y$$

nennt man das zweite Differential der Funktion; dasselbe ergibt sich durch Ausführung der hier angedeuteten Rechnungen

$$d^2y = \{f(x + 2dx) - f(x + dx)\} - \{f(x + dx) - f(x)\}.$$

Als zweiten Differentialquotienten bezeichnet man dann den Quotienten aus dem zweiten Differential und dem Quadrate von dx .

Wir bemerken hier gleich, daß die Werte dy_1 und dy nur um eine GröÙe verschieden sein können, welche gegen die Veränderungen dy_1 und dy selbst verschwindend klein sein muß, oder die zweiten Differentiale sind gegen die ersten verschwindend klein. Daraus folgt dann, daß der zweite Differentialquotient, der Quotient aus dem zweiten Differential und dem gegen dx selbst verschwindend kleinen dx^2 wieder einen endlichen Wert hat.

Anstatt das zweite Differential und den zweiten Differentialquotienten aus der Funktion selbst abzuleiten, können wir auch von dem ersten Differential oder Differentialquotienten ausgehen; das zweite Differential ist das erste des ersten Differentials und der zweite Differentialquotient einer Funktion ist der erste des ersten Differentialquotienten. Setzen wir den ersten Differentialquotienten der Funktion gleich $f'(x)dx$, so daß

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad dy = f'(x)dx,$$

so ist

$$d^2y = f'(x + dx)dx - f'(x)dx = df'(x)$$

und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{df'(x)}{dx}.$$

Es ergibt sich das aus folgender Überlegung. Die Gleichung $dy = f'(x)dx$ gibt uns für jeden beliebigen Wert, den wir für x einsetzen, die Zunahme des Wertes y , wenn wir in der gegebenen Funktion anstatt x den Wert $x + dx$ einsetzen. Setzen wir deshalb in die Gleichung, welche uns dy liefert, den Wert $x + dx$ ein, so erhalten wir die Zunahme, welche der Wert von y erhält, wenn wir in der ursprünglichen Funktion von $x + dx$ aus nochmals um dieselbe GröÙe dx fortschreiten, also den Wert, den wir vorhin mit dy_1 bezeichneten. Die Differenz dieses Wertes gegenüber dy ist es aber, die wir vorhin als das zweite Differential definierten.

Ein einfaches Beispiel läßt uns die Richtigkeit dieser Überlegung unmittelbar erkennen. Es sei $y = \sin x$, so ist nach E 4

$$dy = \cos x dx,$$

ferner ist

$$dy_1 = \sin(x + 2dx) - \sin(x + dx) = \sin((x + dx) + dx) - \sin(x + dx).$$

Letzteres ist aber

$$dy_1 = \cos(x + dx) dx.$$

Somit wird

$$d^2y = dy_1 - dy = \cos(x + dx) dx - \cos x dx.$$

Dieser Ausdruck ist aber nichts Anderes als das Differential von $\cos x dx$, dem ersten Differential von $\sin x$. Es wird demnach

$$d^2y = -\sin x dx^2; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x.$$

Wir erhalten daher als Regel VII: zur Berechnung eines zweiten Differentials oder Differentialquotienten haben wir nur die ersten Differentiale oder Differentialquotienten einer Funktion gerade so zu behandeln, wie die Funktion selbst zur Bildung der ersten Differentiale.

Diese Regel liefert uns auch das zweite Differential einer Funktion von zwei Veränderlichen. Für das erste Differential einer solchen erhielten wir

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx + \frac{\partial y}{\partial z} dz = M dx + N dz,$$

wenn wir die partiellen Differentialquotienten mit M und N bezeichnen. Bei der Berechnung des zweiten Differentials ist nur darauf zu achten, daß im allgemeinen sowohl M als N Funktionen von x und z sind. Dann erhalten wir in Ausführung der Regel VII nach E V und unter Beachtung des Satzes E I

$$d^2y = \left(\frac{\partial M}{\partial x} dx + \frac{\partial M}{\partial z} dz \right) dx + \left(\frac{\partial N}{\partial x} dx + \frac{\partial N}{\partial z} dz \right) dz$$

$$d^2y = \frac{\partial M}{\partial x} dx^2 + \frac{\partial M}{\partial z} dz dx + \frac{\partial N}{\partial x} dx dz + \frac{\partial N}{\partial z} dz^2.$$

In diesem Ausdrucke ist stets

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

denn M ist der erste partielle Differentialquotient nach x , N derjenige nach z . Bilden wir nun von M den partiellen Differentialquotienten nach z , so heißt das, wir lassen jetzt das bei der ersten Differentiation als konstant betrachtete z sich ändern; es ist also der Differentialquotient von M nach z die Funktion, die entsteht, wenn wir erst x und dann in der so entstandenen Funktion sich z ändern lassen. Bei der Bildung des Differentialquotienten von N nach z haben wir genau dasselbe nur in umgekehrter Reihenfolge gethan. Die Reihenfolge, in welcher wir die willkürlich veränderlichen Größen sich ändern lassen, kann aber auf das schließliche Resultat keinen Einfluß haben. Ein Beispiel läßt die Richtigkeit dieser Folgerung sofort erkennen; setzen wir

$$y = x^n \cdot \sin z,$$

so ist nach E V

$$dy = nx^{n-1} \sin z dx + x^n \cos z dz,$$

somit

$$M = nx^{n-1} \sin z, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = nx^{n-1} \cos z$$

$$N = x^n \cos z, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = nx^{n-1} \cos z = \frac{\partial M}{\partial z}.$$

In dem zur Erläuterung der Regel V gerechneten Beispiel war

$$dy = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} dx + \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} dz.$$

Auch hier wird

$$\frac{\partial \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}}{\partial z} = \frac{\partial \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}}{\partial x} = -\frac{x \cdot z}{(x^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Hieraus ergibt sich dann, daß wenn uns ein Ausdruck von der Form

$$dy = Mdx + Ndz$$

gegeben ist, in welchem M und N irgend welche Funktionen von x und z sind, derselbe nur dann das erste Differential irgend einer Funktion

$$y = f(x, z)$$

ist, wenn die Differentialquotienten $\frac{\partial M}{\partial z}$ und $\frac{\partial N}{\partial x}$ einander gleich sind. Ist das nicht der Fall, so ist der Ausdruck nicht das vollständige Differential einer Funktion, das heißt, es gibt keine Funktion von x und z , durch deren Differentiation jener Ausdruck entstanden ist.

Integration.

Bei den physikalischen Untersuchungen kommt uns sehr häufig der Fall vor, daß die Beobachtungen uns nicht sofort die Beziehung zwischen den eine Erscheinung bedingenden Größen liefern, daß wir vielmehr nur die Differentiale oder Differentialquotienten der gesuchten Beziehungen erhalten. Wir finden so Ausdrücke von der Form

$$dy = ax dx; \quad dy = a \cdot \sin x dx,$$

und manche andere. Ganz besonders oft kommt das vor, wenn wir aus einem durch die Erfahrung uns gegebenen Gesetze durch Deduktion die Gesetze anderer Erscheinungen ableiten wollen. In den meisten Fällen können wir für die aus dem bekannten Gesetze weiter abzuleitenden Beziehungen aus diesem Gesetze nur die Differentiale oder Differentialquotienten angeben, und es handelt sich dann für uns darum, aus diesen Differentialausdrücken die Gleichung zwischen den veränderlichen Größen aufzusuchen. Man bezeichnet dieses Verfahren als Integration, und nennt den Ausdruck, welcher durch Differentiation auf den gegebenen Differentialausdruck führt, das Integral des letztern. Man bezeichnet das Integral eines gegebenen Differentialausdrucks durch ein vorgesetztes Summenzeichen \int , so daß also, wenn der Ausdruck etwa

$$dy = ax dx$$

gegeben ist,

$$y = \int ax dx$$

gesetzt wird; es wird also angedeutet, daß y das Integral des unter dem betreffenden Summenzeichen stehenden Differentialausdruckes ist.

Dem Integralausdruck können wir eine doppelte Bedeutung beilegen, deren eine uns das Integral als eine Summe erkennen läßt, wodurch zugleich die Bezeichnung des Integrals durch ein Summenzeichen gerechtfertigt ist.

Die erste Bedeutung ist die eben erwähnte, das Integral eines Differentialausdrucks ist jene Funktion, welche durch Differentiation den gegebenen Differentialausdruck liefert. Wir wissen nun z. B., daß das Differential $dy = ax$ durch Differentiation des Ausdruckes $y = \frac{1}{2} ax^2$ entsteht, somit erhalten wir

$$\frac{1}{2} ax^2 = \int ax \, dx.$$

Indes ist dabei zu beachten, daß nach E I bei der Differentiation einer Summe, von der ein oder mehrere Glieder konstante, nicht mit x sich ändernde Größen sind, diese Größen verschwinden; wir können daher nicht wissen, ob die Funktion, durch deren Differentiation unser gegebenes Differential entstanden ist, oder entstanden gedacht werden kann, nicht einen konstanten Summand enthielt. Gehen wir nun vom Differential zum Integral über, so müssen wir aus diesem Grunde immer zu der Funktion eine Konstante addieren, deren Wert allerdings, so lange uns nichts Anderes als das Differential gegeben ist, durchaus unbestimmt ist, ja jeder beliebiger sein kann. Wir müssen also als das Integral der Funktion $dy = ax \, dx$ schreiben

$$\int ax \, dx = \frac{1}{2} ax^2 + C,$$

worin C also eine jede beliebige konstante, das heißt mit x sich nicht ändernde Größe sein kann.

Den so vervollständigten Integralausdruck des Differentials nennt man dessen unbestimmtes Integral.

Um dann den Wert unserer Funktion für jedes gegebene x in der That angeben zu können, muß man den Wert derselben für irgend einen Wert von x auf andere Weise bestimmen können. Wissen wir z. B., daß für den Wert $x = 0$ die Funktion den Wert b annimmt, so folgt $C = b$, und unsere Funktion wird

$$y = \frac{1}{2} ax^2 + b.$$

Durch die so erfolgte Festsetzung des Wertes der Konstanten wird unsere Funktion eine bestimmte, das heißt sie gibt uns jetzt für jeden Wert, den wir der veränderlichen Größe x beilegen, einen ganz bestimmten Wert von y .

Das an diesem Beispiel Gezeigte gilt selbstverständlich allgemein; ist

$$d\varphi(x) = f(x) \, dx,$$

so ist

$$\int f(x) \, dx = \varphi(x) + C.$$

Die zweite Bedeutung des Integrals ist die einer Summe von Differentialen. Wie wir sahen ist das Differential einer Funktion der Unterschied der beiden Werte derselben, wenn die veränderliche Größe von einem Werte x um dx zunimmt. Den Wert, welchen die Funktion für irgend einen Wert x_n annimmt, können wir dann als die Summe bezeichnen des Wertes, welchen die Funktion für irgend einen kleinern Wert von x , etwa x_0 besitzt, und aller der Differentiale, welche wir erhalten, wenn x jedesmal durch Hinzufügen um dx allmählich von x_0 bis x_n zunimmt. Denn setzen wir der Einfachheit wegen $x_1 = x_0 + dx$, $x_2 = x_0 + 2dx \dots x_n = x_0 + ndx$ und die den Werten $x_0, x_1 \dots x_n$ entsprechenden Werte der Funktion $y_0, y_1 \dots y_n$, so ist, wenn wir $y_0 = \frac{1}{2} ax_0^2 + C$ setzen,

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + dy = y_0 + ax_0 dx \\ y_2 &= y_1 + dy_1 = y_1 + ax_1 dx = y_0 + ax_0 dx + ax_1 dx \\ &\vdots \\ y_n &= y_{n-1} + dy_{n-1} = y_{n-1} + ax_{n-1} dx = y_0 + ax_0 dx + ax_1 dx \cdots ax_{n-1} dx, \\ \text{oder es ist} \end{aligned}$$

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x_n} a x dx,$$

worin also das Integralzeichen ein eigentliches Summenzeichen ist, das heißt es muß die Summe aller der Differentialausdrücke gebildet werden, wenn wir in dem Differentialausdruck nach und nach für x alle Werte zwischen $x = x_0$ und $x = x_n$ einsetzen, wie wir deren oben einige hingeschrieben haben. Diese so von einem bestimmten untern Werte x_0 , der untern Grenze des Integrals, bis zu einem bestimmten obern Werte, der obern Grenze gebildete Summe, nennt man das bestimmte Integral des Differentials zwischen den Grenzen x_0 und x_n .

Wie die obige Entwicklung zeigt, ist dieses bestimmte Integral nichts Anderes als die Differenz der Werte, welche die Funktion, deren Differential unter dem Integralzeichen steht, annimmt, wenn wir in derselben einmal der Veränderlichen den durch die obere Grenze bestimmten Wert, das andere Mal den durch die untere Grenze bestimmten Wert beilegen. Denn aus der letzten Gleichung folgt

$$\int_{x_0}^{x_n} a x dx = y_n - y_0 = \frac{1}{2} a x_n^2 - \frac{1}{2} a x_0^2.$$

Dadurch, daß das bestimmte Integral die Differenz zweier Werte der Funktion ist, fällt die in dem unbestimmten Integral vorhandene Konstante heraus, da sie im Minuend und Subtrahend dieselbe ist.

Auch das hier Entwickelte gilt ganz allgemein, was wohl keines weiteren Beweises bedarf; ist

$$f(x) dx = d\varphi(x),$$

so ist stets

$$\text{VIII} \dots \dots \dots \int_{x_0}^{x_n} f(x) dx = \varphi(x_n) - \varphi(x_0).$$

Wir können darnach den Wert des bestimmten Integrals immer angeben, wenn wir das unbestimmte Integral kennen.

Das Integral eines gegebenen Differentialausdruckes können wir nicht durch eine bestimmte Methode der Rechnung erhalten, wie wir den Differentialausdruck aus der Funktion ableiten. Wirklich integrieren, das heißt eine geschlossene Integralfunktion für dieselben angeben, können wir nur solche Differentialausdrücke, welche vollständige Differentiale einer Funktion sind. Die Integralrechnung lehrt nun die Methoden, durch welche wir er-

kennen können, ob ein gegebener Ausdruck ein vollständiger Differentialausdruck ist, oder durch welche wir ihn in einen solchen verwandeln können. Wir gehen auf diese Methoden nicht ein, sondern werden, wo es etwa nötig ist, in den speciellen Fällen die erforderlichen Rechnungen machen. Nur bemerken wir hier, daß wenn wir die vorhin entwickelten Differentialausdrücke vorfinden, wir stets sofort deren Integrale angeben können, da uns die Funktionen bekannt sind, durch deren Differentiation sie entstanden sind. So ist

$$\text{nach E 1 } x^n dx = d \frac{1}{n+1} x^{n+1}, \text{ also } \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\text{nach E 2 } \frac{dx}{x} \log e = d \log x, \text{ also } \int \frac{dx}{x} \log e = \log x + C.$$

Sind die Logarithmen, mit denen wir rechnen, natürliche, so ist

$$\frac{dx}{x} = d \log x, \text{ also } \int \frac{dx}{x} = \log x + C;$$

$$\text{nach E 3 } \frac{\log a}{\log e} a^x dx = da^x, \text{ also } \int \frac{\log a}{\log e} a^x dx = a^x + C$$

und so weiter; es wird nicht nötig sein, die einzelnen Integralausdrücke hinzuschreiben.

Erster Teil.

Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper.

Erster Abschnitt.

Die Lehre von dem Gleichgewicht und der Bewegung der Körper als solcher.

Erstes Kapitel.

Von der fortschreitenden Bewegung der Körper.

§ 1.

Bewegung. Die erste Thatsache, welche uns bei der Betrachtung der Außenwelt auffällt, ist die, daß einige Körper ihren Ort im Raume, soweit wir es beurteilen können, stets behaupten, andere ihn verändern. Von den ersteren sagen wir, sie seien in Ruhe, von den letzteren, sie seien in Bewegung. Bei den Bewegungen erkennen wir dann sehr bald einen Unterschied, indem einige Körper in einer bestimmten Zeit einen größeren Weg zurücklegen als andere. Den ersteren legen wir dann eine größere, den letzteren eine kleinere Geschwindigkeit bei. Als Geschwindigkeit einer Bewegung bezeichnen wir somit die Beziehung zwischen dem durchlaufenen Wege und der Zeit, in welcher er durchlaufen ist.

Einen weiteren Unterschied in der Bewegung nehmen wir wahr, wenn wir die in gleichen auf einander folgenden Zeiten zurückgelegten Wege mit einander vergleichen. Die einen legen in gleichen Zeiten immer die gleiche Anzahl Meter zurück. Bilden wir dort das Verhältnis zwischen dem in irgend einer Anzahl t Sekunden zurückgelegten Wege s und dieser Zahl von Sekunden, $\frac{s}{t}$, so ist der Wert desselben immer der gleiche. Solche Körper besitzen demnach, da die Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege und der Zeit, in welcher derselbe zurückgelegt ist, immer dieselbe ist, eine konstante Geschwindigkeit. Man nennt die Bewegung eine gleichförmige. Für diese Bewegung erhalten wir auch sofort ein Maß der Geschwindigkeit eben in dem konstanten Verhältnis zwischen Weg und Zeit

$$c = \frac{s}{t}.$$

Man sieht weiter, daß dieser Quotient die Strecke ist, welche der Körper in der Zeit einer Sekunde zurücklegt, so daß wir die Geschwindigkeit des Körpers als die in der Zeit einer Sekunde zurückgelegte Wegestrecke bezeichnen können. Der in irgend einer Zeit zurückgelegte Weg s ist dann

$$s = c \cdot t.$$

Andere Körper bewegen sich ungleichförmig, das heisst, beobachten wir den jedesmal in t Sekunden aber zu verschiedenen Zeiten zurückgelegten Weg s , so finden wir, dass der Quotient

$$\frac{s}{t}$$

zu den verschiedenen Zeiten der Bewegung einen verschiedenen Wert hat; bei einigen Bewegungen wächst dieser Quotient, bei andern nimmt derselbe ab. Erstere Bewegungen nennt man beschleunigte, letztere verzögerte. Man kann deshalb bei solchen Bewegungen von einer bestimmten Geschwindigkeit nur für einen bestimmten Augenblick sprechen. Als diese Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke bezeichnet man dann jene, mit welcher der Körper sich nach der vorherigen Definition weiter bewegen würde, wenn seine Bewegung von diesem Augenblicke ab eine gleichförmige würde. Können wir also bei der Untersuchung einer nicht gleichförmigen Bewegung bewirken, dass von einem bestimmten Augenblicke ab die Änderung der Geschwindigkeit aufhört, so haben wir nur in der dann gleichförmigen Bewegung die in einer Sekunde zurückgelegte Strecke zu messen, um die Geschwindigkeit für den Augenblick zu erhalten, in welchem die Bewegung gleichförmig wurde.

Auch für die ungleichförmige Bewegung lässt sich für die Geschwindigkeit gemäß der vorhin gegebenen Definition, dass dieselbe der Quotient aus Weg und Zeit sei, ein mathematischer Ausdruck ableiten, wenn wir wissen, wie der Weg mit der Zeit wächst, wenn wir also den zurückgelegten Weg als Funktion der Zeit kennen. Nehmen wir an, der Körper habe zur Zeit t den Weg s zurückgelegt, und in der Zeit von t_1 Sekunden, die grösser sein möge als die erste, den Weg s_1 . In der Zeit $t_1 - t$ hat er dann den Weg $s_1 - s$ zurückgelegt, und der Quotient

$$\frac{s_1 - s}{t_1 - t}$$

gibt uns die Strecke, welche der Körper in der Sekunde zurückgelegt haben müsste, um mit gleichförmiger Bewegung in derselben Zeit $t_1 - t$ denselben Weg zurückzulegen, den er in Wirklichkeit zurückgelegt hat. Man nennt diese Geschwindigkeit die mittlere Geschwindigkeit während der Zeit $t_1 - t$. Diese mittlere Geschwindigkeit hat der Körper einmal in der Zeit $t_1 - t$ besessen, vor dem Augenblicke aber, wo er dieselbe besaß, war die Geschwindigkeit, wenn wir die Bewegung als eine beschleunigte voraussetzen, kleiner, nach derselben war sie grösser. Von allen den in der Zeit $t_1 - t$ vorkommenden Geschwindigkeiten unterscheidet sich nun diese mittlere Geschwindigkeit um so weniger, je kleiner die Zeit und der Weg ist, aus welcher wir dieselbe ableiten. Bilden wir deshalb für die denkbar kleinste Zeit $t_1 - t = dt$ und den in dieser verschwindend kleinen Zeit zurückgelegten Weg ds den Quotienten

$$v = \frac{ds}{dt},$$

so ist die berechnete Geschwindigkeit v , welche die mittlere für die Zeit dt ist, von derjenigen, die zur Zeit t vorhanden ist, nicht mehr verschieden, wenn wir die Zeit dt eben kleiner als jede angebbare Grösse annehmen; mit

anderen Worten, wenn wir jenen Quotienten als den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit betrachten.

Wir können demnach bei der ungleichförmigen Bewegung die Geschwindigkeit als den Differentialquotienten des Weges nach der Zeit definieren. Ja diese Definition gilt ganz allgemein auch für die gleichförmige Bewegung, denn nach E 1 ist für die Funktion

$$s = ct,$$

welche die gleichförmige Bewegung definiert,

$$\frac{ds}{dt} = c = \frac{s}{t}.$$

Bei der ungleichförmigen Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke; das Verhältnis der Geschwindigkeitsänderung zu der Zeit, in welcher diese Änderung eintritt, nennt man die Beschleunigung der Bewegung. Der einfachste Fall der Geschwindigkeitsänderung ist dann der, daß die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten sich immer um dieselbe Größe ändert, daß sie also für die Zeiteinheit immer um dieselbe Größe zu- oder abnimmt. Wächst die Geschwindigkeit auf diese Weise in der Zeit t von v auf v_1 , so ist der Quotient

$$h = \frac{v_1 - v}{t}$$

konstant und gibt uns die Geschwindigkeitszunahme für die Sekunde; in diesem Falle ist also die Beschleunigung gleich der in jeder Sekunde stattfindenden Geschwindigkeitszunahme. Eine solche Bewegung nennt man eine gleichmäßig geänderte; eine gleichmäßig beschleunigte, wenn die Geschwindigkeit in dieser Weise zunimmt, eine gleichmäßig verzögerte, wenn sie abnimmt.

Aus dem Satze, daß die Geschwindigkeit der Differentialquotient des Weges nach der Zeit sei, können wir auch sofort ableiten, welches bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung die Beziehung zwischen dem zurückgelegten Wege und der Zeit ist. Nehmen wir an, der Körper bewege sich von der Ruhe aus sofort mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung, und seine Beschleunigung sei gleich h ; dann ist die Geschwindigkeit v zur Zeit t

$$v = ht.$$

Da nun

$$v = \frac{ds}{dt},$$

so ist

$$ds = htdt.$$

Der in der Zeit t zurückgelegte Weg ist die Summe aller Wege ds , die wir erhalten, wenn die Zeit von $t = 0$ an, jedesmal um dt , allmählich bis $t = t$ wächst, oder es ist s das bestimmte Integral

$$s = \int_0^t htdt.$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Differentialausdruck ist uns nach E 1 bekannt, er ist das Differential von $\frac{1}{2} h t^2$, somit ist

$$s = \frac{1}{2} h t^2 - \frac{1}{2} h o^2 = \frac{1}{2} h t^2,$$

oder der mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung in der Zeit t zurückgelegte Weg ist gleich der halben Beschleunigung multipliciert mit dem Quadrate der Zeit.

Ist die Änderung der Geschwindigkeit nicht immer in gleichen Zeiten dieselbe, so ist die Bewegung eine ungleichmäßig geänderte; bei einer solchen kann man von einer bestimmten Beschleunigung nur für einen bestimmten Augenblick sprechen, gerade wie man bei der ungleichförmigen Bewegung allgemein von einer bestimmten Geschwindigkeit nur für einen bestimmten Augenblick sprechen kann. Wir gelangen aber hier zu einer Definition der Beschleunigung durch die ganz gleiche Überlegung, wie sie uns vorher zur Definition der Geschwindigkeit führte. Ist dv die Geschwindigkeitszunahme in der Zeit dt , so ist $\frac{dv}{dt}$ die mittlere Beschleunigung in der Zeit dt . Diese mittlere Beschleunigung unterscheidet sich um so weniger von der wirklich innerhalb der Zeit dt in den verschiedenen Augenblicken derselben stattfindenden, je kleiner die Zeit dt ist, sie wird der wirklich in dem betrachteten Moment stattfindenden gleich, wenn wir dt als eine verschwindend kleine Zeit betrachten. Es folgt somit, daß die Beschleunigung bei einer ungleichförmigen Bewegung der Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der Zeit ist; da die Geschwindigkeit der erste Differentialquotient des Weges nach der Zeit ist, folgt gleichzeitig, daß wir die Beschleunigung auch als den zweiten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit definieren können. Die so definierte Beschleunigung ist dann die Geschwindigkeitszunahme, welche in einer Sekunde stattfinden würde, wenn die Geschwindigkeit in jedem der die Sekunde zusammensetzenden kleinen Zeitelemente dt um die gleiche Größe dv zunähme.

§ 2.

Kräfte. Die Erfahrung zeigt uns, daß die Materie beweglich ist, sie zeigt uns aber zugleich, daß kein in Ruhe befindlicher Körper seinen Ruhezustand ohne eine äußere Veranlassung, ohne einen äußern Antrieb verläßt. Ist ein Körper aber einmal in Bewegung, so zeigt uns die Erfahrung weiter, daß derselbe die ihm einmal erteilte Bewegung beibehält, bis sie wieder durch eine äußere Veranlassung, etwa einen dem frühern entgegengesetzten Antrieb abgeändert oder aufgehalten wird. Auf den ersten Blick scheint der letztere Satz der Wirklichkeit nicht zu entsprechen, denn wir sehen auf der Erde jede Bewegung allmählich zur Ruhe kommen. Betrachten wir indes die Bewegungen genauer, so finden wir bei jeder an der Erde stattfindenden Bewegung eine Reihe von äußeren Umständen, welche die Bewegung stören, wie der Widerstand der Luft, in welcher sich alles bewegen muß, die Reibung auf der Unterlage u. s. f.; je mehr wir diese Hindernisse der Bewegung beseitigen, um so weniger wird die Bewegung gestört, um so länger hält sie an. Werfen wir einen Körper über eine ebene horizontale Grundlage hin, so hört seine Bewegung um so eher auf, je rauher die Grundlage ist, indem der Körper gegen die verschiedenen

Unebenheiten anstößt. Nehmen wir eine möglichst glatte Fläche und rollen über diese eine Kugel fort, so dauert die Bewegung sehr viel länger, so daß wir schliessen dürfen, daß, wenn wir alle Widerstände fortnehmen, die Bewegung ohne Aufhören dauern würde. Eine solche ohne Ende fort-dauernde Bewegung materieller Massen sehen wir sogar in den Gestirnen, deren Bewegung seit 2000 Jahren, seitdem man ihre Bahnen beobachtet hat, sich nicht geändert hat. Es ergibt sich somit aus der Erfahrung, daß die Materie den ihr einmal gegebenen Bewegungszustand aus sich selbst niemals ändert; diese Eigenschaft nennt man die Trägheit der Materie.

Die äußeren Ursachen, welche den Bewegungszustand der Materie ändern, nennen wir Kräfte.

Um alles zu kennen, wodurch eine Kraft bestimmt wird, müssen wir ihren Angriffspunkt, ihre Richtung und ihre Grösse kennen.

Die Richtung einer Kraft erkennen wir aus der Richtung, nach welcher sie eine Materie in Bewegung setzt, die Richtung der Kraft fällt zusammen mit der Richtung, nach welcher sie die Materie, auf welche sie wirkt, hintreibt.

Die Grösse einer Kraft können wir strenge genommen nur durch die Grösse ihrer Wirkung, also durch die von ihr erzeugte Bewegung messen. Um aber dieses Maß anwenden zu können, müssen wir zunächst wissen, von welchen Umständen überhaupt die Bewegung eines Körpers abhängt. Zu dieser Untersuchung selbst ist es aber durchaus wünschenswert, schon ein Maß für die Kraft zu haben. Wir gelangen dazu durch folgende Überlegung. Zwei Kräfte müssen wir als gleich ansehen, wenn sie, an demselben Punkte angreifend, nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirkend, sich aufheben, das heisst keine Bewegung hervorbringen oder eine vorhandene Bewegung ungeändert lassen. Da man nun stets einer Kraft das Gleichgewicht halten kann, indem man an demselben Punkte in einer ihr entgegengesetzten Richtung ein Gewicht wirken läßt, so ist dieses Gewicht der Kraft gleich und ihr Maß. Man kann demnach die Grösse einer Kraft in Gewichten auswerten.

Welcher Art nun auch die Kräfte sind, aus welcher Quelle sie auch herrühren, man kann sie in zwei Klassen teilen; die einen wirken stets nach derselben Richtung und erfordern stets die gleiche Anzahl von Kilogrammen, um im Gleichgewicht gehalten zu werden, es sind die konstanten Kräfte. Die anderen können sich mit der Zeit nach Grösse und Richtung ändern, d. h. es bedarf, um sie im Gleichgewicht zu halten, zu verschiedener Zeit verschieden großer Gewichte, welche man nach verschiedenen Richtungen wirken läßt. Man nennt diese Kräfte veränderliche.

Es ist nun unsere Aufgabe zu untersuchen, wie die in § 1 betrachteten Bewegungen durch solche Kräfte erzeugt werden, wie also infolge der Wirkung einer Kraft sich die Körper bewegen. Wir verfahren zu dem Ende folgendermaßen: wir beobachten einige einfache Fälle der Bewegung und entwickeln deren experimentelle Gesetze; dann suchen wir aus diesen Gesetzen jene durch Abstraktion zu erhalten, welche uns allgemein angeben, wie Kräfte wirken, aus welchen also die experimentell gefundenen Gesetze sich durch Deduktion ableiten lassen. Dadurch erhalten wir die Theorie der Kräfte, und diese allgemeinen Sätze bieten uns die Grundlage für mathematischen Deduktionen, welche die theoretische Mechanik bilden.

§ 3.

Dasein und Richtung der Schwere. Das sich uns am häufigsten zeigende Beispiel einer fortschreitenden Bewegung ist das Niederfallen eines nicht unterstützten Körpers zur Erde; dies eignet sich daher am besten dazu, die Gesetze der Bewegung zu untersuchen. Alle Körper fallen, wenn sie nicht unterstützt sind, zur Erde nieder. Heben wir sie auf, so fühlen wir, daß sie das Bestreben haben zu fallen, indem es einer gewissen Anstrengung bedarf, sie am Fallen zu hindern. Wir nennen deshalb die Körper schwer und jene Kraft, welche sie zur Erde niedertreibt, die Schwere. Verschiedene Körper haben ein verschiedenes Bestreben zu fallen, sie üben auf ihre Unterlage einen verschiedenen Druck aus. Wir legen ihnen daher ein verschiedenes Gewicht bei, indem wir den Druck auf die Unterlage als Gewicht bezeichnen. Welche Einheit wir der Messung der Gewichte zu Grunde legen, haben wir in der Einleitung besprochen.

Die Richtung, in welcher die Schwere wirkt, läßt sich leicht durch einen einfachen Versuch bestimmen. Man befestigt einen schweren Körper, etwa eine Metallkugel, an einen Faden, der mit seinem andern Ende an irgend einem festen Punkte befestigt ist, und läßt die Kugel frei herabhängen. Eine Zeitlang schwingt die Kugel hin und her, dann hängt sie ruhig. Da sie nicht fällt, so folgt, daß eine der Schwere gleiche und gerade entgegengesetzte Kraft die Kugel hält; es ist dies die Festigkeit des gespannten Fadens. Die Richtung des Fadens gibt uns somit die Richtung der Schwere; man überzeugt sich ferner dadurch, daß man den Faden durchschneidet; denn die Kugel fällt dann in der Richtung des gespannten Fadens zu Boden.

Die Richtung der Schwere ist also an jedem Orte durch einen solchen mit einem Gewichte versehenen Faden, dem Lote oder Senkel gegeben; man nennt diese Richtung die lotrechte oder vertikale.

Hält man ein solches Lot über einer ruhenden Flüssigkeitsfläche, so findet man, daß es mit allen in der Ebene der Flüssigkeitsfläche durch seinen Fußpunkt gezogenen Linien einen rechten Winkel bildet, daß es also auf der Oberfläche der Flüssigkeit senkrecht steht. Man kann also die Richtung des Lots ebenso durch die Lage der Flüssigkeitsebene bestimmen; die Ebene der Flüssigkeit nennt man die horizontale.

§ 4.

Atwoods Fallmaschine. Um die Gesetze der Bewegung mit Hilfe der Schwerkraft zu untersuchen, genügt es nicht, einfach einen fallenden Körper zu beobachten. Denn einmal ist, wie sich jeder leicht überzeugt, die Fallgeschwindigkeit bald so groß, daß sie einer exakten Beobachtung sich entzieht, und andererseits bietet der freie Fall der Körper nur einen speciellen Fall von Bewegung, nämlich die Bewegung eines Körpers, der durch sein eigenes Gewicht bewegt wird. Man hat deshalb Apparate konstruiert, welche beiden Übelständen abhelfen, welche die Bewegung verlangsamten und in vieler Beziehung abändern lassen; einer der bequemsten Apparate dieser Art ist die Atwoodsche Fallmaschine, mit deren Hilfe daher die Gesetze der Bewegung untersucht werden sollen.

Das Princip dieser Maschine ist folgendes. Wenn man an einem voll-

an biegsamen Faden zwei ganz gleich schwere Körper befestigt und den Faden über eine leicht bewegliche Rolle führt, so halten sich die Gewichte genau das Gleichgewicht, es tritt keine Bewegung ein,

er der beiden Körper durch ein geringes gleiches Gewicht der

entgegen gezogen wird. Um System von Körpern, die bei- gewichte, den Faden und die in Bewegung zu setzen, bedarf er aufsern Kraft, die wir er-

indem wir auf den einen Körper Übergewicht legen. Die Gröfse

Übergewichtes, sowie die des zu bewegenden Körpers

die Dauer der Wirkung des gewichtes, können wir dann be- ändern. Die Einrichtung des

ates ist zu dem Zwecke folgende. auf einer massiven hölzernen mit

Schrauben versehenen Platte (4) befindet sich ein Holzpfiler

ungefähr 3 Meter Höhe. Auf feiler ist eine Platte horizontal

gt, und auf dieser ist ein mög- leicht gearbeitetes, aus 4 Spei-

und einem Radkranze bestehen- ad möglichst beweglich aufge-

Um seine Beweglichkeit zu n, ist die Axe des Rades

in feste Lager, sondern auf onsräder gelegt. Dieselben be-

aus zwei Systemen von Rä- P , D , welche, wie die Zeich- zeigt, sich kreuzen, und welche

ad A mit in Bewegung setzt. eibung des Rades ist dadurch

ermindert; wie man dieselbe unschädlich macht, werden wir

zeigen.

er Umfang des Rades hat eine

und in dieser ist über das

in Seidenfaden gelegt, an dessen

zwei genau gleiche Gewichte P und P^1 befestigt sind. Legt man dann

ein Übergewicht p , so sinkt P nach unten, P^1 steigt empor und das

System erhält eine gemeinschaftliche Bewegung. Die zu bewegenden

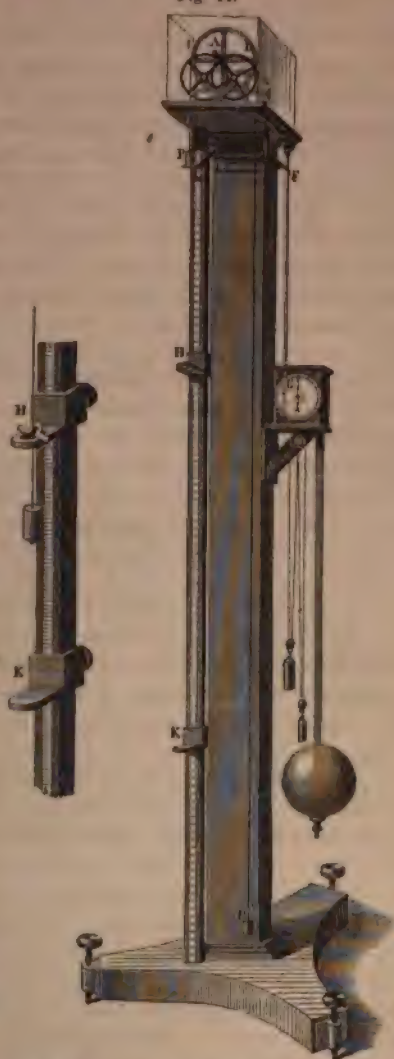
ite sind in diesem Falle $p + P + P^1$ und das Gewicht des Fadens und

olle. Sind die Speichen der Rolle hinreichend fein gearbeitet, so darf

annehmen, dafs das ganze Gewicht derselben im Radkranze vereinigt

Dann erhält aber dieses Gewicht, da die Rolle mitgedreht wird, und

Fig. 14.



die einzelnen Punkte derselben ebenso schnell bewegt werden als der Faden oder die Gewichte P , ganz dieselbe Bewegung wie die übrigen Teile des Systems. Bezeichnen wir das Gewicht der Rolle und des Fadens mit Π , so ist dann das Gewicht der zu bewegenden Körper $p + P + P^1 + \Pi$. Die Kraft, welche diese Gewichte in Bewegung setzt, ist das Übergewicht p . Es muß indes, um diese Kraft genau zu erhalten, von diesem Gewichte ein kleiner Teil π abgezogen werden, um die Reibung der Axe des Rades A zu überwinden. Wenn diese Reibung auch sehr klein ist, so ist sie doch nicht gleich Null, wie man wahrnimmt, wenn man das System ohne Übergewicht durch einen Anstoß in Bewegung setzt. Da auf das System dann keine äußere Kraft wirkt, müßte es, vermöge der Trägheit, in gleichförmiger Bewegung verharren. Man findet aber stets eine, wenn auch kleine Abnahme der Geschwindigkeit infolge der Reibung. Um die Bewegung vollständig gleichförmig zu machen, muß man dann auf das niedersinkende Gewicht ein kleines Übergewicht π legen, dessen Schwere gerade dazu hinreicht, um die Reibung zu überwinden. Um die Größe dieses Gewichtes π muß man daher bei Berechnung der das System bewegenden Kraft das Übergewicht p vermindern. Bequemer verfährt man indes so, daß man ein für allemal auf das niedersinkende Gewicht das zur Überwindung der Reibung erforderliche Gewicht π hinlegt; das in Bewegung zu setzende Gewicht ist dann $p + P + P^1 + \Pi + \pi$, die bewegendende Kraft einfach gleich dem Übergewichte p .

Das Gewicht P fällt vor einem hölzernen in Centimeter geteilten Maßstabe. Längs desselben kann man einen kleinen Messingteller K verschieben und durch Klemmschrauben in irgend einer Höhe befestigen; auf denselben schlägt dann das Gewicht P auf und gibt durch das infolge des Schlages entstehende Geräusch das Ende seines Laufes an.

Der Apparat ist ferner so eingerichtet, daß man an einer beliebigen Stelle das Übergewicht p fortnehmen kann, ohne die Bewegung des Systems zu stören. Zu dem Ende ist an dem hölzernen Maßstabe außer dem vorhin erwähnten Teller ein Ring H befestigt, durch den das Gewicht P ungehindert hindurchgehen kann, der aber das Übergewicht p , welches die in der Nebenfigur bezeichnete Gestalt hat, zurückhält. Dieser Ring ist längs des Maßstabes verschiebbar und kann ebenfalls an beliebiger Stelle desselben befestigt werden. Durch Einschalten des Ringes kann also das Übergewicht an einer beliebigen Stelle fortgenommen werden.

An der Maschine ist überdies noch ein Apparat angebracht, der die Zeit mißt. Dieser ist im Princip nichts anders als ein Lot; bei der Lehre vom Pendel werden wir nachweisen, daß ein aus seiner Gleichgewichtslage gebrachtes Lot um dieselbe Schwingungen macht. Zu diesen Schwingungen braucht es immer dieselbe Zeit; wir können es daher benutzen, um gleiche Zeiteile zu messen. Hat das Pendel eine bestimmte Länge, so braucht es zu einer Schwingung genau eine Sekunde. Ein solches Sekundenpendel ist an dem Apparate angebracht. Mit dem Pendel ist ein Zeiger in Verbindung, der die einzelnen Sekunden anzeigt, und ein Schlagwerk, welches jede Sekunde durch einen hörbaren Schlag markiert.

Um die Bewegung genau mit dem Schlage einer Sekunde beginnen zu können, steht das Gewicht P vor der Bewegung auf einem kleinen Teller, der durch eine kleine Stütze gehalten wird, welche durch den Winkelhebel EFG mit dem Pendel in Verbindung gebracht ist. Jedesmal wenn der

Zeiger an einer bestimmten Stelle steht, wird diese Stütze gelöst, und das System beginnt seine Bewegung.

Wie man sieht, läßt sich an diesem Apparate ein beliebiges Gewicht durch eine beliebige konstante Kraft, deren Wirkungsdauer sich ebenfalls ändern läßt, in Bewegung setzen; der Apparat ist daher vorzugsweise geeignet, die durch konstante Kräfte erzeugten Bewegungen in allen Einzelfällen zu untersuchen.

§ 5.

Bewegung unter Wirkung einer konstanten Kraft. Setzen wir unser System an der Atwoodschen Fallmaschine, nachdem es in der im vorigen Paragraphen beschriebenen Weise vorgerichtet ist, durch ein Übergewicht p in Bewegung und bringen an irgend einer Stelle z. B. 10 Centimeter unter dem Ausgangspunkte der Gewichte den Ring H an. Geht P durch den Ring hindurch, so bleibt das Übergewicht zurück, und wir finden dann, daß von da ab das System sich mit gleichförmiger Bewegung weiter bewegt. Bei einem bestimmten Übergewicht, dessen Größe von der der übrigen Gewichte abhängt, wird der Raum von 10^{cm} gerade in 1 Sekunde durchfallen; suchen wir dann durch passende Stellung des Tellers K , welcher Weg in 2, 3, 4 Sekunden durchlaufen wird, so finden wir

Zeit	1"	2"	3"	4"	5"
Durchlaufener Weg	10 ^{cm}	30 ^{cm}	50 ^{cm}	70 ^{cm}	90 ^{cm}
Weg in den auf die erste folgenden Sekunden zurückgelegt	20 ^{cm}	40 ^{cm}	60 ^{cm}	80 ^{cm}	

Nach der ersten Sekunde, also nach Fortnahme des Übergewichtes, ist somit die Bewegung in der That eine gleichförmige, in jeder Sekunde werden 20^{cm} durchlaufen; wir erhalten darin einen experimentellen Beweis dafür, daß ein Körper, der sich ohne Hindernisse bewegt, in der That die ihm einmal erteilte Bewegung beibehält.

Lassen wir dasselbe Übergewicht anstatt einer 2, 3, 4 Sekunden wirken (der Versuch zeigt, daß wir dazu den Ring H bei 40^{cm}, 90^{cm}, 160^{cm} befestigen müssen), so finden wir stets, daß in der auf die Abnahme des Übergewichtes folgenden Zeit die Bewegung eine gleichförmige ist, daß also jedesmal der in dieser Zeit zurückgelegte Weg sich darstellen läßt durch

$$s = c \cdot t,$$

wenn t die Anzahl der Sekunden nach Fortnahme des Übergewichtes und c der in jedem Falle in der ersten Sekunde nach jener Fortnahme zurückgelegte Weg ist. Dieser Weg oder die während der Wirkung des Übergewichtes erlangte Geschwindigkeit ist aber verschieden; sie ist um so größer, je länger das Gewicht gewirkt hat. Bestimmen wir die Geschwindigkeiten in den einzelnen Fällen, so finden wir:

nach	1"	2"	3"	4"
die Geschwindigkeiten	20 ^{cm}	40 ^{cm}	60 ^{cm}	80 ^{cm}

Dividieren wir die in den einzelnen Fällen erlangten Geschwindigkeiten durch die Anzahl Sekunden, in welchen dieselben durch die Wirkung des Übergewichtes erzeugt sind, so wird

$$\frac{20}{1} = \frac{40}{2} = \frac{60}{3} = \frac{80}{4} = 20.$$

Die Quotienten haben somit alle denselben Wert. Wir sehen somit in diesen Fällen, und schliessen daraus für alle Fälle, daß die durch Wirkung eines konstanten Uebergewichtes, also auch allgemein durch die Wirkung eines konstanten Druckes in verschiedenen Zeiten erreichten Geschwindigkeiten einfach den Zeiten proportional sind, oder daß

$$v = c_1 t,$$

die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit v gleich ist dem Produkte aus der in der ersten Sekunde erlangten Geschwindigkeit und der Zeit t . Da somit die in gleichen Zeiten stattfindenden Geschwindigkeitszunahmen gleich sind, so erzeugt eine konstante stetig wirkende Kraft eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

Im § 1 haben wir bereits abgeleitet, daß bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung die während derselben zurückgelegten Wege gleich sind der halben Beschleunigung multipliziert mit dem Quadrate der Zeit, während welcher die Bewegung gedauert hat, daß also

$$s = \frac{1}{2} c_1 t^2.$$

Zu dem gleichen Resultate können wir auch durch eine einfache Überlegung gelangen. Da nämlich die Zunahme der Geschwindigkeit in gleichen Zeiten immer dieselbe ist, so legt der mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung bewegte Körper in einer gegebenen Zeit denselben Weg zurück, als wenn er sich während der ganzen Zeit in gleichförmiger Bewegung mit derjenigen Geschwindigkeit bewegt hätte, die er genau in der Mitte der Zeit gehabt hat. Denn mit dieser Geschwindigkeit hätte er in der ersten Hälfte der Zeit gerade soviel mehr zurückgelegt, wie er in Wirklichkeit zurückgelegt hat, als er in der zweiten Hälfte weniger zurücklegen würde. Diese mittlere Geschwindigkeit ist nun $\frac{1}{2} c_1 t$, somit der zurückgelegte Weg gleich $\frac{1}{2} c_1 t \cdot t = \frac{1}{2} c_1 t^2$, wie es die Rechnung ergab.

Wir können leicht die Richtigkeit unserer Rechnung durch den Versuch bestätigen, indem wir an der Fallmaschine den Ring H fortnehmen, und jene Stellen aufsuchen, an denen wir den Teller K befestigen müssen, damit das Gewicht P nach 1, 2, 3 . . . Sekunden aufschlägt. Wir finden diese Stellen

nach 1"	2"	3"	4"
bei 10	40	90	160.

Diese letztern Zahlen sind aber

$$10 \cdot 1, 10 \cdot 2^2, 10 \cdot 3^2, 10 \cdot 4^2$$

oder allgemein

$$s = 10 t^2.$$

Da wir bei demselben Versuche die Beschleunigung gleich 20 fanden, ist $10 = \frac{1}{2} c_1$.

Die durch eine jede konstante Kraft hervorgebrachte gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist vollständig bestimmt, wenn die Beschleunigung bekannt ist, denn mit dieser erhalten wir für jede Zeit die Geschwindigkeit und den in dieser Zeit zurückgelegten Weg. Daß die Beschleunigung von der Größe der bewegenden Kraft und von der Größe des bewegten Gewichtes abhängig sein muß, ergibt sich unmittelbar aus der Überlegung,

ade die Kraft ist, welche den Bewegungszustand des Beweglichen welcher Weise aber die Beschleunigung von diesen beiden Größen artüber kann uns nur der Versuch belehren.

n wir zunächst das Gesamtgewicht an unserer Fallmaschine ganz , und verändern nur das Übergewicht. Zu dem Zwecke sind an des Fadens Scheiben angebracht, auf welche man eine Anzahl ganz gleiche Ringe legt. Legen wir zunächst auf beide Seiten n , so daß etwa diese np gleich dem vorhin angenommenen Gewicht, so tritt keine Bewegung ein; legen wir dann auf die eine Übergewicht p und das Friktionsgewicht π , so tritt die vorhin beschleunigte Bewegung mit der Beschleunigung $c_1 = 20^{\text{cm}}$ ein. n wir von der hinteren Seite einen Ring vom Gewichte p fort ihn auf die vordere Seite; wir haben dann bei ganz ungeändertem ichte des ganzen Systems auf der einen Seite das Übergewicht $3p$, liegen die Gewichte $(n+1)p + p = (n+2)p$, auf der hinteren gen $(n-1)p$. Verfahren wir ein zweites Mal so, dann erhalten ergewicht $5p$, ein drittes Mal $7p$ u. s. f., so daß bei stets gleichem ichte sich die Übergewichte verhalten wie $1 : 3 : 5 : 7$ u. s. f. nmen wir die Beschleunigungen in diesen Fällen, so finden wir, ben mit der Größe des Übergewichtes in demselben Verhältnissen, denn wir erhalten sie

	bei dem Übergewichte p gleich c_1	
" "	" $3p$ "	$3c_1$
" "	" $5p$ "	$5c_1$
" "	" $7p$ "	$7c_1$

shnen wir daher die durch ein der Gewichtseinheit gleiches Überserem System erteilte Beschleunigung mit d , so können wir die id ein Übergewicht p erzeugte Beschleunigung c wiedergeben durch

$$c = dp,$$

beschleunigung ist allgemein der Größe des Übergewichts oder der bewegenden Kraft proportional.

n wir bei gegebenem Übergewicht das Gesamtgewicht unseres $+ P' + \Pi + \pi + p$, was wir dadurch können, daß wir eine ie Anzahl von Ringen auf die am Ende des Fadens angebrachten egen, so finden wir, daß mit der Größe dieses Gewichtes die gung abnimmt. Legen wir bei dem Übergewichte p soviel Ringe as Gesamtgewicht verdoppelt, verdreifacht wird, so wird die Be-ag die Hälfte oder ein Drittel u. s. f. Wir finden allgemein, daß item Übergewichte die Beschleunigung in demselben Maße kleiner lie Größe des Gesamtgewichtes zunimmt.

n wir aber gleichzeitig das Gesamtgewicht des Systems und das at in demselben Sinne, verdoppeln, verdreifachen wir beide, so immer dieselbe Beschleunigung, wie wir sie bei einfachem Ge-nte und einfachem Übergewichte fanden. Daraus folgt, daß die gung nicht allein von der Größe der bewegenden Kraft oder öfße des zu bewegenden Gewichtes, sondern von dem Verhältnisse inander abhängt, oder daß die Beschleunigung der Größe dieses ses direkt proportional ist. Nennen wir daher die Beschleunigung,

welche die der Gewichtseinheit gleiche bewegende Kraft einem die Gewichtseinheit wiegenden Körper erteilt, g , so wird die Beschleunigung c , welche die Kraft p dem Gewichte Q erteilt,

$$c = g \frac{p}{Q},$$

oder allgemein die einem Körper erteilte Beschleunigung ist der GröÙe der Kraft direkt, dem Gewichte des Körpers umgekehrt proportional.

Es ist gut, zu beachten, daÙ in dieser Gleichung das Gewicht Q in eine anderen Weise auftritt als das Übergewicht p . Wir sahen schon früher, daÙ die Materie träge ist, daÙ es immer einer Kraft bedarf, um den Bewegungszustand eines Körpers zu ändern, daÙ also in der Trägheit der Materie ein Widerstand gegen eine Änderung der Geschwindigkeit vorhanden ist. Wir sehen nun hier, daÙ es bei verschiedenen Körpern zur gleichen Änderung ihres Bewegungszustandes einer verschiedenen Kraft bedarf, und daÙ diese Kraft in demselben Verhältnisse zunehmen muÙ wie der Druck, den der bewegte Körper auf seine Unterlage ausübt, oder daÙ der Widerstand des Körpers gegen die Bewegungsänderung seinem Gewichte proportional ist, daÙ das Gewicht ist also das MaÙ dieses Widerstandes, und in dem Sinne tritt es in dem Nenner obiger Gleichung auf.

Aus dem Ausdrucke für die Beschleunigung irgend eines Körpers von Gewichte Q durch irgend eine Kraft p können wir nun auch sofort die Geschwindigkeit v erhalten, welche die Kraft diesem Körper in der Zeit erteilt, sowie den Weg s , den der Körper unter Wirkung dieser Kraft zurücklegt. Wir erhalten

$$v = g \frac{p}{Q} t$$

$$s = \frac{1}{2} g \frac{p}{Q} t^2.$$

In diesen Ausdrücken ist alles enthalten, was auf die Bewegung eines Körpers infolge einer konstanten Kraft von Einfluß ist, GröÙe der Kraft und bewegten Gewichte und Länge der Zeit, während welcher die Kraft wirkt. Die vierte darin vorkommende GröÙe ist eine Zahl, die wir aus unsern Versuchen bestimmen können. Genaue später zu besprechende Versuche haben gezeigt, daÙ diese GröÙe aus Gründen, die dann ebenfalls hervortreten werden, an den verschiedenen Orten der Erde einen etwas verschiedenen Wert hat. In Göttingen ist sie nach den Bestimmungen von Gauss¹⁾ 9,8116² für Paris nach den Bestimmungen von Biot und Arago²⁾ 9,80896, wenn die Zeit t in Sekunden und die Geschwindigkeit in Metern gemessen wird.

Die Bedeutung dieser in der Physik immer mit g bezeichneten Zahl ist leicht zu erhalten; setzen wir nämlich $p = Q$, so wird

$$v = gt; \quad s = \frac{1}{2} gt^2.$$

Ist aber $p = Q$, so heiÙt das, das Übergewicht ist gleich dem Gesamtgewichte, oder wir lassen den Körper frei fallen. Die GröÙe g ist demnach die Beschleunigung oder der in jeder Sekunde eintretende Geschwindigkeitszuwachs.

¹⁾ Gauss, Intensitas vis magneticæ terrestris in mensuram absolutam revocata. Göttingen 1833. Poggend. Ann. Bd. XXVIII.

²⁾ Biot et Arago, Recueil d'observations géodésiques, astronomiques, physiques etc. Paris 1821.

zuwachs beim freien Fall, und die beiden letzten Ausdrücke liefern uns die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach t Sekunden und den in t Sekunden durchfallenen Raum.

§ 6.

Masse. Die in dem vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung pflegt man in der Mechanik gewöhnlich in einer etwas veränderten Form zu schreiben, man setzt die GröÙe g in den Nenner und schreibt den Quotienten

$$\frac{g}{Q} = \frac{1}{m}, \quad \frac{Q}{g} = m,$$

somit die Gleichungen

$$c = \frac{p}{m}, \quad v = \frac{p}{m} t, \quad s = \frac{1}{2} \frac{p}{m} t^2.$$

Die so definierte GröÙe m nennt man die Masse des bewegten Körpers, so daß also mechanisch gesprochen die Masse eines Körpers nichts ist als ein Zahlencoefficient, und zwar nicht nur der Quotient aus dem Gewichte des Körpers und der Beschleunigung desselben beim freien Fall, sondern auch nach der Gleichung

$$m = \frac{p}{c}$$

der immer für einen gegebenen Körper gleiche Quotient aus der bewegenden Kraft und der Beschleunigung, welche diese dem Körper erteilt.

Der Zweck der Einführung dieses Begriffes ist die Herstellung eines einheitlichen Maßsystems für die drei zusammengehörigen GröÙen: Beschleunigung, Kraft und Masse. Die Bezeichnung des Beweglichen, insofern es träge ist oder Beharrungsvermögen besitzt, als Masse geht von der im täglichen Leben gewohnten Bedeutung des Wortes Masse aus. Das Maß für die GröÙe der Masse des Beweglichen erhalten wir durch die Beschleunigung, welche bewegende Kräfte demselben erteilen; die Masse des Beweglichen ist in dem Maße größer, wie die Beschleunigung kleiner ist, welche gleiche gegebene Kräfte ihm erteilen. Da wir sahen, daß die Beschleunigung dem Gewichte des Beweglichen umgekehrt proportional ist, könnten wir die Masse sehr gut durch die Gewichte messen. Indes um ein zusammengehöriges Maßsystem zu erhalten, setzt man diejenige Masse gleich eins, welche durch die Einheit der Kraft die Einheit der Beschleunigung erhält. Da die Mechanik das Kilogramm als die Krafteinheit, das Meter als die Längeneinheit festgesetzt hat, so setzt sie jene Masse gleich eins, welche durch diese Kraft die Beschleunigung eines Meter erhält. Da nun die Masse eines Kilogramms durch den Druck eines Kilogramms die Beschleunigung g Meter erhält, so erhalten g Kilogramme diejenige eines Meters, die Mechanik setzt deshalb die Masse von g Kilogrammen gleich eins oder die Masse des Gewichtes Q Kilogramme gleich dem Quotienten aus dem Gewichte und der Zahl g .

Man könnte ebenso gut zur Herstellung eines einheitlichen Maßsystems anders verfahren, indem man von den drei zusammenhängenden GröÙen: Kraft, Masse, Beschleunigung zwei andere festsetzt, und nach diesen die dritte bestimmt. Wir könnten ebenso gut die Maße der Beschleunigung und der Masse festsetzen und aus diesen die Einheit der Kraft ableiten, also direkt das Gewicht des Beweglichen als Maß der Masse wählen und

nun jene Kraft zur Einheit machen, welche dieser Masse die Beschleunigung von einem Meter erteilt. Dann wäre nicht das Kilogramm die Einheit der Kraft, sondern der g^{te} Teil desselben, das Kilogramm würde also gleich g Krafteinheiten sein.

Gauss hat in der That zur Messung der magnetischen Kräfte diesen Weg eingeschlagen, er hat das Maß der Beschleunigung und der Masse festgesetzt und aus diesen die Krafteinheit abgeleitet¹⁾. Zur Messung der magnetischen Kräfte setzt er die Masse eines Milligramms als Masseneinheit, die Beschleunigung eines Millimeters als Beschleunigungseinheit und damit jene Kraft gleich eins, welche der Masse des Milligramms die Beschleunigung ein Millimeter erteilt. Da nun der Druck eines Milligramms der Masse desselben die Beschleunigung 1000 g Millimeter erteilt, wenn wir die Zahl g als in Metern gegeben festhalten, so hat der Druck von 1 Milligramm im Gauss'schen Maßsystem 1000 g Einheiten, somit die Krafteinheit der Mechanik, das Kilogramm, 1000. 1000. 1000 $g = 10^9 g$ Einheiten des Gauss'schen Maßsystems.

Wir werden zunächst das in der Mechanik gebräuchliche Maßsystem festhalten.

§ 7.

Fundamentalgesetz der Kraftwirkung. Das im § 5 experimentell abgeleitete Gesetz, daß eine konstante Kraft eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung hervorbringt, deren Beschleunigung der Größe der Kraft direkt proportional ist, liefert uns sofort ein Beispiel dafür, daß, wie in der Einleitung hervorgehoben wurde, ein solches Gesetz nicht nur der Ausdruck derjenigen Thatsachen ist, welche es in einem allgemeinen Satze zusammenfaßt, sondern daß es gleichzeitig alle diejenigen Erscheinungen in sich schließt, welche aus demselben folgen. Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung können wir als die experimentelle Grundlage der ganzen Mechanik bezeichnen, indem aus demselben sich das Fundamentalgesetz der Wirkung einer Kraft ergibt, das Gesetz nämlich, daß die Wirkung einer Kraft nur durch sie selbst und von nichts Anderm bedingt ist.

Das Gesetz der gleichförmig beschleunigten Bewegung zeigt uns nämlich zunächst, daß die Geschwindigkeitszunahme in gleichen Zeiten immer denselben Wert hat, die Geschwindigkeit ist am Ende der ersten Sekunde c_1 , der zweiten $2c_1$, der dritten $3c_1$, sie wächst in jeder Sekunde um c_1 , einerlei, welche Geschwindigkeit der Körper bei dem Beginne der Sekunde besaß. Wir schließen daraus, daß die Wirkung einer Kraft auf einen beweglichen Körper immer dieselbe ist, einerlei, ob der Körper schon eine Bewegung besitzt oder nicht.

Ganz dasselbe zeigt die Betrachtung der unter Wirkung einer Kraft zurückgelegten Wege. Dieselben sind in den aufeinanderfolgenden Sekunden

$$\frac{c_1}{2}, \quad 3 \frac{c_1}{2}, \quad 5 \frac{c_1}{2}.$$

Wäre der Körper am Schlusse der ersten Sekunde der Wirkung der Kraft entzogen, so wäre er in gleichförmiger Bewegung mit der Geschwin-

¹⁾ Gauss, *Intensitas vis magneticae terrestris in mensuram absolutam revocata*. Göttingen 1833. Poggend. Ann. Bd. XXVIII.

digkeit c_1 weitergegangen, er hätte also in der zweiten Sekunde den Weg c_1 zurückgelegt. Infolge der dauernden Kraftwirkung hat er den Weg $3 \frac{c_1}{2}$ zurückgelegt. Die Differenz $3 \frac{c_1}{2} - c_1 = \frac{c_1}{2}$ ist also Folge der Wirkung der Kraft. Dieser Weg ist gleich dem in der ersten Sekunde zurückgelegten. Ebenso ist es in den folgenden Sekunden, oder es ergibt sich allgemein, daß der durch die Wirkung einer Kraft in jeder Sekunde zurückgelegte Weg ganz unabhängig ist von der Geschwindigkeit, welche der Körper bereits besitzt.

Der soeben gezogene Schluß, daß die Wirkung einer Kraft ganz unabhängig ist von der Bewegung, die ein Körper schon besitzt, gilt zunächst nur in dem Falle, daß die Kraft in der Richtung der Bewegung wirkt, welche der Körper schon besitzt. Indes läßt sich der Schluß mit Hilfe bekannter Erfahrungen leicht verallgemeinern. Befinden wir uns in einem mit gleichförmiger Bewegung begabten Raume, etwa in dem Innern eines Schiffes, so nehmen wir die Bewegung nicht direkt wahr. Lassen wir dann auf irgend einen im Innern des Raumes befindlichen Körper eine Kraft wirken, so bewegt sich derselbe innerhalb des Raumes ganz so, wie wenn das Schiff in Ruhe wäre. Die Wirkung der Kraft auf den Körper ist also unabhängig von dessen mit dem Schiffe gemeinsamer Bewegung. Ja es bedarf zum Beweise dieses Satzes nicht einmal besonderer Beobachtungen, unsere Versuche zur Ableitung des Gesetzes der gleichförmigen Bewegung liefern schon den Beweis, da uns die Astronomie lehrt, daß unsere Erde, mit allem was auf ihr ist, eine sehr komplizierte Bewegung im Raume hat, die wir an der Erde nicht wahrnehmen, weil unsere ganze Umgebung mit uns die gleiche Bewegung hat. Wir können deshalb ganz allgemein den Satz aufstellen:

„Wenn alle Punkte eines Systems eine gemeinschaftliche Bewegung haben, und einer von ihnen wird der Wirkung einer Kraft unterworfen, so ist die Bewegung, welche der Punkt infolge dieser Kraft in Beziehung auf das System annimmt, genau so, als habe die gemeinschaftliche Bewegung des Systemes nicht existiert.“

Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegung sagt weiter, daß die Beschleunigungen, welche verschiedene Kräfte an einem Systeme bewirken, der Größe der Kräfte proportional sind. Wirken zwei oder mehrere Kräfte auf ein System, so ist die Beschleunigung gleich der Summe der Beschleunigungen, welche jede Kraft für sich, wenn sie allein wirksam wäre, hervorbringen würde. Es folgt somit, daß die Wirkung einer Kraft unabhängig davon ist, ob gleichzeitig mit ihr eine andere zur Wirksamkeit kommt, oder daß die Wirkung einer Summe von Kräften gleich ist der Summe der Wirkungen der einzelnen Kräfte.

Das Gesetz der gleichmäßig beschleunigten Bewegungen beweist diesen Satz zunächst wiederum nur für gleichgerichtete Kräfte, man kann ihn durch, den vorhin angeführten, ähnliche Erfahrungen leicht verallgemeinern; indes ist das nicht einmal erforderlich, da wir diesen Satz schon allgemein aus dem Vorigen folgern können. Denn die Wirkung einer jeden von einer Summe gleichzeitig wirkender Kräfte ist Bewegung. Da wir nun ganz allgemein fanden, daß die Wirkung einer Kraft durchaus unabhängig von der bereits vorhandenen oder anderweitig erteilten Bewegung ist, so folgt

auch, daß die Wirkung einer Kraft unabhängig von derjenigen einer andern ist.

Dieser Satz, daß die Wirkung einer Kraft von nichts beeinflusst wird, ist der Fundamentalsatz der Mechanik, denn er setzt uns in den Stand, sofort die von einer Kraft bewirkte Bewegung zu bestimmen, wenn wir die Dauer ihrer Wirkung und die Masse des bewegten Systemes kennen. Wir haben mit demselben die experimentelle Grundlage der Mechanik gewonnen, aus welcher diese Wissenschaft deduktiv abgeleitet wird.

§ 8.

Das. Kräfteparallelogramm. Wir gehen zunächst dazu über, die unter Wirkung mehrerer nach verschiedenen Richtungen thätiger Kräfte stattfindende Bewegung etwas genauer zu betrachten und daraus einige Folgerungen zu ziehen.

Es ist an sich klar, daß ein Körper, der sich infolge zweier nach verschiedener Richtung wirkender Kräfte bewegt, sich weder in der Richtung der einen noch in derjenigen der andern bewegen kann. Nach dem eben entwickelten Fundamentalsatze ist es aber leicht, die Richtung, nach welcher sich der Körper bewegt, zu bestimmen. Die Kräfte wirken jede, wie wenn die andere nicht da wäre; der Ort, welchen das Bewegliche nach der ersten Sekunde erreicht hat, wird daher gerade so erreicht werden, wenn wir die beiden Kräfte nach einander jede eine Sekunde wirken lassen. Legen wir daher durch den Punkt, welchen der Körper unter Wirkung der einen Kraft erreicht hat, eine gerade Linie und tragen auf dieser parallel der Richtung, in welcher die zweite Kraft für sich den Körper bewegt haben würde, die Länge auf, welche er unter Wirkung dieser Kraft in einer Sekunde zurückgelegt haben würde, so wird der Endpunkt dieser Länge wirklich der Punkt sein, in welchem sich der Körper nach gemeinschaftlichem Wirken der beiden Kräfte befindet, und die Verbindungslinie dieses Punktes mit dem Ausgangspunkte wird der Richtung und Länge nach der Weg sein, den der Körper wirklich zurückgelegt hat.

Man sieht, dieser Weg fällt der Größe und Richtung nach mit der Diagonale eines Parallelogramms zusammen, welches wir aus den Längen konstruieren können, welche der Körper infolge jeder Kraft für sich in der gleichen Zeit zurücklegt, indem wir diese Längen im Ausgangspunkt in den entsprechenden Richtungen zusammenlegen und das durch diese Längen und den Winkel, den sie mit einander bilden, bestimmte Parallelogramm vervollständigen.

Diesen Weg hat der Körper allerdings durch die Wirkung zweier Kräfte zurückgelegt, welche nach verschiedenen Richtungen wirkten. Aber ganz denselben Weg hätten wir auch in derselben Zeit den Körper durch eine einzige in der Richtung der resultierenden Bewegung wirksame Kraft zurücklegen lassen können. Da dann diese Kraft die gleiche Wirkung hat wie die beiden zusammenwirkenden, so kann man die beiden vorhandenen Kräfte auch vollständig durch diese Kraft ersetzen. In dem Sinne nennt man auch die Kraft, welche der Richtung und Größe nach dieselbe Bewegung zur Folge hat als die beiden einzelnen Kräfte durch ihr Zusammenwirken, die aus diesen resultierende Kraft.

Diese Kraft, welche also die beiden wirklich vorhandenen der Größe und Richtung nach ersetzt, läßt sich durch eine ganz ähnliche Konstruktion ihrer Größe nach erhalten. Wenden wir nämlich anstatt der in gegebenen Zeiten durchlaufenen Wege zu unserer Konstruktion die durch die einzelnen Kräfte bewirkten Beschleunigungen an, so sind die Kräfte den Beschleunigungen proportional und können durch dieselben dargestellt werden. Wir gelangen daher unmittelbar zu dem Satze, daß die aus zwei gegebenen in verschiedener Richtung wirkenden Kräften resultierende Kraft der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des von jenen Kräften und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel bestimmten Parallelogramms gegeben wird.

Dieser für die theoretische Mechanik äußerst wichtige Satz, der nur eine Konsequenz des in dem vorigen Paragraphen Gesagten ist, wird der Satz vom Parallelogramm der Kräfte genannt.

Man sieht, wie man dadurch imstande ist, die Wirkung beliebig vieler nach verschiedenen Richtungen thätiger, an einem Punkte angreifender Kräfte auf jene einer einzigen zurückzuführen, welche alle jene vollständig ersetzt, indem man die Kräfte nur paarweise zusammensetzt.

Um die Größe der aus zwei Kräften P und P_1 , welche den Winkel α mit einander bilden, resultierenden Kraft zu erhalten, haben wir nur den bekannten Satz aus der ebenen Geometrie über die Größe der Diagonale eines Parallelogramms anzuwenden; die Resultante R ist danach gegeben durch

$$R^2 = P^2 + P_1^2 + 2PP_1 \cos \alpha.$$

Umgekehrt erhellt aber auch, daß eine jede Bewegung als die Resultierende aus zwei Seitenbewegungen aufgefaßt, somit auch die jene Bewegung bestimmende Kraft als die Resultierende zweier gedachter Seitenkräfte aufgefaßt werden kann. Da nun jede Linie als Diagonale unendlich vieler Parallelogramme aufgefaßt werden kann, so kann man jede Kraft auf unendlich viele verschiedene Arten in Seitenkräfte zerlegen; jede dieser Seitenkräfte kann dann wieder als Resultierende anderer Seitenkräfte betrachtet werden, so daß also jede Kraft in unendlich viele Seitenkräfte zerlegt werden kann.

Diese letzten Sätze sind in der Mechanik von hoher Bedeutung, da sie uns in den Stand setzen, die Wirkung, welche eine Kraft nach einer von ihrer eigenen verschiedenen Richtung ausüben kann, zu berechnen. Kann z. B. ein Körper sich nur nach einer bestimmten Richtung bewegen, und wirkt auf diesen eine konstante Kraft, deren Richtung mit der Bewegungsrichtung des Körpers den Winkel α bildet, so erhalten wir die Größe der die Bewegung des Körpers bewirkenden Seitenkraft, wenn wir die gegebene Kraft so zerlegen, daß die eine der Seitenkräfte in die Richtung der Bewegung fällt, die andere zu ihr senkrecht ist. Letztere trägt zur Bewegung gar nichts bei, die erstere Komponente ist es somit, welche die Bewegung bedingt. Nennen wir die ursprüngliche Kraft P , die in die Bewegungsrichtung fallende Komponente R , so ist

$$R = P \cos \alpha,$$

wie sich unmittelbar daraus ergibt, daß P die Diagonale eines Rechtecks ist, dessen eine Seite R mit P den Winkel α bildet.

Haben wir eine ganze Reihe von Kräften P, P_1, P_2, \dots die Bewegungsrichtung die Winkel $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ bilden; so ist die diesen resultierende, die Bewegung bestimmende Kraft

$R = P \cos \alpha + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \dots = \Sigma P \cos$
wenn das Zeichen Σ die Summen aller einzelnen Produkte $P \cos \alpha$

Experimentelle Belege für die Richtigkeit dieser Sätze werden viele finden; wir erwähnen hier eines der am häufigsten vorkommende spiele, die Bewegung eines Körpers auf einer schiefen Ebene. Wir setzen daſs der Körper ohne jegliche Reibung die schiefe Ebene herabrollt

Nehmen wir an, die schiefe Ebene bilde mit dem Horizontalen Winkel α und der aufgelegte Körper habe das Gewicht p . Die der Schwere ist die der Vertikalen. Wir sehen dann die Schwere eine Resultierende zweier Kräfte an, deren eine auf der schiefe senkrecht steht, während die andere mit ihr parallel ist. Mit der der Schwere bildet die erstere den Winkel α , die zweite den $90^\circ - \alpha$; nach dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte ist daher gleich $p \cos \alpha$ und die zweite $p \sin \alpha$. Die erstere wird einen Druck gegen die schiefe Ebene bewirken und zu einer nichts beitragen; die zweite jedoch, welche parallel der schiefe wird dem Körper eine Bewegung die schiefe Ebene herab zu erteilen. Ihr Wert ist $p \sin \alpha$, also mit dem Neigungswinkel veränderlich. Körper in Ruhe bleiben, so muß also eine Kraft $p \sin \alpha$ parallel schiefe Ebene hinaufgerichtet angebracht werden. Der Versuch be- Denn befestigt man an dem Körper einen Faden und führt ihn der schiefe parallel über eine Rolle, so muß man an der andern Seite des Fadens $p \sin \alpha$ anhängen, um den Körper auf der schiefe Ebene festzuhalten.

Läſst man den Körper rollen, so ist die ihn bewegende Kraft dem Vorigen $p \sin \alpha$. Diese erteilt ihm die Beschleunigung

$$G = g \frac{p \sin \alpha}{p} = g \sin \alpha.$$

Die Gleichungen seiner Bewegung sind demnach

$$v = g \sin \alpha t \quad s = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2.$$

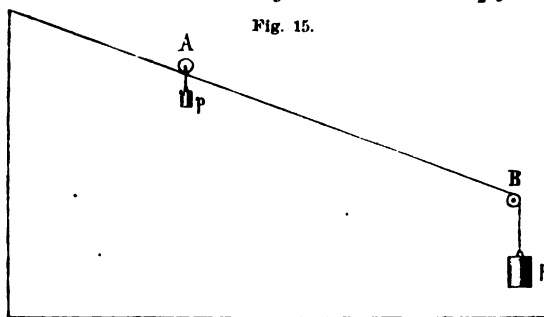


Fig. 15.

Wenn der Körper Punkte B angereicht, so hat er die Strecke AB

$$AB =$$

durchlaufen, mit h die Höhe der schiefe Ebene. Setzt man

Wert in unsere Gleichung für s , so ist

$$\frac{h}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} g \sin \alpha t^2$$

$$\frac{\sqrt{2gh}}{g \sin \alpha} = t$$

für die Dauer des Falls und

$$\sqrt{2gh} = v$$

für die Geschwindigkeit, mit der A in B ankommt. Bei gleicher Höhe h des Ausgangspunktes A über B ist somit die Dauer des Falles dem Sinus des Neigungswinkels der schiefen Ebene umgekehrt proportional; die Geschwindigkeit v dagegen ist von dieser Neigung unabhängig, sie ist einfach gleich jener, welche der Körper erhält, wenn er die Höhe h frei durchfallen hat. Denn die Geschwindigkeit beim freien Fall ist nach der Zeit t

$$v = gt.$$

Um die Höhe h zu durchfallen ist die Zeit t nach der Gleichung

$$h = \frac{1}{2} gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

somit die Geschwindigkeit v

$$v = g \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}.$$

Schon Galilei hat diese Sätze für die Bewegung auf der schiefen Ebene experimentell aufgefunden, und an derselben die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung erkannt.

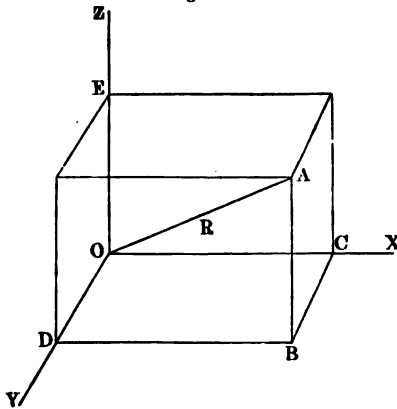
Von der schiefen Ebene macht man in der Praxis vielfache Anwendung, um Lasten eine gewisse Höhe hinaufzuschaffen. Jede Schraube ist eine um einen Cylinder gewickelte schiefe Ebene, ebenso beruht die Wirksamkeit des Keiles auf den Gesetzen der schiefen Ebene.

§ 9.

Bedingungen des Gleichgewichtes eines Punktes, auf den beliebig viele beliebig gerichtete Kräfte wirken. Die in dem letzten Paragraphen entwickelten Sätze bieten uns das Mittel zu bestimmen, wann ein fester Körper, der von beliebig vielen beliebig gerichteten Kräften afficiert wird, eine fortschreitende Bewegung annehmen kann, wann nicht. Greifen die Kräfte an demselben Punkte des Körpers an, so fallen die Gleichgewichtsbedingungen mit denen eines materiellen Punktes zusammen; ja sehen wir von den später zu betrachtenden drehenden Bewegungen ab, so ist die Bedingung, daß die Kräfte alle an demselben Punkt angreifen müssen, nicht einmal erforderlich, es fallen dann allgemein die Bedingungen des Gleichgewichtes eines festen Körpers mit denen eines materiellen Punktes zusammen. Setzen wir zunächst voraus, daß der Punkt sich vollkommen frei bewegen kann, so ist die für das Gleichgewicht notwendige Bedingung, daß wenn wir die Summe der Komponenten der Kräfte nach irgend einer beliebigen Richtung bilden, diese Summe immer gleich Null ist, wie wir diese Richtung auch wählen. Das ist aber der Fall, wenn die Summe der nach drei durch den Punkt gelegten zu einander senkrechten Richtungen gebildeten Komponenten für jede dieser Richtungen einzeln gleich Null ist.

Denn sind (Fig. 16) OX , OY , OZ die drei zu einander senkrechten Punkt O gelegten Richtungen, und sind die nach diesen Richtungen gebildeten Komponenten gleich Null, so folgt zunächst, da nach OY keine

Fig. 16.



wirkt, daß der Punkt O sich in der durch OX und OZ gelegten Ebene bewegen kann. Jede Kraft P , welche den Punkt aus dieser Ebene zieht, würde mit OY einen Winkel bilden, der kleiner ist als 90° , nun die parallel OY gebildete Komponente dieser Kraft $P \cdot \cos \beta$ sei, so wäre dieselbe und damit die OY gerichtete Komponente der Kraft überhaupt nicht gleich Null. Daß die Summe aller parallel gerichteten Komponenten gleich Null ist, folgt ferner, daß der Punkt O aus der Linie OX in der Ebene entfernt wird; denn auch da eine Kraft nötig, die mit der Richtung OZ einen Winkel γ bildet, kleiner ist als 90° . Die Komponente dieser Kraft parallel OZ ist $P \cdot \cos \gamma$, somit wieder von Null verschieden sein. Da nun auch die OX gerichtete Komponente gleich Null ist, so folgt schließlich, daß Punkt O auch in dieser Linie nicht bewegt werden kann, somit Punkt überhaupt in Ruhe ist.

Wirken demnach auf den Punkt O beliebige Kräfte P , deren Richtungen durch die Winkel α , β , γ gegeben sind, welche sie mit den festen Richtungen OX , OY , OZ bilden, so können wir die Bedingung des Gleichgewichts der schon im vorigen Paragraphen gewählten Bezeichnungsweise schreiben:

$$\sum P \cos \alpha = 0 \quad \sum P \cos \beta = 0 \quad \sum P \cos \gamma = 0.$$

Sind diese Komponenten nicht gleich 0, so haben sie eine Resultierende, welche wir mit R bezeichnen wollen, die mit den drei Richtungen OX , OY , OZ die Winkel a , b , c bilden möge. Die Größe dieser Resultierenden ist dann vollständig dadurch bestimmt, daß ihre parallel zu den drei Richtungen genommenen Komponenten den Komponenten der vorhandenen Kräfte einfach gleich sein müssen, oder daß

$$\sum P \cos \alpha = R \cos a \quad \sum P \cos \beta = R \cos b \quad \sum P \cos \gamma = R \cos c$$

sein muß. Daraus folgt dann weiter

$$R^2 (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) = (\sum P \cos \alpha)^2 + (\sum P \cos \beta)^2 + (\sum P \cos \gamma)^2$$

In der Stereometrie wird nun bewiesen, daß wenn a , b , c die Winkel sind, welche eine Richtung OA (Fig. 16) mit den drei zu einander senkrechten Richtungen OX , OY , OZ bildet, die Quadratsumme

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

ist; daraus ergibt sich dann, wenn wir zugleich

$$\sum P \cos \alpha = X \quad \sum P \cos \beta = Y \quad \sum P \cos \gamma = Z$$

setzen,

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

als Ausdruck für die GröÙe der Resultierenden. Stellen wir also, wie im vorigen Paragraphen, die Komponenten der Kräfte auf den drei Richtungen und ebenso die Resultierende durch Linien dar, so ergibt sich, daß die Resultierende als die Diagonale eines Parallelepipeds angesehen werden kann, dessen drei Seiten die parallel den drei festen Richtungen genommenen Komponenten aller Kräfte sind.

Ist OA (Fig. 16) diese Resultante, und sind OC , OD , OE die Komponenten, so erhalten wir, da OCA , ODA , OEA rechtwinklige Dreiecke sind, für die die Richtung der Resultierenden bestimmenden Winkel

$$\cos a = \frac{OC}{OA} = \frac{X}{R}; \quad \cos b = \frac{OD}{OA} = \frac{Y}{R}; \quad \cos c = \frac{OE}{OA} = \frac{Z}{R}.$$

Kennen wir somit die drei Komponenten X , Y , Z aller Kräfte, so ist dadurch GröÙe und Richtung der resultierenden Kraft, somit auch, wenn das Gewicht des in O befindlichen Körpers bekannt ist, die ganze Bewegung desselben bestimmt.

Kann der Punkt O sich nicht frei nach allen Richtungen bewegen, ist er etwa genötigt auf einer festen Oberfläche zu bleiben, so ist die im Vorigen abgeleitete Bedingung des Gleichgewichts nicht notwendig; es genügt dann, daß die an ihm angreifenden Kräfte den Körper in der Oberfläche nach keiner Richtung hin bewegen können; und dazu ist es nur notwendig, daß die Resultierende aller Kräfte auf der Oberfläche senkrecht ist. Welche Bedingungen dazu erforderlich sind, das mathematisch zu formulieren ist Aufgabe der theoretischen Mechanik, auf deren Lehrbücher wir deshalb verweisen.

§ 10.

Allgemeine Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung. Wurfbewegung. Ebenso wie wir durch die in den §§ 7 und 8 abgeleiteten allgemeinen Gesetze imstande waren, die Bedingungen des Gleichgewichts zu erhalten, sind wir nun auch imstande ganz allgemein zu entwickeln, welches die Bewegung eines Körpers unter Wirkung einer konstanten Kraft ist.

Lassen wir auf einen Körper vom Gewichte Q die Kraft P einwirken, so wird die Beschleunigung des Körpers in der Richtung, nach welcher die Kraft wirkt,

$$G = g \frac{P}{Q}.$$

Die in der Zeit t erlangte Geschwindigkeit ist

$$v = g \frac{P}{Q} t.$$

Besatz der Körper beim Beginne der Wirkung der Kraft bereits die Geschwindigkeit a , so setzt nach § 7 die neuerlangte Geschwindigkeit sich einfach mit dieser zusammen; ist die Geschwindigkeit a mit der neuen gleich gerichtet, so addieren sich die beiden, ist sie entgegengesetzt gerichtet, so subtrahieren sie sich. Wir können die Geschwindigkeit in diesen beiden Fällen somit nach der Zeit t allgemein setzen

$$v = a \pm g \frac{P}{Q} t.$$

Vermöge der Geschwindigkeit a durchläuft der Körper in der Zeit t den Raum at , vermöge der ihm von der Kraft P erteilten Geschwindigkeit den Raum $\frac{1}{2}g \frac{P}{Q} t^2$. Hat der Körper im Beginne der Zeit t bereits den Raum C durchlaufen, so wird der am Ende der Zeit t durchlaufene Raum

$$s = C + at \pm \frac{1}{2}g \frac{P}{Q} t^2.$$

Setzen wir hierin C und a gleich Null, so erhalten wir den mit der Fallmaschine experimentell entwickelten Ausdruck, und setzen wir $P=Q$ und nehmen an, die Kraft P sei die Schwere, unsern Ausdruck für den freien Fall der Körper.

Die Bewegung geworfener Körper ist ein specieller Fall dieser allgemeinen Sätze. Untersuchen wir zunächst den Fall, daß ein Körper mit der Geschwindigkeit a senkrecht in die Höhe geworfen wird.

Für die Geschwindigkeit nach t Sekunden erhalten wir, da in diesem Falle $P=Q$ ist,

$$v = a - gt,$$

dieselbe wird mit wachsender Zeit immer kleiner, sie wird gleich Null, der Körper hört auf zu steigen, wenn

$$a = gt; \quad t = \frac{a}{g}$$

ist. Die Höhe, bis zu welcher der Körper dann aufgestiegen ist, erhalten wir durch Einsetzen dieses Ausdruckes für t in die für s erhaltene Gleichung:

$$s = a \frac{a}{g} - \frac{1}{2}g \frac{a^2}{g^2} = \frac{1}{2} \frac{a^2}{g}.$$

In dieser Höhe angekommen, hört er auf zu steigen und bleibt einen Augenblick in Ruhe, aber sofort wirkt die Schwere auf ihn ein und zieht ihn wieder herab. Seine rückgängige Bewegung ist durch die Ausdrücke

$$v = gt; \quad s = \frac{1}{2}gt^2$$

bestimmt. Auf dem Boden angelangt hat er den Weg $\frac{1}{2} \frac{a^2}{g}$ durchlaufen: setzen wir diesen Wert in die Gleichung für s , so wird

$$\frac{1}{2} \frac{a^2}{g} = \frac{1}{2}gt^2; \quad t = \frac{a}{g},$$

und die Geschwindigkeit, die er dann besitzt, ist

$$v = g \frac{a}{g} = a.$$

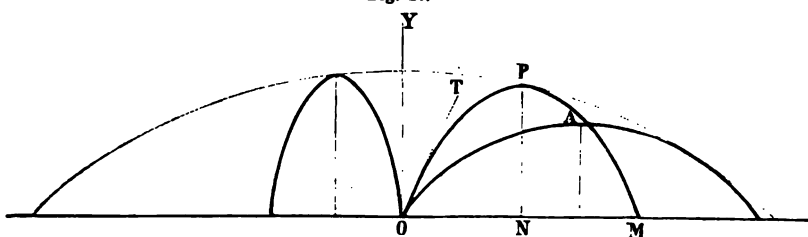
Der Körper braucht also, um die Höhe, bis zu der er gestiegen ist, zu durchfallen, genau dieselbe Zeit, die er zum Ersteigen der Höhe gebrauchte, und die Geschwindigkeit, mit der er an seinem Ausgangspunkt ankommt, ist genau von gleicher GröÙe, aber entgegengesetzter Richtung als die, mit der er zu steigen begann.

Letztere Bemerkung können wir unmittelbar dahin verallgemeinern, daß ein Körper, der von einem Ausgangspunkte mit einer bestimmten Geschwindigkeit ausgeht und unter Wirkung von Kräften auf seinem Wege

zur Ruhe kommt, stets in den Ausgangspunkt mit der ursprünglichen Geschwindigkeit zurückkommen muß, wenn er auf demselben Wege unter Wirkung derselben Kräfte zurückkehrt. Dabei ist es sogar gleichgültig, ob die Kräfte konstant oder veränderlich sind.

Untersuchen wir jetzt den Fall, daß die Richtung der dem Körper ursprünglich gegebenen Bewegung nicht mit derjenigen zusammenfällt, welche die auf ihn wirkenden Kräfte ihm erteilen. Es wird genügen diesen Fall an einem speziellen Beispiel, an der Bewegung eines in irgend einer Richtung geworfenen Körpers zu erörtern. Nehmen wir an, daß vom Punkte O (Fig. 17) aus ein Körper mit der Geschwindigkeit a in der

Fig. 17.



Richtung OT geworfen werde. Gemäß unseres in § 7 entwickelten Grundsatzes wirken zwei Kräfte ganz unabhängig auf ihn ein; die erstere hat ihm in der Richtung OT die Geschwindigkeit a erteilt, die zweite, die Wirkung der Schwere erteilt ihm in jeder Sekunde nach der Richtung der Vertikalen die Beschleunigung g . Die wirklich stattfindende Bewegung resultiert aus beiden.

Die Geschwindigkeit a können wir nach § 8 in zwei Komponenten zerlegen, in eine vertikale und eine horizontale. Bezeichnen wir den Winkel TON mit α , so ist erstere $a \sin \alpha$, letztere $a \cos \alpha$. Die Schwere wirkt in der Richtung der vertikalen und zwar in entgegengesetztem Sinne mit $a \sin \alpha$. Nennen wir die horizontale Geschwindigkeit v' , die vertikale v'' , so erhalten wir demnach für die Geschwindigkeit zur Zeit t

$$v' = a \cos \alpha \quad v'' = a \sin \alpha - gt.$$

Man findet nach dem Frñhern daraus für die in vertikaler und horizontaler Richtung zurückgelegten Wege

$$\text{für den horizontalen } x = a \cos \alpha \cdot t$$

$$\text{für den vertikalen } y = a \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2,$$

wo y positiv in der Richtung nach oben genommen ist.

Aus diesen Ausdrücken findet man in jedem Augenblicke den Ort des Körpers, wenn man in horizontaler Richtung von O aus die für die Zeit t berechnete Größe x aufträgt und am Endpunkte dieser Linie das für die gleiche Zeit berechnete y vertikal anlegt. Der durch den Endpunkt des y bestimmte Punkt ist dann der Ort des Körpers. Die Linie, welche wir durch alle so bestimmten Orte des Körpers hin legen, ist die Bahn des geworfenen Körpers. Entwickeln wir aus den zu gleicher Zeit bestehenden

x und y die Gröfse t , so ist

$$t = \frac{x}{a \cos \alpha}$$

$$t = \frac{a \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2yg}}{g}.$$

Setzen wir diese beiden Ausdrücke gleich, so gibt uns die Gleichung die Beziehung, welche immer zwischen den gleichzeitigen Werten von x und y bestehen muß, oder lösen wir die Gleichung nach y auf, so erhalten wir in der Gleichung zu jedem x das zugehörige y . Lassen wir demnach s alle Werte von Null an durchlaufen, so geben uns die Endpunkte aller dazugehörigen y die Bahn des Körpers.

Wir haben

$$\frac{gx}{a \cos \alpha} = a \sin \alpha \pm \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha - 2gy}$$

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{2a^2 \cos^2 \alpha} \cdot g.$$

Bezeichnen wir mit h die Höhe, bis zu welcher der senkrecht mit der Geschwindigkeit a emporgeworfene Körper aufgestiegen wäre, so haben wir wie vorhin

$$a^2 = 2gh,$$

und setzen wir das in unsern Ausdruck für y

$$y = x \tan \alpha - \frac{x^2}{4h \cos^2 \alpha}.$$

Die analytische Geometrie sagt uns nun, daß eine Linie, für deren Punkte diese Beziehung zwischen x und y , den Koordinaten besteht, eine Parabel sei, die symmetrisch um eine vertikale Axe NP liegt, so daß also die Bahn des Körpers aus einem aufsteigenden Stücke OP und einem absteigenden Stücke PM besteht, die symmetrisch zur Axe der Parabel sind.

Setzen wir $y = 0$, so erhalten wir zwei Werte für x , nämlich

$$x' = 0; \quad x'' = 2h \sin 2\alpha.$$

In dem Abstände $x'' = OM$ schneidet also die Bahn des Körpers zum zweiten Male die Horizontale, der Abstand gibt also den Weg, den der Körper in horizontaler Richtung zurückgelegt hat, wenn er wieder zu Boden fällt; es ist die Wurfweite.

Man sieht, dieselbe wächst anfänglich mit α , erreicht ihren größten Wert für $\alpha = 45^\circ$ und nimmt dann wieder ab. Außerdem ist sie proportional der Gröfse h , also dem Quadrate der dem Körper erteilten Anfangsgeschwindigkeit a .

Setzen wir $\alpha = 45^\circ \pm m$, so ist die Wurfweite

$$2h \sin (90^\circ \pm 2m) = 2h \cos 2m.$$

Für gleiche Neigungen über und unter 45° ist also die Wurfweite dieselbe.

Die höchste Höhe, welche der Körper erreichen kann, entspricht dem Punkte N der Mitte der Wurfweite. Setzen wir daher $x = h \sin 2\alpha$, so erhalten wir für y

$$y = h \sin^2 \alpha.$$

Diese Höhe wächst mit α und wird am größten, wenn $\alpha = 90^\circ$, wenn der Körper senkrecht in die Höhe geworfen ist. Sie ist überdies mit h dem Quadrate der erteilten Anfangsgeschwindigkeit proportional.

Die Geschwindigkeit ist in Punkten der Bahn, welche in gleicher Höhe liegen, gleich. Denn in der That, bezeichnen wir wieder die auf einander senkrechten Komponenten der Geschwindigkeit mit v' , v'' , so folgt die wirkliche Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn V aus

$$\begin{aligned} V^2 &= v'^2 + v''^2 = a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha - 2agt \sin \alpha + g^2 t^2 \\ &= a^2 - 2g \left(at \sin \alpha - \frac{g}{2} t^2 \right) = a^2 - 2gy, \end{aligned}$$

woraus unmittelbar folgt, daß V für gleiche y , also für Punkte gleicher Höhe der Bahn gleich ist; die Geschwindigkeiten sind symmetrisch zur mittelsten Höhe der Bahn PN . Bei P ist die Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} V^2 &= a^2 - 2gy = a^2 - 2gh \sin^2 \alpha = a^2 - a^2 \sin^2 \alpha \\ V &= a \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Die vertikale Bewegung ist dort Null und nur noch die horizontale Komponente der Anfangsgeschwindigkeit vorhanden.

Die Zeit, welche der geworfene Körper braucht, um seinen höchsten Punkt zu erreichen, ist darnach gleich jener, in welcher er niederfällt.

Man kann es sich nun zur Aufgabe machen, jenen Wert von α zu bestimmen, unter welchem man den Körper zur Erreichung eines bestimmten Punktes bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit werfen muß. Nennt man die Koordinaten dieses Punktes x' , y' , so haben wir zur Bestimmung unseres Winkels α nur unsere Gleichung für y , in welcher wir setzen

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha,$$

also

$$y' - x' \tan \alpha + \frac{x'^2}{4h} (1 + \tan^2 \alpha) = 0$$

nach α aufzulösen. Wir erhalten daraus

$$\tan \alpha = \frac{2h \pm \sqrt{4h^2 - x'^2 - 4hy'}}{x'}.$$

Es gibt außer im Falle, wo die GröÙe unter dem Wurzelzeichen Null ist, zwei Werte für α , entsprechend dem positiven und negativen Zeichen der WurzelgröÙe. Es gibt somit außer in dem erwähnten Falle zwei Parabeln, in denen sich der Körper zur Erreichung seines Zieles bewegen kann.

Ist die GröÙe unter dem Wurzelzeichen positiv, so ist die Lösung der Aufgabe möglich, d. h. alle Punkte, die durch x' und y' so bestimmt sind, daß

$$4h^2 - x'^2 - 4hy' > 0,$$

können bei der durch h bestimmten Anfangsgeschwindigkeit getroffen werden, denn wir erhalten für alle zwei Werte für α .

Ist der Ausdruck negativ, so wird $\tan \alpha$ imaginär, d. h. die Punkte, deren x' und y' so bestimmt sind, daß sie den Ausdruck

$$4h^2 - x'^2 - 4hy' < 0$$

machen, sind nicht erreichbar.

Die nicht erreichbaren sind von den erreichbaren Punkten getrennt durch eine Linie, deren x und y durch die Gleichung

$$4h^2 - x^2 - 4hy = 0,$$

also

$$x^2 = 4h(h - y)$$

mit einander verknüpft sind. Nach den Lehren der analytischen Geometrie ist das eine Parabel, deren Axe mit der in O errichteten Oy zusammenfällt, deren Konkavität gegen die Horizontale gerichtet ist, deren Scheitel die Höhe h und deren Parameter die Länge $4h$ hat. Mit h , also mit der Anfangsgeschwindigkeit a , ändert sich die Grenze der erreichbaren Punkte.

Wenn man alle diese Folgerungen experimentell prüft, so findet man sie mit Abweichungen, welche in dem Widerstand der Luft und einigen andern später zu betrachtenden störenden Umständen ihren Grund haben, bestätigt.

§ 11.

Verschiedene Arten die Kraft zu messen; Princip von der Erhaltung der Kraft oder Arbeit. Als Maß für die Kraft haben wir bisher das Gewicht betrachtet, welches an einem Punkte der Kraft entgegenwirkend angebracht werden muß, um denselben das Gleichgewicht zu halten. Wir sind indes jetzt auch imstande die Kräfte nach den Wirkungen zu messen, welche sie auf verschiedene Massen hervorbringt. Kennen wir nämlich die Beschleunigung G , welche eine Kraft der Masse M , diese jetzt als Quotient aus dem Gewichte des bewegten Körpers und der Zahl g bezeichnet, erteilt, so erhalten wir gemäß § 6

$$P = GM$$

oder die Kraft, welche auf die Masse M wirkend derselben die Beschleunigung G erteilt, ist gleich dem Produkte aus dieser Masse M und dieser Beschleunigung G .

Aus unserer Gleichung für die Geschwindigkeit der Bewegung eines Körpers von der Masse M unter Wirkung der konstanten Kraft P

$$v = \frac{P}{M} t$$

erhalten wir unmittelbar

$$Mv = Pt \dots I.$$

Das Produkt aus der bewegten Masse und der von ihr erreichten Geschwindigkeit ist gleich dem Produkte aus der wirkenden Kraft und der Zeit, während welcher sie gewirkt hat.

Wirkt ein anderes Mal die Kraft P_1 auf die Masse M_1 , und erteilt sie ihr in derselben Zeit t die Geschwindigkeit v_1 , so ist

$$M_1 v_1 = P_1 t$$

und

$$Mv : M_1 v_1 = Pt : P_1 t = P : P_1.$$

Man nennt das Produkt Mv die Bewegungsgröße der Masse M ; obige Proportion sagt daher, daß die zwei Massen bewegendes Kräfte sich verhalten wie die Bewegungsgrößen dieser Massen, jedoch unter der Voraus-

daß die Kräfte gleiche Zeit gewirkt haben. Das Produkt Pt Antrieb der Kraft in der Zeit t .
haben ferner die Gleichungen

$$v = \frac{P}{M} t; \quad s = \frac{1}{2} \frac{P}{M} t^2$$

er ersten dieser beiden Gleichungen

$$v^2 = \frac{P^2}{M^2} t^2.$$

in Gleichung und der zweiten der eben hingeschriebenen folgt

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{P}{M} s$$

$$\frac{1}{2} M v^2 = P s \quad \dots \text{II.}$$

Produkt aus der halben Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit, welche sie besitzt, ist gleich dem Produkte aus der bewegendenden Weglänge, auf welcher sie der Masse M diese Geschwindigkeit hat. Wirken zwei Kräfte P und P_1 eine gleiche Weglänge s auf zwei Massen M und M_1 und erteilen ihnen die Geschwindigkeit v und v_1 , so besteht demnach die Gleichung

$$\frac{1}{2} M v^2 : \frac{1}{2} M_1 v_1^2 = P : P_1$$

$$M v^2 : M_1 v_1^2 = P : P_1.$$

Produkte $\frac{1}{2} M v^2$ oder auch $M v^2$ nennt man die lebendige Kraft oder M . Nennt man letzteres die lebendige Kraft, so nennt man die Hälfte des letztern, wohl die lebendige Potenz. Wir werden die erstere Größe, welche sich unmittelbar aus den Bewegungsgleichungen ergibt, als lebendige Kraft bezeichnen. Wir können dann obige Gleichung dahin interpretieren, daß die bewegendenden Kräfte, welche auf Massen den gleichen Weg hindurch gewirkt haben, sich verhalten wie die lebendigen Kräfte, welche sie den Massen erteilt haben.

Produkt $P s$, aus der Kraft und dem Wege, durch welchen sie gewirkt hat, nennt man die Arbeit der Kraft; diese Benennung ist der Anschauung, daß eine Kraft auf dem ganzen Wege, auf dem sie gewirkt hat, einen ihr an Größe genau gleichen Widerstand entgegenfinden hat, eine Anschauung, die sich unmittelbar aus der Eigenschaft der Trägheit oder dem von Newton zuerst ausgesprochenen Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergibt.

Das Princip sagt aus, daß wenn ein Körper auf einen andern einen Druck ausübt, auch ein Zug oder einen Druck ausübt, daß er dann von dem andern ebenso große Gegenwirkung, also einen ebenso starken Gegengendruck erfährt. Dasselbe gibt sich überall in der Natur zu erkennen. Wenn wir einen Körper mit einer gewissen Kraft zu uns hinziehen, so fühlen wir von demselben ebenso stark angezogen, denn ziehen wir mit einer Hand an einem an einer Wand befestigten Seil, so fallen wir zurück, sobald wir es loslassen. Üben wir auf einen Körper einen Druck aus, so erfahren wir von demselben einen Gegengendruck von derselben Stärke; wird z. B. ein Gas komprimiert,

so übt die Spannung des Gases in jedem Momente auf den Stempel eines genau ebenso großen Gegendruck aus, den wir in später zu besprechender Weise mit einem Manometer messen können. Der Magnet zieht das Eisen an, genau ebenso stark zieht aber, wie wir uns mit einer Wage überzeugen können, das Eisen den Magnet an.

Wie in diesen Fällen, so in allen, so auch wenn eine Kraft einen Körper in Bewegung setzt; während der ganzen Bewegung hat dieselbe einen ihr an GröÙe genau gleichen Gegenzug zu überwinden, um den augenblicklichen Bewegungszustand des Körpers zu ändern. Daß dieser Gegenzug auch dann in der That vorhanden ist, können wir direkt durch den Versuch nachweisen. Man hänge das Übergewicht p bei der Fallmaschine an das Gewicht P mit Hülfe einer Feder, so lange P auf dem obern Teller steht. Die Feder kommt dann in einen gewissen Zustand der Spannung, der beweist, daß die Feder nach entgegengesetzten Richtungen von gleich großen Kräften gezogen wird. Denn die Feder biegt sich so lange, bis die nach beiden Seiten ziehenden Kräfte genau gleich sind. Läßt man dann das System sich bewegen, so bleibt die Feder ganz genau in derselben Weise gespannt, wie groß auch die zu bewegende Masse und wie groß auch die Geschwindigkeit ist.

Die Kraft P übt also während des ganzen Weges, durch welchen sie die Last M bewegt, den Druck P aus, wir nennen deshalb das Produkt Ps ebenso die Arbeit der Kraft, wie wir die beim Heben einer Last geleistete Arbeit durch das Produkt der gehobenen Last in die gehobene Strecke messen. Daß dort aber die Arbeit durch dieses Produkt gemessen werden muß, ergibt die einfache Überlegung, daß es dieselbe Arbeit ist, wenn wir 1 Kilogr. auf die Höhe von 2 M. heben, wie wenn wir 2 Kilogr. auf die Höhe von 1 M. heben. Denn in beiden Fällen müssen wir zweimal 1 Kilogr. auf die Höhe von 1 M. heben.

Die Gleichung

$$Ps = \frac{1}{2}mv^2$$

ist zugleich der Ausdruck eines wichtigen physikalischen Princip, welches besonders in der neueren Zeit immer vollständiger erkannt ist, und dem wir an vielen Stellen begegnen werden, des Princip von der Erhaltung der Kraft. Dieses Princip sagt aus, daß in der Natur keine Kraft gewonnen und keine verloren werden kann. Wenn demnach eine Kraft irgend eine Arbeit leistet, so ist dieselbe nicht verloren, nicht verbraucht, sondern nur in eine andere Form umgesetzt, in der man sie vollständig wiederfindet. In einem speciellen Falle zeigt das obige Gleichung, sie zeigt, daß die Arbeit der Kraft P sich vollständig als lebendige Kraft in der bewegten Masse wiederfindet. Wir können auch in der That dieselbe Arbeit aus dem Körper wiedergewinnen, wenn wir ihm seine Bewegung nehmen. Wie wir später sehen werden, geschieht das z. B. dann, wenn wir eine vollkommen elastische Kugel auf eine andere ihr gleiche stoßen lassen, welche sich in Ruhe befindet. Die ursprünglich bewegte Kugel kommt zur Ruhe, die gestoßene bewegt sich aber mit genau derselben Geschwindigkeit weiter. Gerade der Umstand, daß eine Masse M , welche die Geschwindigkeit v besitzt, eine Arbeit leisten kann, welche $\frac{1}{2}Mv^2$ gleich ist, wenn man sie zur Ruhe bringt, berechtigt dazu, dieses Produkt als lebendige Kraft dieser Masse zu bezeichnen.

Wie in diesem Falle, so können wir leicht das Princip, daß keine Kraft verloren werden kann, auch in andern Fällen nachweisen. Heben wir ein Gewicht P durch die Höhe s , so haben wir die Arbeit Ps nur in dieses Gewicht übertragen, das niedersinkende Gewicht kann genau dieselbe Arbeit wieder leisten.

In manchen Fällen glaubte die ältere Physik einen wirklichen Verlust an Kraft annehmen zu müssen, so z. B. bei der Reibung; wir werden später den Nachweis liefern, daß auch hier kein Verlust, nur eine Umsetzung der Kraft in andere Formen, vorzüglich in Wärme, stattgefunden hat.

§ 12.

Bewegung infolge inkonstanter Kräfte und Mafß derselben. Unsere experimentell abgeleiteten Sätze über die Bewegungen, welche durch konstante Kräfte hervorgebracht werden, und die allgemeinen Sätze über die Wirkung von Kräften, welche wir daraus ableiteten, gestatten uns nun ebenfalls auch im allgemeinen zu bestimmen, welcher Art die Bewegungen sein müssen, welche inkonstante Kräfte einem festen Körper oder einem materiellen Punkte erteilen. Wirken die Kräfte immer in derselben Richtung, aber mit verschiedener Stärke, so muß die Bewegung eine geradlinig fortschreitende, aber ungleichmäßig beschleunigte sein, das heißt, die Geschwindigkeitszunahme muß zu verschiedenen Zeiten in demselben Verhältnisse sich ändern, wie die Gröfße der Kraft sich ändert. Kennen wir das Gesetz, nach welchem die Kraft sich ändert, so können wir daraus auch das Gesetz bestimmen, nach welchem die Geschwindigkeit sich ändert. Denken wir uns nämlich die Zeit, während welcher die veränderliche Kraft wirkt, in hinreichend kleine Zeiteilchen zerlegt, so können wir, ohne ungenau zu sein, annehmen, daß innerhalb jedes dieser Zeiteilchen die Kraft konstant ist, und daß sich dieselbe erst vom einen zu dem andern Zeiteilchen ändert. Innerhalb eines solchen Zeiteilchens gelten dann die Gesetze konstanter Kräfte. Ist demnach F die auf die Masse M wirkende Kraft zur Zeit t , so erhalten wir für die Beschleunigung in diesem Zeitelemente, welche wir nach § 1 in dem Quotienten $\frac{dv}{dt}$ ausgedrückt haben,

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M}.$$

Ist hierin F als eine Funktion der Zeit t gegeben, so lehrt die Integration aus diesem Ausdrucke auch die Geschwindigkeit zur Zeit t und aus dieser den zurückgelegten Weg finden. Von der Form der Funktion F ist es dann, wie man sieht, abhängig, welcher Art die Bewegung sein wird, und je nach dieser Form ist auch die specielle Lösung der Aufgabe, aus der Beschleunigung Geschwindigkeit und Weg zu finden, eine verschiedene. Einzelne Fälle werden wir später behandeln.

Kennen wir das Gesetz, nach welchem eine inkonstante Bewegung erfolgt, so können wir daraus dann auch umgekehrt das Gesetz ableiten, nach welchem die veränderlichen Kräfte wirken. Kennen wir nämlich den unter der Wirkung der Kraft zurückgelegten Weg s in seiner Abhängigkeit von t , so können wir daraus zunächst für jeden Zeitpunkt t die Geschwindigkeit

$$v = \frac{ds}{dt}$$

und aus dieser die Beschleunigung $\frac{dv}{dt}$ erhalten. Für die letztere haben wir aber die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{M},$$

somit auch hier die bewegende Kraft in dem Momente, für welchen jener Quotient gebildet ist,

$$F = M \frac{dv}{dt},$$

oder wir erhalten in dem Produkte der bewegten Masse und der jedesmaligen Beschleunigung das Maß für die Größe der veränderlichen Kraft in jedem Momente der Bewegung.

Auch diesen Satz werden wir häufig anwenden, um in speciellen Fällen das Gesetz, nach welchem eine Kraft wirkt, aus der bekannten Bewegung abzuleiten.

Wirken die Kräfte auf eine bewegte Masse nicht immer in derselben Richtung ein, so wird die Bewegung der Masse nicht eine geradlinig fortschreitende, sondern die Bahn des Bewegten wird eine von dem Gesetze der Kraftwirkung abhängige krumme Linie. Eine Untersuchung dieses Falles würde uns zu weit in die theoretische Mechanik einführen. Es ist unsere Aufgabe, die experimentellen Grundlagen der Bewegungslehre aufzusuchen und aus ihnen die Gesetze abzuleiten, nach denen die Kräfte wirken; das haben wir im Bisherigen für die fortschreitende Bewegung gethan, indem wir gleichzeitig einige der wichtigsten Sätze der theoretischen Mechanik aus denselben folgerten, soweit wir dieselben zum Verständnis des Folgenden notwendig hatten. Wegen des Weitern müssen wir auf die Lehrbücher der Mechanik verweisen. Wir gehen jetzt über zur Betrachtung anderer Bewegungen, die wir in der Natur vorfinden.

Zweites Kapitel.

Von den drehenden Bewegungen.

§ 13.

Entstehung der drehenden Bewegung. Wir haben bereits mehrfach erwähnt, daß ein Lot, wenn es aus seiner vertikalen Richtung gebracht wird, nicht einfach in diese zurückfällt, sondern eine Bewegung um die senkrechte Lage ausführt. Ganz dasselbe sehen wir, wenn wir einen festen Stab an seinem einen Ende an einer horizontalen Axe befestigen, so daß ihm eine Bewegung in der vertikalen Ebene gestattet bleibt. Sich selbst überlassen sinkt er herab und macht Schwingungen um die senkrecht nach unten gerichtete Lage. Solche Bewegungen, bei denen jeder Punkt Kreise um einen festen Mittelpunkt beschreibt mit einem Radius, der gleich ist seinem Abstände von der Drehungsaxe, nennen wir drehende Bewegungen.

Bei den drehenden Bewegungen können wir, ebenso wie bei den fortschreitenden, von einer Geschwindigkeit und Beschleunigung sprechen, di

wir hier jedoch nicht auf die absolut zurückgelegten Räume, sondern auf die Bogen beziehen, welche die einzelnen Punkte eines in drehender Bewegung begriffenen Körpers beschreiben. Demnach legen wir zweien in drehender Bewegung begriffenen Körpern gleiche Winkelgeschwindigkeit bei, wenn ihre einzelnen Punkte in gleichen Zeiten gleiche, verschiedene, wenn sie in gleichen Zeiten verschiedene Bogen zurücklegen.

Es ist klar, daß dabei die Wege, welche verschiedene Punkte mit gleicher Winkelgeschwindigkeit zurücklegen, absolut genommen sehr verschieden sein können, indem die absolute Länge der Bögen proportional ist dem Abstände der Punkte von der Drehungsaxe.

Ist die Winkelgeschwindigkeit eine ungleichförmige, so gilt alles, was wir im § 1 über die fortschreitende Bewegung gesagt haben, auch hier, wenn wir nur statt der Längen die beschriebenen Bögen in Winkelmaß einführen.

Die drehende Bewegung wird ebenso von Kräften veranlaßt als die fortschreitende, daß es aber nur Kräfte sind, die in einer ganz bestimmten Richtung wirken, läßt sich sofort erkennen.

Wir setzen voraus, daß unserem Stabe nur eine Bewegung in der Drehungsebene gestattet ist; es ist klar, daß dann alle Kräfte, welche senkrecht zu dieser Ebene, also parallel zur Drehungsaxe wirken, unwirksam sind, und daß von Kräften, die unter einer andern Neigung gegen diese Ebene wirken, nur der Teil thätig sein kann, dessen Richtung in die Drehungsebene fällt, wenn wir die ganze Kraft nach § 8 in eine zu der Drehungsebene senkrechte und in eine andere zerlegt haben, deren Richtung in die Drehungsebene fällt.

Aber auch der Teil kann nicht immer vollständig zur Erzeugung der Bewegung dienen. Wirkt z. B. auf den bei *A* um eine horizontale Drehungsaxe beweglichen Stab *AB* bei *B* eine Kraft nach der Richtung *Bc*, so können wir diese nach § 8 ebenfalls in

zwei Teile zerlegen, die zu einander senkrecht, eine in der Richtung *Bd*, die andere in der Richtung *Be* wirksam sind. Die erstere dieser Kräfte *Bd* übt nur einen Zug in der Richtung senkrecht zur Axe; ihr wird durch die Befestigung des Punktes *A* und den Zusammenhang der Teile des Stabes *AB* das Gleichgewicht gehalten. Nur die andere Kraft *Be* kann eine drehende Bewegung des Stabes um die Axe bei *A* veranlassen.

Wir sehen also, von allen Kräften, welche auf einen Körper wirken, der um eine feste Axe drehbar ist, können nur diejenigen eine drehende Bewegung erzeugen, welche in einer zur Drehungsaxe senkrechten Ebene senkrecht auf die Verbindungslinie des Angriffspunktes mit der Drehungsaxe wirken.

Die Schwere ist nun bei dem in *A* aufgehängten Stabe eine solche Kraft. Hat der Stab die horizontale Lage, so treibt das Gewicht jedes Theiles des Stabes ihn herunter, und deshalb sinkt er nieder. Die schwingenden Bewegungen um die senkrechte Lage sind dann die Folge davon, daß die Schwere, sobald der Stab die horizontale Lage verlassen hat, nur mehr ein Theil wirkt, indem dann nur eine, je mehr sich der Stab der senk-

Fig. 18.



rechten Lage nähert, immer kleiner werdende Komponente ihn antreibt, auf der andern Seite aber die aufsteigende Bewegung des Stabes durch die Schwere gehemmt wird. Ehe wir jedoch diese Bewegung genauer untersuchen, müssen wir uns zu der Frage wenden, ob es gleichgültig für die entstehende Bewegung sei, in welchem Abstände von der Drehungsaxe eine Kraft auf unseren Stab wirkt.

§ 14.

Die statischen Momente. Wenn wir einen Stab an einer festen vertikalen Drehungsaxe C aufhängen, so kann ihm nach dem Vorigen die Schwere, welche dann der Drehungsaxe parallel wirkt, keine Bewegung mitteilen. Wenn wir dann an dem Stabe ein und dieselbe Kraft einmal

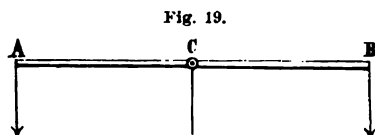


Fig. 19.

in A , dann in C und später in B anbringen, so ist die Wirkung derselben immer eine andere. In A angebracht bringt dieselbe eine Drehung hervor, bei C nicht und bei B wieder eine Drehung, welche aber der erstern entgegengesetzt

ist. Die Kraft hat also je nach ihrem Angriffspunkte ganz verschiedene Wirkungen. Wie diese mit dem Angriffspunkte sich ändern, haben wir jetzt näher zu untersuchen.

Zu dem Ende wenden wir einen gleichmäßig gearbeiteten Stab an, der an allen Stellen gleich dick ist, so daß gleiche Längen desselben Stabes gleich schwer sind. Führen wir durch die Mitte seiner Länge eine Axe, die wir horizontal befestigen, so finden wir, daß er in Ruhe bleibt, daß er keine Drehung unter dem Einflusse der Schwere annimmt. Der Grund dieser Erscheinung ist nach der eben gemachten Bemerkung klar; denn die Schwere will den beiden Hälften des Stabes entgegengesetzte Drehungen erteilen; da die beiden Hälften des Stabes sich aber nicht eine ohne die andere drehen können, so heben sich die Drehungen auf.

Befestigen wir nun an dem Ende B (Fig. 20) unserer so aufgehängten Stange ein Gewicht P , so muß dieselbe eine Drehung annehmen, da jetzt

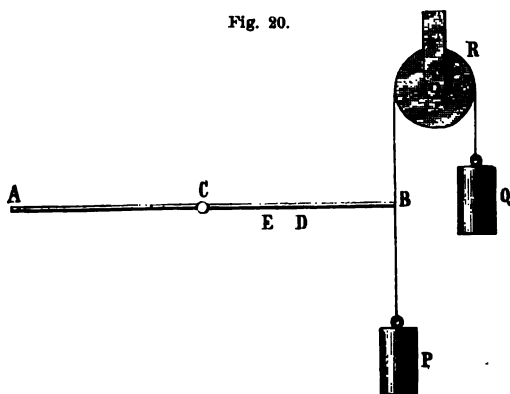


Fig. 20.

eine Kraft auf unseren Körper einwirkt, welche senkrecht ist zur Verbindungslinie des Angriffspunktes und der Drehungsaxe in der senkrecht zur Drehungsaxe gelegten Vertikalebene.

Bringen wir aber nun an eben dem Punkte B eine nach oben gerichtete Kraft von genau gleicher Größe an, etwa indem wir an B einen Faden befestigen, diesen über eine feste Rolle R führen und an der andern

Seite des Fadens das Gewicht $Q = P$ anbringen, so tritt keine Drehung des Stabes ein. Dies ist nach dem Früheren auch nicht zu erwarten, das

ewicht P wird durch ein ihm genau gleiches, aber nach entgegengesetzter Richtung wirkendes Äquilibrirt.

Verschieben wir nun aber das Gewicht P von B nach D hin, so sehen wir sofort, daß unser Stab sich dreht und zwar in einem dem frühern entgegengesetzten Sinne; er folgt dem Zuge, den das Gewicht Q auf ihn ausübt, obwohl das genau gleiche Gewicht P den Stab nach unten zu drehen sucht. Es folgt daraus, daß eine Kraft einen Körper um so leichter zu drehen vermag, je weiter ihr Angriffspunkt von der Drehungsaxe entfernt ist. Wenn wir das Gewicht P nun vergrößern, so sehen wir bald, daß er imstande sind, die Drehung wieder aufhören zu machen. Ist nämlich $D = \frac{1}{2} CB$, so hört die Drehung auf, sobald das Gewicht P verdoppelt ist, sobald wir also statt P das Gewicht $2P$ an D angehängt haben. Eine neue Verschiebung des Gewichtes ruft sofort wieder Bewegung hervor, entweder nach unten, wenn wir das Gewicht dem Ende B nähern, oder nach oben, wenn wir das Gewicht der Drehungsaxe nähern. Welches aber auch der Abstand a von C sei, in welchem wir das Gewicht aufhängen, immer werden wir, daß eine entsprechende Änderung der Gewichte das Gleichgewicht wieder herstellt und zwar, wenn wir das Gewicht P so ändern, als das Verhältnis besteht

$$P : Q = CB : a,$$

oder daß

$$a \cdot P = CB \cdot Q.$$

Es folgt daraus, daß zwei Kräfte, welche einem Körper eine entgegengesetzte Drehung zu erteilen suchen, sich im Gleichgewicht halten, wenn sie sich verhalten umgekehrt wie die Abstände ihrer Angriffspunkte von der Drehungsaxe, oder wenn die Produkte aus den Kräften und den Abständen ihrer Angriffspunkte gleich sind. Diese Produkte nennt man die statischen oder mechanischen Momente; so daß wir also den Satz so ausrechnen können: (Zwei Kräfte, welche einem Körper entgegengesetzte Drehungen zu erteilen suchen, halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre mechanischen Momente gleich sind.)

Wir sahen eben, daß eine zwischen C und A angebrachte nach unten gerichtete Kraft unseren Stab in demselben Sinne zu drehen sucht wie das Gewicht Q . Anstatt zwischen C und B eine nach oben ziehende Kraft anbringen, können wir daher eine ihr genau gleiche, in gleichem Abstände von C zwischen C und A anbringen. Auch dann wird nach dem obigen Satze eine Bewegung nicht eintreten können, wenn die Momente gleich sind. Der Versuch bestätigt diese Folgerung unmittelbar.

Wenn wir anstatt des einen Gewichtes P eine Reihe von verschiedenen Gewichten $p, p', p'' \dots$ in den Abständen $d, d', d'' \dots$ anbringen und statt des einen Gewichtes Q eine Anzahl Gewichte $q, q', q'' \dots$ in den Abständen $e, e', e'' \dots$, so folgt unmittelbar und zeigt uns der Versuch, daß Gleichgewicht ist, wenn die Summe der Momente nach der einen Richtung gleich ist der Summe der Momente nach der andern Richtung, wenn also

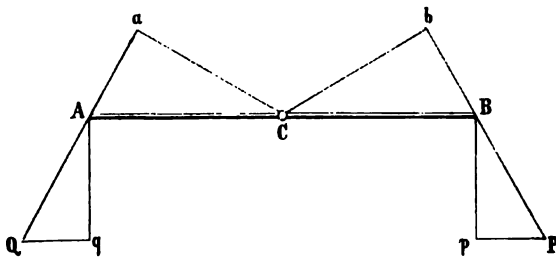
$$pd + p'd' + p''d'' \dots = qe + q'e' + q''e'' \dots$$

Wir können nun, wie man es in der Geometrie zu machen pflegt, entweder die Kräfte p, q , wenn sie nach entgegengesetzter Richtung wirken,

oder die Richtungen d, e , die an entgegengesetzter Seite der Drehungsaxe liegen, mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehen und dann unsern Satz kurz dahin aussprechen, daß sich ein drehbarer Körper im Gleichgewicht befindet, wenn die Summe der Drehungsmomente der auf ihn einwirkenden Kräfte gleich Null ist.

Wir haben bisher zwar alle Kräfte, welche nicht senkrecht auf der Verbindungslinie ihres Angriffspunktes und der Drehungsaxe wirken, aus der Betrachtung ausgeschlossen, aber auch auf solche Kräfte läßt sich der soeben erkannte Satz ausdehnen, wenn man nur anstatt des Abstandes

Fig. 21.



des Angriffspunktes der Kraft von der Drehungsaxe den senkrechten Abstand der Richtung der Kraft von der Drehungsaxe einführt. Denn wirkt z. B. auf unsere Stange AB an dem Hebelarm (so nennt man kurz den Abstand des Angriffspunktes der Kraft von

der Drehungsaxe, während man den ganzen Stab als Hebel bezeichnet) CB die Kraft P , aber in einer zu CB nicht senkrechten Richtung, so wirkt eigentlich von dieser Kraft nur

$$p = P \cos \alpha,$$

wenn wir mit α den Winkel pBP bezeichnen und das Moment der Kraft ist $P \cos \alpha \cdot CB$.

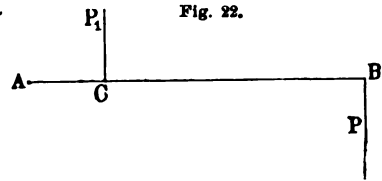
Der senkrechte Abstand der Kraft P von der Drehungsaxe ist aber gleich Cb . Da nun aber Cb senkrecht auf bP und CB senkrecht auf pP ist, so ist auch $\angle bCB = \alpha$ und $Cb = CB \cdot \cos \alpha$; also

$$P \cdot Cb = P \cos \alpha \cdot CB.$$

Man sieht, daß es gleichwertig ist, das Moment der Kraft P als $p \cdot CB$ oder als $P \cdot Cb$ zu nehmen, daß also unter der soeben gemachten Restriction der Satz von den Momenten auch für Kräfte gilt, welche nicht senkrecht zu ihrem Hebelarm sind.

Den Satz, daß bei der drehenden Bewegung zwei Kräfte sich das Gleichgewicht halten, wenn sie sich umgekehrt verhalten wie ihre Abstände von der Drehungsaxe, haben wir im Vorigen als einen experimentellen Erfahrungssatz hingestellt. Man kann indes diesen Satz auch als eine Folge der im vorigen Kapitel abgeleiteten Sätze über die Arbeit der Kraft erhalten. (Aus jenen Sätzen ergibt sich nämlich, daß ein System, an welchem Kräfte an verschiedenen Punkten, welche starr mit einander verbunden sind, wirken, im Gleichgewicht sein muß, wenn bei der Bewegung des Systems in dem einen Sinne genau soviel Arbeit geleistet wird wie bei der Bewegung im entgegengesetzten Sinne.) Um die Bedeutung des Satzes und seine Richtigkeit zu erkennen, sei AB (Fig. 22) ein starrer Hebel, den wir uns ohne Gewicht denken wollen. Derselbe liege horizontal und sei bei A um eine

vertikale Axe drehbar. Im Punkte C , im Abstände l_1 von der Drehungsaxe sei eine Schnur an dem Hebel befestigt, diese sei über eine Rolle geführt und trage das Gewicht P_1 . Ebenso sei bei B im Abstände l von der Drehungsaxe eine Schnur angebracht, welche das Gewicht P trage. Sinkt das Gewicht P , so muß P_1 gehoben werden, sinkt P_1 , so muß P gehoben werden. Daß nun, wenn zum Heben des Gewichtes P_1 eine Arbeit geleistet werden muß, welche gleich ist der Arbeit des Gewichtes P , das ist gleich dem Produkte aus P und



dem von ihm zurückgelegten Wege, durch diese beiden an dem Hebel angreifenden Kräfte keine Bewegung entstehen kann, das ergibt sich folgendermaßen. Würde durch die konstant wirkende Kraft P das System aus der Ruhe in Bewegung versetzt, so würde ebenso in jedem Momente die Bewegung geändert, somit eine gleichförmig beschleunigte Bewegung entstehen müssen. Dadurch erhielten die Massen der Gewichte P und P_1 eine mit der Zeit wachsende lebendige Kraft, welche wieder einen gewissen Arbeitsvorrat repräsentiert. Wir würden demnach durch das niedersinkende Gewicht die der Arbeit der Kraft P gleiche Arbeit des Emporhebens von P_1 leisten, außerdem noch in der Form von lebendiger Kraft einen mit der Zeit wachsenden Vorrat von Arbeit erhalten, diese letztere Arbeit somit ohne einen entsprechenden Aufwand von Kraft, somit aus nichts schaffen. Das widerspricht aber dem Principe von der Erhaltung der Kraft. Ist demnach die bei der Bewegung in dem einen Sinne zu leistende Arbeit gleich jener im entgegengesetzten Sinne, so müssen sich die Kräfte P und P_1 im Gleichgewicht halten.

Um daraus die Bedingung des Gleichgewichts zu erhalten, denken wir uns, der Hebel werde in dem Sinne der Kraft P um den sehr kleinen Bogen φ gedreht, so sinkt das Gewicht P um die Strecke $l\varphi$, die diesem Sinken entsprechende Arbeit ist $P \cdot l \cdot \varphi$. Dabei würde das Gewicht P_1 um $l_1 \cdot \varphi$ gehoben, die geleistete Arbeit wäre somit $P_1 \cdot l_1 \cdot \varphi$, die Bedingung, daß keine Bewegung eintritt, ist somit

$$Pl\varphi = P_1l_1\varphi$$

oder

$$Pl = P_1l_1,$$

die mechanischen Momente müssen gleich oder ihre Summe, dieselbe gebildet wie vorhin, muß gleich Null sein.

Ganz in derselben Weise erhält man aus diesem Princip die Bedingung des Gleichgewichtes, wenn an dem Hebel beliebig viele Kräfte angreifen; es müssen auch dann, wenn Gleichgewicht bestehen soll, die bei einer eintretenden Drehung auf beiden Seiten geleisteten Arbeiten gleich sein, somit muß die Summe aller statischen Momente gleich Null sein.

Das soeben zur Ableitung des Satzes von den statischen Momenten angewandte Princip, daß, wenn die von den thätigen Kräften bei einer Bewegung des Systems nach entgegengesetzter Richtung geleisteten Arbeiten einander gleich sind, das System durch diese Kräfte keine Bewegung annehmen kann, gilt, wie leicht ersichtlich, nicht nur in dem speciellen Falle,

an dem wir es erläutert haben, sondern ganz allgemein. Haben wir ein System von Punkten, an dem irgend welche Kräfte angreifen, bei einer beliebigen Bewegung des Systems die von den Kräften geleistete Arbeit gleich derjenigen, die bei der gerade entgegengesetzten Bewegung geleistet wird, so können die Kräfte keine Bewegung erzeugen, sondern sich das Gleichgewicht. Das so allgemein ausgesprochene Princip man das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, eine Bezeichnung andeuten soll, daß die Bewegungen, welche man zur Bestimmung der Arbeit betrachtet, eben nur gedachte, nicht wirklich stattfindende der Mechanik wird dieses Princip vielfach angewandt, um die Bedingung des Gleichgewichts für ein System von Punkten, an welchen Kräfte angreifen, zu formulieren.

Da bei der drehenden Bewegung Kräfte, deren Drehungsmoment gegengesetzt gleich sind, sich das Gleichgewicht halten, so folgt auch an einem Körper angreifende Kräfte demselben eine gleiche drehende Bewegung, also in gleichen Zeiten gleiche Winkelgeschwindigkeiten, wenn die Kräfte gleiche Momente haben. Die Winkelgeschwindigkeit gleich jener, welche eine im Abstände eins von der Drehungsaxe an Kraft dem Körper erteilt, deren Drehungsmoment den gegebenen Drehungsmomenten gleich ist. Da nun das Drehungsmoment einer im Abstände eins angreifenden Kraft soviel Einheiten hat, wie die Kraft Einheiten beträgt, folgt, daß die im Abstände eins angreifende Kraft soviel Einheiten betragen muß, als die gegebenen Drehungsmomente Einheiten besitzen, man kurz sagt, daß die Kraft den gegebenen Drehungsmomenten gleich sein muß. Die Summe der gegebenen Drehungsmomente gibt uns die Größe der Kraft, welche im Abstände eins von der Drehungsaxe gebracht dieselbe drehende Bewegung erzeugt wie die gegebenen Drehungsmomente.

§ 15.

Zusammensetzung verschieden gerichteter Drehungen. Wir haben bisher vorausgesetzt, daß der drehbare Körper sich nur um eine bestimmte Drehungsaxe drehen könnte; es ist aber möglich, daß ein Körper gleichzeitig um verschiedene Drehungsaxen drehen kann und nach verschiedenen Richtungen, nach denen er sich drehen kann, gleichzeitig getrieben wird. Es fragt sich dann, ob diese Drehungen sich zu einer resultierenden Drehung zusammensetzen, wie verschiedene gleichförmige fortschreitende Bewegungen eine Resultierende ergeben, und welche Richtung und Größe der resultierenden Drehung ist. Wir können einen solchen Fall etwa in folgender Weise realisiert denken. Wir nehmen eine massive Kugel in ein kleines Segment einer Hohlkugel von gleichem Radius und decken, um die Kugel an der fortschreitenden Bewegung zu hindern, ein ebensolches Segment oben auf die Kugel. Eine solche Kugel kann sich dann um jede beliebige durch den Mittelpunkt derselben Axe drehen. Um diese Kugel nach verschiedenen Richtungen zu treiben, denken wir uns in der Oberfläche derselben, größtmöglichst folgend, einige Rinnen eingeschnitten, und in diese Rinnen Schnüre in ähnlicher Weise wie bei der Rolle der Fallmaschine. Üben wir an mehreren dieser Schnüre einen Zug aus, so erhält die Kugel eine

momente um alle Axen, welche zu den größten Kreisen, um welche die betreffenden Schnüre gelegt sind, senkrecht stehen.

Nehmen wir an, es werde die Kugel nach zwei gegen einander geneigten Richtungen angetrieben, so ergeben dieselben Überlegungen, die wir bei Entwicklung des Satzes vom Kräfteparallelogramm machten, daß die infolge der beiden Antriebe eintretende Bewegung in ihrer Richtung nicht mit der Richtung der Antriebe zusammenfallen kann, daß die Drehungsrichtung vielmehr zwischen die Richtung der beiden Antriebe fallen muß. Betrachten wir irgend einen Punkt auf der Oberfläche der Kugel, der infolge des ersten Antriebes, wenn er für sich allein wirksam wäre, den Bogen α beschreiben würde, infolge des zweiten Antriebes in der gegen die erste geneigten Richtung aber den Bogen β , so muß der unter gleichzeitiger Wirkung der beiden Antriebe in derselben Zeit von dem betrachteten Punkte erreichte Ort ganz derselbe sein, wie wenn sich der Punkt die gleiche Zeit hindurch mit der gleichen Geschwindigkeit erst in der einen, dann in der andern Richtung gedreht hätte, also in beiden Richtungen nach einander in der einen den Bogen α , in der andern β beschrieben hätte. Die Bahn des Punktes muß dann der Bogen sein, der den Ausgangspunkt und den so bestimmten Ort des Punktes nach der Bewegung verbindet. Dieser Bogen ist aber die Diagonale des aus den Bögen α und β auf der Kugel gebildeten Vierecks. Die Drehungsaxe, um welche eine einfache Drehung durch den von dieser Diagonale der Größe und Richtung nach gegebenen Bogen genau dieselbe Drehung dieses und damit aller Punkte der Kugel ergeben haben würde, ist diejenige Axe der Kugel, welche zu dem Kreise, zu welchem der resultierende Bogen gehört, senkrecht ist. Diese Axe liegt in den durch die beiden gegebenen Axen bestimmten Ebenen und bildet mit jeder derselben den gleichen Winkel, welchen der resultierende Bogen mit den Bögen α und β bildet.

Aus dieser letzteren Bemerkung erkennt man, daß man die Richtung der resultierenden Axe und auch die Größe der resultierenden Drehung durch eine ebene Konstruktion erhalten kann. Wir legen durch die beiden ursprünglich gegebenen Axen eine Ebene und tragen von dem Punkte, wo sich die Axen schneiden, auf denselben die Bögen α und β als Seiten eines Parallelogrammes auf. Die durch den Schnittpunkt der Axen gelegte Diagonale des vervollständigten Parallelogramms ist dann die Axe der resultierenden Drehung, und gleichzeitig ist die Länge der Diagonale die Größe der resultierenden Drehung.

Um die Richtigkeit dieser Konstruktion zu erkennen, seien AB und CD (Fig. 23) die beiden sich im Mittelpunkte O der Kugel schneidenden Drehungsaxen, und setzen wir voraus, daß wir in der Axe OB stehend den Kopf bei O , den Fuß bei B , die Drehung in demselben Sinne, und zwar von links nach rechts, erfolgen sehen, wie die Drehung um die Axe OD , wenn wir in dieser stehen, den Kopf bei O und den Fuß bei D . Wir wollen zunächst annehmen, die Drehungen erfolgen mit gleichförmiger Bewegung und die Bögen α und β seien die in einer Sekunde beschriebenen Bögen, also gleichzeitig die beiden gegebenen Winkelgeschwindigkeiten. Wir tragen dann auf OB den Bogen $\alpha = Ob$, auf OD den Bogen $\beta = Od$ auf, ergänzen das Parallelogramm $ObEd$ und erhalten in OE die Richtung der resultierenden Drehungsaxe und die Größe des Bogens γ , um welchen der

Zeichnung liegenden Punktes J . Wir wollen nur, um die Zeichnung nicht zu sehr zu complicieren, annehmen, dieser Punkt liege auf der Verlängerung der vorher durch den Punkt F gelegten zu OB senkrechten Richtung FG . Da der Punkt F ein vorher ganz beliebig auf der Axe angenommener ist, so geschieht durch diese Voraussetzung der Allgemeinheit unserer Betrachtung kein Eintrag. Die Verschiebung des Punktes J in der Zeit dt im Sinne der Drehung um OB ist dann

$$(GJ \cdot \alpha - JK \cdot \beta) dt.$$

Ziehen wir JL parallel OD , so können wir diesen Ausdruck schreiben

$$\{(GF + FJ)\alpha - (FH - FL)\beta\} dt = (FJ \cdot \alpha + FL \cdot \beta) dt.$$

Da, wie vorher gezeigt wurde, OM die resultierende Drehungsaxe ist, so können wir, wenn $JM \perp OM$, die resultierende Drehung um OE resp. die in der Zeit dt in demselben Sinne eintretende Verschiebung des Punktes J durch die Winkelgeschwindigkeit γ ausdrücken

$$MJ \cdot \gamma \cdot dt$$

und haben dann zu zeigen, daß $\gamma = OE$ ist. Aus den beiden Ausdrücken für die Verschiebung des Punktes J erhalten wir

$$\gamma = \frac{FJ \cdot \alpha + FL \cdot \beta}{MJ}.$$

In dem Dreieck FJM ist der Winkel an J , da $MJ \perp MO$, $FJ \perp OB$, gleich dem Winkel GOE , demnach

$$MJ = FJ \cdot \cos GOE,$$

in dem Dreiecke JFL ist der Winkel an F , da $FH \perp OH$, $FJ \perp OB$, gleich dem Winkel GOH , welchen die beiden gegebenen Axen mit einander bilden, demnach

$$FL = FJ \cdot \cos GOH,$$

somit

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta \cdot \cos GOH}{\cos GOE}.$$

Ziehen wir nun EN senkrecht zu OG , so sieht man, daß der Zähler dieses Ausdrucks die Kathete ON des rechtwinkligen Dreiecks ENO ist, welche mit der Hypotenuse EO den Winkel GOE einschließt; daraus folgt, daß der Ausdruck auf der rechten Seite eben dieser Hypotenuse gleich ist, oder daß

$$\gamma = OE.$$

Die Diagonale OE ist somit die aus den beiden gegebenen Drehungen α und β resultierende Drehung.

Wir haben hierbei zunächst vorausgesetzt, daß die Drehungen mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgen, diese Beschränkung können wir aber ohne weiteres fallen lassen, wenn wir α und β als die dem betrachteten Augenblicke oder der Zeit dt entsprechenden Drehungsgeschwindigkeiten bezeichnen. Es bedeutet dann γ die aus diesen beiden resultierende augenblickliche Drehungsgeschwindigkeit um die Axe OE . Die ganze Entwicklung behält auch unter dieser Voraussetzung ihre strenge Gültigkeit.

Wir erhalten somit ganz allgemein die aus zwei gegen einander geneigten Drehungen resultierende Drehungsgeschwindigkeit, indem wir von dem Schnittpunkte der beiden Axen die gegebenen Drehungsgeschwindigkeiten so auftragen, daß wir den Kopf im Schnittpunkte der Axen gedacht und in die Richtung, nach welcher wir die gegebenen Drehungen aufgetragen haben, uns stellend, die Drehungen im gleichen Sinne erfolgend sehen, und dann die Diagonale des aus den beiden aufgetragenen Längen gebildeten Parallelogramms ziehen. Die Diagonale gibt der Größe und Richtung nach die resultierende Drehungsgeschwindigkeit. Man kann somit die Drehungen hiernach gerade so zusammensetzen, wie fortschreitende Bewegungen.

Ganz dieselbe Konstruktion liefert uns, gerade wie bei dem Kräfteparallelogramm, auch das aus zwei gegebenen gegen einander geneigten Drehungsmomenten resultierende Drehungsmoment, das heißt das Drehungsmoment, welches an Stelle der gegebenen um die resultierende Axe wirkend genau dieselbe Drehung hervorbringt. Ersetzen wir in unserer Konstruktion die augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten durch die Winkelbeschleunigungen, so sind diese, wie wir sahen, den Drehungsmomenten proportional. Damit ist der Satz vom Kräfteparallelogramm auch sofort auf die Drehungsmomente ausgedehnt, indem wir dieselben als Längen auf die Drehungsaxen auftragen und diese Längen zur Konstruktion benutzen.

Ebenso wie zwei Drehungen oder Drehungsmomente können wir in derselben Weise auch beliebig viele zu einer Resultierenden zusammensetzen, indem wir sie paarweise vereinigen.

Gerade so wie eine gegebene fortschreitende Bewegung können wir nun auch eine gegebene Drehung in andere zerlegen, so besonders auch die Komponenten nach zwei zu einander senkrechten Richtungen bestimmen. Die Ausdrücke für die Komponenten fallen nach den soeben gemachten Entwicklungen ganz mit denen für die Komponenten einer fortschreitenden Bewegung zusammen. Die Komponente der Drehung um eine Axe, welche mit der gegebenen Axe den Winkel φ bildet, ist gleich der gegebenen Drehung multipliziert mit dem Cosinus des Winkels φ . Wirkt also auf einen Körper ein Drehungsmoment ein, dessen Axe mit der Richtung der Axe, um welche sich der Körper drehen kann, einen Winkel bildet, so erhalten wir in dem Produkte aus dem gegebenen Drehungsmomente und dem Cosinus dieses Winkels auch das Drehungsmoment, welches die mögliche Drehung bewirkt.

§ 16.

Mittelpunkt paralleler Kräfte. Wenn an einem Hebel AB eine Reihe von parallelen Kräften wirkt, und es ist der Punkt C , in Bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist, unterstützt, so tritt keine drehende und auch keine fortschreitende Bewegung ein. Würde dann die Unterstützung fortgenommen, so nähme der Stab infolge der parallel wirkenden Kräfte eine fortschreitende Bewegung in der Richtung der wirkenden Kräfte an. Diese können wir jedoch hemmen, wenn wir an dem Punkte C (Fig. 24) in entgegengesetzter Richtung eine Kraft anbringen, welche gleich ist der Summe $P + Q$ der gegebenen Kräfte. Die im Punkte gebrachte Kraft $P + Q$ hält also den beiden einzelnen in A und B

angreifenden Kräfte Q und P das Gleichgewicht. Diese beiden Kräfte wirken also zusammen ebenso, als wenn am Punkte C eine ihrer Summe $P + Q$ gleiche Kraft angebracht wäre.

Wir schließen demnach, daß auch parallele Kräfte eine Resultierende haben, welche ihrer Summe gleich ist, und daß diese Resultierende an jenem Punkte angreift, in Bezug auf den die Summe der Momente gleich Null ist, d. h. daß die verteilt angebrachten Kräfte gerade so wirken, als wenn an diesem Punkte alle Kräfte angebracht wären. Dieser Punkt heißt daher der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Daß in der That der Punkt, in Bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist, der Mittelpunkt der parallelen Kräfte ist, und daß die Mittelkraft der Summe der einzelnen Kräfte gleich ist, können wir auch ohne Versuch schon aus dem Satze vom Kräfteparallelogramm beweisen. Sei zu dem Ende AB (Fig. 25) eine feste Linie, an deren Enden die beiden Kräfte P und Q parallel nach derselben Richtung wirkend angebracht seien;

Fig. 24.

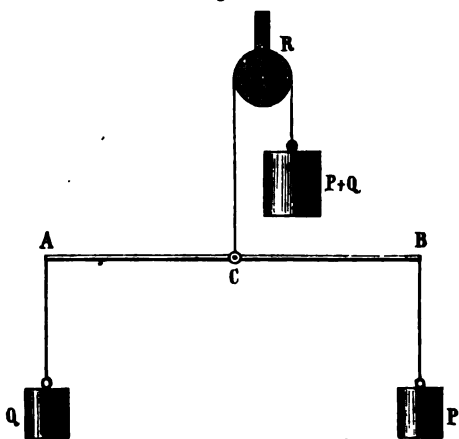
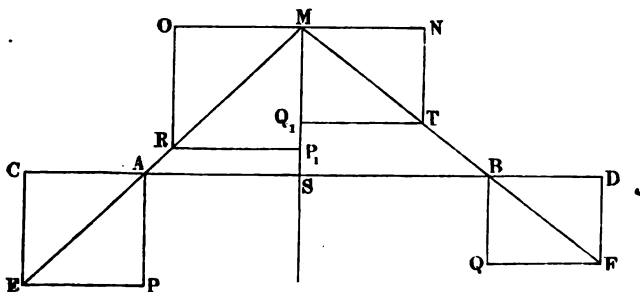


Fig. 25.



die Längen AP und BQ stellen diese Kräfte dar. Bringen wir nun an A und B die beiden gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte AC und BD an, so wird, da sie sich gegenseitig aufheben, durch dieselben am System gar nichts gestört. Die je zwei Kräfte AC und AP , sowie BQ und BD geben eine Resultierende, welche der Größe und Richtung nach durch die Diagonalen AE und BF der Parallelogramme $APCE$ und $BQFD$ gegeben ist. Verlängern wir diese beiden Diagonalen rückwärts, bis sie sich im Punkte M schneiden, und denken wir uns den Punkt M mit der Linie AB in fester unveränderlicher Verbindung, so können wir uns die beiden Kräfte AE und BF an dem Punkte M in MR und MT angebracht denken. Die Verhältnisse des Systems werden dadurch nicht geändert. Die

beiden Kräfte MR und MT können nun nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm zerlegt werden und zwar MR in $OM = AC$ und $MP_1 = AP$ und MT in $MN = BD$ und $MQ_1 = BQ$. Die beiden Kräfte MO und MN heben sich auf, und es bleibt zuletzt als Resultierende die Summe der beiden Kräfte P und Q . Daraus folgt zunächst, daß zwei parallele Kräfte eine ihrer Summe gleiche Resultierende oder Mittelkraft haben, deren Richtung jener der gegebenen Kräfte parallel ist, und die in einem Punkte S zwischen A und B die feste Linie AB schneidet. Die Lage dieses Punktes S auf AB erhält man aus den ähnlichen Dreiecken $ASM \sim RP_1M$ und $BSM \sim TQ_1M$. Dieselben geben nämlich

$$AS : SM = RP_1 : P_1M$$

$$BS : SM = Q_1T : Q_1M.$$

Und daraus, da $SM = SM$, $RP_1 = Q_1T$, $P_1M = P$, $Q_1M = Q$,

$$AS \cdot P = BS \cdot Q,$$

dieselbe Bedingung, welche wir soeben experimentell ableiteten, der Punkt S liegt so, daß in Bezug auf ihn die Summe der Momente gleich Null ist.

Daß die so bestimmte Resultierende auch in Bezug auf die drehende Bewegung die gegebenen Kräfte vollständig ersetzt, das heißt daß sie unter allen Umständen genau dasselbe Drehungsmoment liefert, erkennen wir folgendermaßen.

Haben wir eine Anzahl von Kräften $p_1, p_2 \dots$, welche in den Abständen $l_1, l_2 \dots$ vom Mittelpunkte angreifen, so ist die Summe

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 + \dots = 0.$$

Legen wir durch das System eine Drehungsaxe, dessen zur Kraft-richtung senkrechter Abstand von dem Mittelpunkte gleich x ist, so wird in Bezug auf diese das Drehungsmoment

$$p_1(l_1 + x) + p_2(l_2 + x) + \dots = p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots + (p_1 + p_2 + \dots)x$$

Da der Voraussetzung nach

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + \dots = 0,$$

so folgt für das Drehungsmoment in Bezug auf die angenommene Axe

$$(p_1 + p_2 + \dots)x,$$

also ganz dasselbe, wie wenn im Mittelpunkte die Summe aller Kräfte angebracht wäre.

Wir haben bisher vorausgesetzt, daß die einander parallelen Kräfte auch gleich gerichtet seien, aber ebenso haben zwei parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte im allgemeinen eine Resultierende. Um die Größe derselben und ihren Angriffspunkt zu finden, sei AB Fig. 26 wieder eine feste Linie, an deren Punkten A und B die beiden Kräfte P und Q wirken. Wir können nun P als Mittelkraft zweier anderer betrachten, von denen die eine bei B angreift und der Kraft Q genau gleich ist, während die andere gleich $P - Q$ ist und in einem Punkte S angreift, dessen Lage durch die Bedingung gegeben ist, daß

$$AS \cdot (P - Q) = AB \cdot Q$$

$$AS = AB \cdot \frac{Q}{P - Q}.$$

Die beiden Kräfte Q und Q_1 heben sich auf, da sie an demselben Punkte nach entgegengesetzten Richtungen wirken. Es bleibt also als Resultierende die Differenz der gegebenen Kräfte übrig, deren Richtung der ursprünglichen parallel ist, und deren Angriffspunkt wieder jener Punkt ist, in Bezug auf welchen die Summe der Momente gleich Null ist. Denn aus der Gleichung für AS folgt

$$AS \cdot P = (AS + AB)Q = SB \cdot Q.$$

In einem Falle jedoch haben parallele Kräfte keine Resultante, bringen sie also ein ganz freies System von Punkten nicht in eine fortschreitende Bewegung, nämlich dann, wenn sie einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Dafs in dem Falle keine resultierende Kraft vorhanden ist, folgt zunächst aus dem soeben abgeleiteten Satze, nach welchem bei entgegengesetzt gerichteten Kräften die Resultante gleich der Differenz der beiden Kräfte ist, es folgt aber weiter aus der Gleichung für die Lage des Angriffspunktes

$$AS = AB \cdot \frac{P}{P - Q}.$$

Da nämlich in diesem Falle $P - Q = 0$ ist, so wird AS unendlich, oder es gibt keinen in endlicher Entfernung von A liegenden Punkt, an dem die Mittelkraft anzubringen wäre, es gibt also keine Mittelkraft.

Ein solches Kräftepaar bringt deshalb nur eine drehende Bewegung hervor um irgend einen zwischen A und B liegenden Punkt, und das statische Moment eines solchen Paares ist gleich dem Produkte aus einer der Kräfte und dem senkrechten Abstände beider. Denn welchen Punkt wir uns auch als fest denken, wo auch der Punkt O (Fig. 26) liegt, das Drehungsmoment ist, da beide Kräfte das System in demselben Sinne drehen, $P \cdot AO + Q \cdot BO$, also wenn P und Q gleich sind, gleich

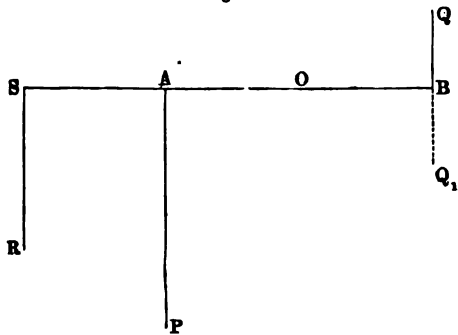
$$P(AO + OB) = P \cdot AB.$$

Die Kräftepaare, ihr Verhalten und die Zusammensetzung derselben ist besonders von Poinso^t untersucht worden, der die Anwendung derselben zur Bestimmung der drehenden Bewegungen in die Mechanik eingeführt hat. Wir ver-

weisen wegen dieser schönen Theorie auf die Lehrbücher der Mechanik und besonders auf Poinso^t: *Éléments de statique*.

Haben wir eine Reihe von in einer Richtung wirkenden parallelen Kräften anstatt an einer Linie an einer festen Ebene verteilt, so müssen auch diese eine Resultierende und einen Mittelpunkt haben. Denn wir können je zwei solcher Kräfte zusammensetzen, die Resultierende dann mit

Fig. 26.



einer folgenden und so fort, bis uns die Mittelkraft der zuletzt übrig bleibenden Kräfte die Resultante und deren Angriffspunkt den Mittelpunkt aller Kräfte gibt.

Sind die parallelen Kräfte nicht alle gleich gerichtet, so liefert die Zusammensetzung der gleich gerichteten zunächst zwei entgegengesetzt gerichtete Resultierende. Greifen dieselben an verschiedenen Punkten an, so erhalten wir die Resultierende und den Angriffspunkt in der vorhin angegebenen Weise; sind dieselben gleich, so gibt es nur ein resultierendes Paar.

Die gleichen Schlüsse können wir anwenden, wenn eine Anzahl paralleler Kräfte anstatt an einer festen Ebene an einem festen Körper angreift; auch für diesen muß es einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte geben, in welchem wir uns die Summe aller Kräfte angebracht denken können, und für den die Summe aller Momente gleich Null ist. Ist deshalb dieser Punkt befestigt, z. B. durch ihn eine Drehungsaxe geführt, so kann der Körper weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen.

Ändern wir die Richtung sämtlicher auf ein System wirkender Kräfte, aber so, daß sie einander parallel bleiben, so wird der Angriffspunkt der Resultierenden nicht geändert. Denn nach der Drehung ist die Summe der Momente in Bezug auf eben diesen Punkt gerade so gleich Null wie vorher. Es folgt das unmittelbar aus unserem Satze über die Momente. Haben sich z. B. alle Kräfte um den Winkel α gedreht, so sind die Momente der einzelnen Kräfte $p, p_1, p_2 \dots$ in den Abständen $d, d_1, d_2 \dots$, wenn sie vorher waren

$$pd + p_1d_1 + p_2d_2 + \dots,$$

nach der Drehung

$$pd \cos \alpha + p_1d_1 \cos \alpha + p_2d_2 \cos \alpha \dots,$$

also gleich

$$(pd + p_1d_1 + p_2d_2 + \dots) \cos \alpha,$$

und war die Summe $pd \dots$ gleich Null, so ist sie es auch, wenn sie mit $\cos \alpha$ multipliziert worden ist.

§ 17.

Gleichgewicht eines Systems, an welchem beliebige Kräfte angreifen. Im § 9 haben wir die Bedingungen abgeleitet, unter welchen ein Körper im Gleichgewicht ist, an welchem beliebige Kräfte wirksam sind, die aber alle an demselben Punkte angreifen. Die Bedingungen des Gleichgewichtes fielen dort zusammen mit denen eines Punktes. Die wenigen Sätze über die drehende Bewegung, welche wir im Bisherigen abgeleitet haben, setzen uns nun auch in den Stand das Gleichgewicht eines Körpers zu bestimmen, an welchem beliebige Kräfte an verschiedenen Punkten angreifen. Diese Gleichgewichtsbedingungen fallen zusammen mit denen eines Systems von Punkten, an denen Kräfte angreifen, und die mit einander in fester Verbindung stehen. Ein solches System kann eine fortschreitende und eine drehende Bewegung annehmen. Die Bedingung des Gleichgewichtes ist daher die, daß weder die eine noch die andere Bewegung eintreten kann.

Wir denken uns, um diese Bedingungen zu erhalten, durch das System drei feste zu einander senkrechte Richtungen OX, OY, OZ (Fig. 27) gelegt, die sich in einem Punkte O schneiden. Sei M ein Punkt des Systems, dessen Lage durch die Koordinaten $MA = z, CA = OB = x, AB = CO = y$ gegeben sei. An M greife eine Kraft P an, deren Richtung durch die Winkel α, β, γ gegeben ist, welche sie mit den Axen bildet. Zerlegen wir die Kraft nach den drei Axen, so erhalten wir als Komponenten parallel

$$\begin{array}{ccc} X & & Y \\ Mb = P \cos \alpha, & Ma = P \cos \beta, & \\ & Z & \\ Mc = P \cos \gamma. & & \end{array}$$

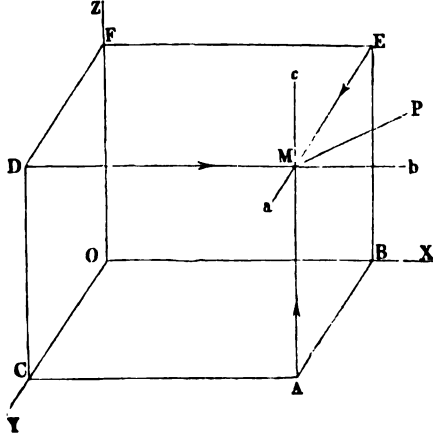
Diese drei Kräfte können dem System sowohl eine fortschreitende Bewegung, jede nach ihrer Richtung, als auch eine drehende Bewegung geben. Um die drehenden Bewegungen und ihre Momente zu erhalten, legen wir durch M die Linien MD, ME, MA parallel den drei Axen und verlängern dieselben, bis sie die durch die Axen bestimmten Ebenen schneiden in den Punkten D, E, A , die wir uns fest mit dem Punkte M verbunden denken. Wir können uns dann, ohne irgend etwas an der Wirkung von P zu ändern, die drei Komponenten an den Punkten D, E, A angreifend denken. Jede dieser Kräfte kann dann das System um zwei Axen drehen, Mb um Z und Y , Ma um Z und X , Mc um Y und X , so daß also für jede der drei Axen zwei Drehungsmomente vorhanden sind. Diese je zwei Drehungen sind aber einander entgegengesetzt, so daß z. B. Mb das System in entgegengesetzter Richtung um Z zu drehen sucht als Ma . Um deshalb die Drehungsmomente für die drei möglichen Drehungen zu bekommen, müssen wir die Differenzen der je zwei Momente bilden. Die senkrechten Abstände der drei Kraftrichtungen von den Drehungsaxen sind nun

$$\begin{array}{ll} Ma \text{ von } X \text{ gleich } EB = z; & Ma \text{ von } Z \text{ gleich } EF = x \\ Mb \text{ „ } Z \text{ „ } DF = y; & Mb \text{ „ } Y \text{ „ } DC = z \\ Mc \text{ „ } X \text{ „ } AB = y; & Mc \text{ „ } Y \text{ „ } AC = x. \end{array}$$

Setzen wir die Drehungen positiv, welche im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers erfolgen, wenn wir in der Richtung der positiven Axen OX, OY, OZ stehend die Füße in der Drehungsebene, auf die Drehungsebene hinsehen, so sind die Drehungsmomente um

$$\begin{array}{l} X \\ Mc \cdot AB - Ma \cdot EB = P \cos \gamma \cdot y - P \cos \beta \cdot z = P(y \cos \gamma - z \cos \beta); \\ Y \\ Mb \cdot DC - Mc \cdot AC = P \cos \alpha \cdot z - P \cos \gamma \cdot x = P(z \cos \alpha - x \cos \gamma); \\ Z \\ Ma \cdot EF - Mb \cdot DF = P \cos \beta \cdot x - P \cos \alpha \cdot y = P(x \cos \beta - y \cos \alpha). \end{array}$$

Fig. 27.



Haben wir eine beliebige Anzahl von Kräften P , welche an beliebigem Punkten des Systems angreifen und beliebig gerichtet sind, so können wir für jede Kraft ganz dieselbe Zerlegung vornehmen, und wir erhalten für jede Kraft drei mit den eben abgeleiteten gleich gerichtete Komponenten und drei Drehungsmomente, welche das System in demselben oder in dem entgegengesetzten Sinne zu drehen suchen. Die je drei Komponenten sowie die Summen der drei Drehungsmomente müssen einzeln gleich Null sein, wenn das System weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen soll. Bezeichnen wir diese einzelnen Summen mit Σ , so ist also die notwendige und ausreichende Bedingung des Gleichgewichts

$$\begin{aligned}\Sigma P \cos \alpha &= 0; \quad \Sigma P \cos \beta = 0; \quad \Sigma P \cos \gamma = 0; \\ \Sigma P(y \cos \gamma - z \cos \beta) &= 0; \quad \Sigma P(z \cos \alpha - x \cos \gamma) = 0; \\ \Sigma P(x \cos \beta - y \cos \alpha) &= 0.\end{aligned}$$

Denn diese Gleichungen zeigen, daß das System infolge der wirksamen Kräfte nach keiner Richtung fortschreiten und nach keiner Richtung gedreht werden kann.

Sind die Kräfte alle parallel einer und derselben Richtung, etwa parallel MP , so daß sie entweder nach MP oder der gerade entgegengesetzten Richtung wirken, sind also für alle die Winkel α, β, γ dieselben, so vereinfachen sich die Bedingungen des Gleichgewichtes bedeutend. Da es nämlich gleichgültig ist, ob wir in einer Summe alle einzelnen Glieder mit ein und demselben Faktor multiplizieren, oder ob wir die Summe der einzelnen Glieder mit diesem Faktor multiplizieren, so können wir in obigen Gleichungen die Cosinus als gemeinschaftliche Faktoren herausschreiben: wir erhalten dann als Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}\cos \alpha \cdot \Sigma P &= 0; \quad \cos \beta \cdot \Sigma P = 0; \quad \cos \gamma \cdot \Sigma P = 0; \\ \cos \gamma \cdot \Sigma P(y - z) &= \cos \beta \cdot \Sigma P(z - x) = \cos \alpha \cdot \Sigma P(x - y) = 0; \\ \cos \beta \cdot \Sigma P(x - y) &= \cos \alpha \cdot \Sigma P(y - z) = 0,\end{aligned}$$

wobei man bemerkt, daß ΣP die Summe der Kräfte und $\Sigma P \cos \alpha$ die Summen der Produkte aller Kräfte mit dem Cosinus α ihrer Angriffspunkte bedeuten.

Da nun α, β, γ Winkel sind, welche ein und dieselbe Richtung mit drei verschiedenen Richtungen bilden, so können die gleichzeitig rechte werden können, es können aber Bedingungen vorbestehen, wenn

$$\Sigma P = 0, \quad \Sigma P \cos \alpha = 0, \quad \Sigma P \cos \beta = 0, \quad \Sigma P \cos \gamma = 0,$$

wenn hier α die Summe aller Kräfte gleich Null ist, als auch die Summe der Kräfte mit dem Cosinus α ihrer Angriffspunkte gleich Null ist.

Es ist zu bemerken, daß wenn $\Sigma P = 0$ kann es eine Resultante geben, wenn die Kräfte nicht alle denselben Punkt schneiden. Wenn es eine Resultante gibt, dann ist die Richtung von derselben, wenn wir an dem Mittelpunkt der Kräfte ein festes Punkt anbringen. Ist die Resultante gleich Null, und sind die Angriffspunkte des Punktes von dem drei festen Richtungen α, β, γ gegeben, so können wir nach dem Vorzeichen die Richtung der Resultante bestimmen, der gegebenen Kräfte parallel sein. Dieselbe mit

den Axen also dieselben Winkel α , β , γ bilden muß, zur Bestimmung derselben und ihres Angriffspunktes

$$\cos \alpha \cdot \Sigma P = \cos \alpha \cdot R; \quad \cos \beta \cdot \Sigma P = \cos \beta \cdot R; \quad \cos \gamma \cdot \Sigma P = \cos \gamma \cdot R,$$

somit zunächst, wie wir vorhin schon ableiteten,

$$\Sigma P = R.$$

Ferner aber

$$\cos \gamma \cdot \Sigma Py - \cos \beta \cdot \Sigma Pz = \cos \gamma \cdot Ry_1 - \cos \beta \cdot Rz_1;$$

$$\cos \alpha \cdot \Sigma Pz - \cos \gamma \cdot \Sigma Px = \cos \alpha \cdot Rz_1 - \cos \gamma \cdot Rx_1;$$

$$\cos \beta \cdot \Sigma Px - \cos \alpha \cdot \Sigma Py = \cos \beta \cdot Rx_1 - \cos \alpha \cdot Ry_1$$

und daraus

$$\Sigma Px = Rx_1; \quad \Sigma Py = Ry_1; \quad \Sigma Pz = Rz_1,$$

oder

$$x_1 = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}; \quad y_1 = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}; \quad z_1 = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

Wir erhalten demnach die Lage des Mittelpunktes durch seine Abstände x_1 , y_1 , z_1 , von den Axen, indem wir die Summen der Produkte der einzelnen Kräfte in die Abstände ihrer Angriffspunkte von den festen Richtungen durch die Summe der Kräfte dividieren.

Das System reducirt sich auf ein Kräftepaar, wenn $\Sigma P = 0$, aber eine der Summen ΣPx , ΣPy , ΣPz oder alle drei von Null verschieden sind.

Es genüge an diesen Entwicklungen, um zu zeigen, wie wir aus den experimentell abgeleiteten Gesetzen über die drehende Bewegung in Verbindung mit den allgemeinen Sätzen über die Wirkung von Kräften auf mathematischem Wege zu weiteren Gesetzen gelangen können; ein weiteres Verfolgen dieses Weges würde uns zu weit in die analytische Mechanik führen.

§ 18.

Schwerpunkt. Wenden wir uns jetzt dazu, die Bedingungen des Gleichgewichtes eines beliebigen festen Körpers, auf den nur die Schwere wirkt, abzuleiten. Alle Körper, welche der Schwere unterworfen sind, unterliegen der Wirkung paralleler vertikal abwärts gerichteter Kräfte, da die Schwere auf alle Teile des Körpers gleichmäßig wirkt. Die Schwere wirkt überdies an einem Orte in der gleichen Richtung, nur an sehr weit von einander entfernten Orten sind die Richtungen der Schwerkraft merklich verschieden. Für die der Schwere unterworfenen Körper gibt es demnach einen Mittelpunkt der parallelen Kräfte, an dem wir uns alle Kräfte vereinigt denken können, und in Bezug auf welchen die Summe der Drehungsmomente gleich Null ist. Man nennt diesen Punkt, in welchem man sich demnach das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken kann, den Schwerpunkt des Körpers. Ist deshalb der Schwerpunkt unterstützt, oder greift an ihn eine vertikal nach oben gerichtete dem Gewichte des Körpers gleiche Kraft an, so kann der Körper gar keine, weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung annehmen, derselbe ist im Gleichgewicht.

Der Schwerpunkt ist in einem gegebenen Körper ein ganz fester Punkt, der seine Lage nicht ändert, wenn wir auch den Körper drehen. Dem eine solche Drehung hat denselben Erfolg, als wäre bei ungeänderter Körperlage die Richtung sämtlicher Kräfte um einen gleichen Winkel gedreht. Wie aber in § 16 nachgewiesen ist, ändert eine solche Drehung den Mittelpunkt der parallelen Kräfte nicht.

Den Schwerpunkt von Linien, Flächen und geometrisch bestimmbar Körpern kann man mit Hilfe der in den beiden letzten Paragraphen abgeleiteten Sätze und der vorhin gemachten Bemerkung, daß ein an dem Schwerpunkt vertikal nach oben angebrachter Zug, der gleich dem Gewichte des Körpers ist, den Körper im Gleichgewichte halte, berechnen.

Wir können nämlich jeden schweren Körper als ein System von Punkten betrachten, auf welche alle vertikal abwärts gerichtete Kräfte wirken, indem wir den ganzen Körper als aus einzelnen schweren Elementen zusammengesetzt ansehen. Die Summe der Gewichte dieser Elemente ist das Gewicht des Körpers. Denken wir uns nun durch den Körper ein dreiaxiges rechtwinkliges Koordinatensystem gelegt und für alle einzelnen schweren Punkte die Abstände x, y, z gegeben, so sind es einfach die am Schlusse des vorigen Paragraphen abgeleiteten Gleichungen, die uns die Lage des Schwerpunktes geben. Nennen wir die Gewichte der einzelnen Körperelemente p , das Gewicht des ganzen Körpers P , so sind die Abstände des Schwerpunktes von den drei Axen

$$x_1 = \frac{\sum p x}{P}; \quad y_1 = \frac{\sum p y}{P}; \quad z_1 = \frac{\sum p z}{P}.$$

Um demnach die Lage des Schwerpunktes eines solchen Körpers zu erhalten, haben wir das Gewicht jedes Punktes mit seinem Abstände von jeder der drei Axen zu multiplicieren, für jede Axe die Summe dieser Produkte zu bilden und jede dieser Summen durch das Gewicht des ganzen Körpers zu dividieren. Diese drei Quotienten bestimmen die Lage des Schwerpunktes, indem sie uns die Abstände desselben von den drei festen Richtungen geben.

In welcher Weise die Rechnungen in speciellen Fällen durchzuführen sind, können wir hier nicht besprechen, wir verweisen deshalb auf die Lehrbücher der Mechanik.

Man kann indes leicht den Schwerpunkt der Körper, auch solcher, die geometrisch nicht bestimmbar sind, experimentell bestimmen, indem man den Satz von den statischen Momenten anwendet.

Ist nämlich der Schwerpunkt unterstützt, so ist der Körper in Ruhe, ist er es nicht, so nimmt der Körper, wenn seine fortschreitende Bewegung gehemmt ist, eine drehende Bewegung an, bis sein Schwerpunkt sich senkrecht unter dem Unterstützungspunkte befindet. Denn wir sahen vorhin, daß eine Reihe von Kräften nur dann keine drehende Bewegung hervorruft, wenn die Summe ihrer statischen Momente gleich Null ist. Da wir uns nun in dem Schwerpunkte das ganze Gewicht des Körpers vereinigt denken können, so folgt, daß nur dann das statische Moment des Körpers gleich Null ist, wenn der horizontale Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe oder dem Unterstützungspunkte gleich Null ist, d. h. wenn beide in einer vertikalen geraden Linie liegen.

Befestigen wir einen Körper, dessen Schwerpunkt wir suchen, an einem Faden und lassen ihn frei herabhängen, so ist er darnach nur in einer Lage im Gleichgewicht, und wir können sicher sein, daß der Schwerpunkt des Körpers dann auf der Verlängerung des Fadens liegt. Befestigen wir darauf den Körper mit einem andern Punkte am Faden, so wird der Schwerpunkt in der Gleichgewichtslage auch dann auf der Verlängerung des Fadens liegen. Diese beiden so bestimmten Richtungen schneiden sich immer in einem Punkte, und dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Körpers. Man überzeugt sich davon leicht, indem dieser Punkt stets in der Verlängerung des Fadens liegt, wenn der Körper im Gleichgewichte ist, an welchem Punkte des Körpers wir denselben auch befestigen.

Auf diese Weise kann man leicht finden, daß in einer homogenen Kugel der Schwerpunkt mit dem Mittelpunkt zusammenfällt, daß er bei einem geraden Cylinder oder senkrechten Prisma auf der Axe in deren halber Höhe liegt, daß er bei einem Dreiecke mit dem Punkte zusammenfällt, in dem sich die drei von den Winkelspitzen zu den Halbierungspunkten der gegenüberliegenden Seiten gezogenen Linien schneiden, daß er in der dreiseitigen Pyramide in $\frac{1}{4}$ der Höhe derselben liegt u. s. f.

Der Schwerpunkt eines Körpers kann auf drei verschiedene Weisen mit dem Unterstützungspunkte oder der Drehungsaxe in einer Vertikalebene liegen; diesen entsprechen drei Arten von Gleichgewicht des Körpers:

1) Der Schwerpunkt liegt in der Drehungsaxe. Wir mögen dem Körper dann eine Lage geben, welche wir wollen, der Schwerpunkt ist immer mit der Drehungsaxe in derselben Vertikalebene, er ist daher in jeder Lage im Gleichgewicht. Man nennt diesen Gleichgewichtszustand den des indifferenten Gleichgewichtes.

2) Der Schwerpunkt liegt senkrecht unter der Drehungsaxe. Dreht man dann den Körper um seine Axe, so kehrt er, da das in seinem Schwerpunkt vereinigte Gewicht ihn nach unten treibt, in seine frühere Lage zurück, um nach einigen Schwankungen darin zu verharren. Man nennt diesen Gleichgewichtszustand den des stabilen Gleichgewichtes.

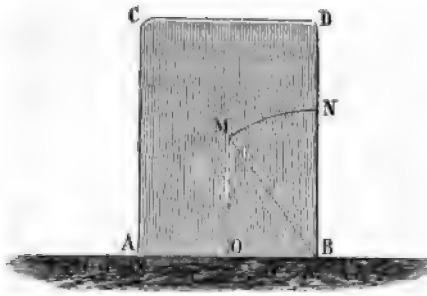
3) Der Schwerpunkt liegt senkrecht über der Drehungsaxe. Der Körper befindet sich dann im labilen Gleichgewicht. Ist er aus seiner Lage gebracht, so muß eine Drehung eintreten, da das Drehungsmoment des Körpers in Bezug auf die Drehungsaxe nicht mehr gleich Null ist. Die Schwere erteilt dem Körper dann aber eine Drehung, welche den Schwerpunkt noch weiter aus seiner frühern Lage entfernt, sie dreht ihn, wenn kein äußeres Hindernis die Bewegung hemmt, bis der Körper sich im Zustande des stabilen Gleichgewichtes befindet.

Hieraus geht hervor, daß ein Körper nur dann feststeht, d. h. jeder Veränderung seiner Lage einen großen Widerstand entgegensetzt und nach kleinen Änderungen wieder in seine frühere Lage zurückkehrt, wenn eine Änderung eine Erhebung des Schwerpunktes bewirkt. Aufgestellte Körper, bei denen der Schwerpunkt stets über der Stütze liegt, stehen daher nur auf einer Ebene fest und zwar um so fester, je breiter die Ebene ist, auf der sie stehen.

Haben wir z. B. einen Körper $ABCD$, dessen Schwerpunkt in M liegt, so können wir denselben nur dadurch umwerfen, daß wir ihn um die Kante B oder A als Drehungsaxe drehen. Dabei muß der

Schwerpunkt den Kreisbogen MN beschreiben mit dem Radius MB , MB größer ist als MO , so muß der Schwerpunkt des Körpers g werden. Es läßt sich auch leicht berechnen, welche Kraft auf

Fig. 28.



werden muß, um den Körper B oder A zu drehen und so zu werfen. Das Drehungsmoment des Körpers in Bezug auf eine durchgehende Drehungsaxe ist nach

$$M \cdot OB,$$

wenn wir mit M das Gewicht des Körpers bezeichnen, das seinen Schwerpunkt vereinigt denken. Dieses Moment strebt

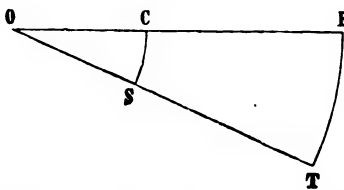
zu erteilen, daß M sich nach unten bewegt, eine Drehung, welche dem Widerstand des Bodens, auf welchem der Körper steht, verhindert. Um dem Körper eine entgegengesetzte Drehung um B zu ermöglichen, müssen wir also auf den Körper einen Druck wirken lassen, welcher entgegengesetzter Richtung dasselbe Moment hat.

Je größer also $M \cdot OB$ ist, um so größer ist die Stabilität des Körpers. Man nimmt daher auch dieses Moment als Maß der Stabilität des Körpers, so daß diese Stabilität durch das Produkt aus dem Gewicht des Körpers und dem senkrechten Abstand einer durch den Schwerpunkt gehenden Vertikalebene von der Umdrehungskante bestimmt wird.

§ 19.

Von den Trägheitsmomenten. Wir haben bisher bei der dreifachen Bewegung nur die Kräfte betrachtet, welche die Bewegung hervorzubringen und untersucht, wie die Kräfte an verschiedenen Punkten sich auswirken können, um die gleiche drehende Bewegung zu erzeugen, indem wir bestimmten, welche Kräfte in verschiedenen Abständen von der Drehungsaxe angebracht werden müssen, um sich gegenseitig das Gleichgewicht zu halten. Dadurch ist die Abhängigkeit der drehenden Bewegung von den Kräften vollständig gegeben, wir können sie in dem Satze zusammenfassen: Kräfte gleiche drehende Bewegungen, also gleiche Winkelgeschwindigkeiten hervorzubringen, wenn ihre statischen Momente denselben Wert haben.

Fig. 29.



In Bezug auf die drehende Bewegung haben wir nun noch die Frage zu beantworten, in welcher Weise dieselbe abhängt von der Masse des durch die Kräfte in Bewegung zu setzenden Körpers. Denken wir uns deshalb zunächst einen gewichtlosen Hebel OB (Fig. 29), dessen Ende bei B eine Kraft p angewandt wird, von der wir der Einfachheit wegen

setzen wollen, daß sie in jeder Lage des Hebels konstant und senkrecht zum Hebelarm sei. Im Punkte B befinde sich eine Masse m , welche

die Kraft p in Bewegung gesetzt wird. Der Weg $BT = s$, den die Masse in irgend einer Zeit zurücklegt, ist dann, da wir die Kraft als immer von gleicher GröÙe vorausgesetzt haben,

$$BT = s = \frac{1}{2} \frac{p}{m} t^2.$$

Nennen wir die Länge des Hebels l und den Bogen, dem der Weg s entspricht, φ , so können wir auch schreiben

$$s = l\varphi = \frac{1}{2} \frac{p}{m} t^2; \quad \varphi = \frac{1}{2} \frac{p}{lm} t^2.$$

Nun werde die Masse m bei B fortgenommen, und es soll dann bei C im Abstände r von O eine Masse m' angebracht werden, so daß auch jetzt in derselben Zeit t durch die Wirkung der bei B angreifenden Kraft p von dem System derselbe Bogen φ beschrieben wird.

Um die GröÙe dieser Masse zu bestimmen, haben wir zunächst uns daran zu erinnern, daß die bei B wirkende Kraft p in dem Punkte C einen Druck p' ausübt, der gegeben ist durch die Gleichung

$$pl = p' r$$

$$p' = p \frac{l}{r}.$$

Der Weg, den die Masse m' in der Zeit t durch die Wirkung dieser Kraft zurücklegt, ist

$$s' = \frac{1}{2} \frac{p' r}{m'} t^2.$$

Dieser Weg soll nun demselben Bogen φ entsprechen, es ist also $s' = r\varphi$ und

$$\varphi = \frac{1}{2} \frac{p l}{r^2 m'} t^2.$$

Aus den beiden Gleichungen für φ ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{p}{lm} = \frac{1}{2} \frac{p l}{r^2 m'}$$

oder

$$m \cdot l^2 = m' \cdot r^2.$$

Die in dem Punkte C anzubringende Masse m' bekommt also durch die in B angreifende Kraft p dieselbe Winkelbewegung wie die in B angebrachte Masse m , wenn das Produkt aus der Masse m' und dem Quadrate ihres Abstandes von der Drehungsaxe gleich ist der Masse m , multipliziert mit dem Quadrate ihres Abstandes; oder zwei Massen erhalten durch eine und dieselbe an demselben Punkte angreifende Kraft dieselbe drehende Bewegung, wenn sie ihrer GröÙe nach umgekehrt sich verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsaxe.

Das Produkt mr^2 einer Masse m in das Quadrat ihres Abstandes r von der Drehungsaxe bezeichnet man als das Trägheitsmoment der Masse; mit dieser Bezeichnung können wir somit den eben abgeleiteten Satz auch kurz so aussprechen, daß durch eine gegebene Kraft verschiedene Massen gleiche drehende Bewegung erhalten, wenn sie gleiche Trägheitsmomente besitzen.

Das Trägheitsmoment einer gegebenen Masse bedeutet gleich jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe angebracht werden muß, um die im Abstände r befindliche Masse m zu ersetzen, die Winkelgeschwindigkeit dieselbe ist.

Dieser Satz von den Trägheitsmomenten setzt uns in den Stand, die drehende Bewegung eines Systems, in welchem Massen in verschiedenen Punkten vorhanden sind und von verschiedenen Kräften angegriffen werden, oder auch diejenige eines ausgedehnten Körpers wenigstens dann vollständig zu bestimmen, wenn wir die Verteilung der Massen und Kräfte kennen. Indem wir nämlich die Trägheitsmomente der vorhandenen Massen bestimmen, erhalten wir jene Masse, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe die sämtlichen vorhandenen Massen so ersetzt, daß die drehende Bewegung, welche diese in der Abstandseinheit vorhandene Masse ausführt, die wirksamen Kräfte erhält, genau jener gleich ist, welche die vorhandenen Massen erhalten. Durch Bestimmung der statischen Momente erhalten wir dann die in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe angreifende Kraft, welche die sämtlichen an verschiedenen Punkten angreifenden Kräfte ersetzt. Da diese Kraft in demselben Punkte angreift, in welchem die Masse sich befindet, so erhalten wir die Beschleunigung dieser Masse, indem wir den Quotienten aus der Kraft und der Masse bilden, und aus der Beschleunigung die Geschwindigkeit in einer gegebenen Zeit zurückgelegten Weg ganz nach den im vorherigen Kapitel abgeleiteten Sätzen.

Bei einem ausgedehnten um eine Axe drehbaren Körper haben wir, um das Trägheitsmoment desselben zu bilden, uns den Körper in verschiedene Punkte zerlegt zu denken; die Summe der Trägheitsmomente aller dieser Punkte ist dann das Trägheitsmoment des ganzen Körpers. Hat der Körper eine geometrisch bestimmte Gestalt, und ist die Masse in ihm gleichmäßig verteilt, so daß also innerhalb des Körpers gleiche Volumina überall die gleiche Masse enthalten, so läßt sich das Trägheitsmoment berechnen und die drehende Bewegung des Körpers vollständig bestimmen.

Um diese Rechnung zu übersehen, wollen wir als Beispiel die drehende Bewegung einer Kreisscheibe um eine durch ihre Axe gehende Drehungsaxe untersuchen. Die Kreisscheibe K (Fig. 30) habe den Durchmesser d , die Dicke b , und an ihrem Umfange greife eine stante Kraft p an; etwa so, daß wir die Drehungsaxe der Scheibe vertikal gestellt, dann

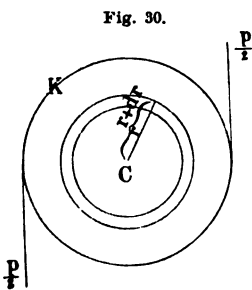


Fig. 30.

die Scheibe zwei Schnüre gelegt denken, welche an einem Punkte des Umfangs befestigt und über zwei Rollen geführt sind. An den über die Rollen herabhängenden Enden der Schnüre seien zwei Gewichte $\frac{p}{2}$ befestigt. Sei ferner das Volumen V von einem Kubikcentimeter der Scheibe gegeben, somit die in einem Kubikcentimeter vorhandene Masse gleich $\frac{q}{g}$.

Um das Trägheitsmoment der Scheibe zu erhalten, denken wir uns aus derselben einen Ring ausgeschnitten, dessen innerer Radius g

und dessen äußerer den um das Differential dr größern Wert $r + dr$ hat. Da dr einen verschwindend kleinen Wert hat, ist der äußere Umfang des Ringes nur unendlich wenig von dem innern verschieden, wir können deshalb ohne einen merklichen Fehler das Volumen dieses Ringes gleich $2\pi r dr b$ setzen. Die Masse desselben wird dann $2\pi r dr b \frac{q}{g}$. Eben deshalb, weil wir den Ring als unendlich dünn vorausgesetzt haben, können wir den Abstand aller seiner Punkte von der mit der Axe des Ringes zusammenfallenden Drehungsaxe als gleich und zwar als gleich r ansehen. Dann wird das Trägheitsmoment dieses Ringes gleich

$$r^2 \cdot 2\pi r dr b \frac{q}{g} = 2\pi b \frac{q}{g} \cdot r^3 dr.$$

Vir bekommen somit das Trägheitsmoment dieses Ringes in Form eines Differentialausdrucks. Das Trägheitsmoment der ganzen Scheibe erhalten wir dann, indem wir die Trägheitsmomente aller der unendlich vielen, unendlich dünnen Ringe summieren, aus welchen wir die Scheibe zusammengesetzt denken können. Die Trägheitsmomente aller dieser Ringe erhalten wir, wenn wir in obigem Ausdrucke für r nach und nach alle, jedesmal um r zunehmende Werte von 0 bis a einsetzen. Das Trägheitsmoment der ganzen Scheibe ist somit das von 0 bis a genommene bestimmte Integral

$$K = \int_0^a 2\pi b \frac{q}{g} \cdot r^3 dr.$$

Dem Begriffe des Integrals als Summe entsprechend können wir den konstanten Faktor vor das Summenzeichen setzen und erhalten

$$K = 2\pi b \frac{q}{g} \int_0^a r^3 dr.$$

Nach E 1 ist der Ausdruck unter dem Integralzeichen das Differential von $\frac{1}{4}r^4$, somit nach E VIII

$$K = 2\pi b \frac{q}{g} \left(\frac{1}{4}a^4 - 0 \right) = \frac{1}{2}\pi b \frac{q}{g} \cdot a^4.$$

Nun ist $\pi a^2 b$ das Volumen unserer Kreisscheibe, somit

$$\pi a^2 b \frac{q}{g} = M$$

die Masse der Kreisscheibe; wir können somit das Trägheitsmoment derselben schreiben

$$K = \frac{1}{2} M a^2$$

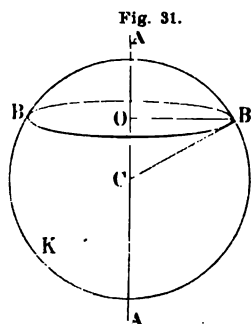
das Trägheitsmoment einer Kreisscheibe, oder allgemein eines massiven Zylinders, da die Kreisscheibe ja nur ein Cylinder von geringer Höhe, in Bezug auf die Axe des Cylinders ist gleich der halben Masse des Cylinders multipliziert mit dem Quadrate des Radius. Damit erhalten wir Beschleunigung bei der drehenden Bewegung

$$G = \frac{P a}{\frac{1}{2} M a^2} = 2 \frac{P}{M a},$$

781856

ein Ausdruck, der gleichzeitig, wenn wir G als Bruchteil von 2π angeben, uns die Winkelbeschleunigung gibt, da die Beschleunigung sich auf einen Punkt bezieht, der sich im Abstände eins von der Drehungsaxe befindet.

Das Trägheitsmoment einer Kugel in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende Axe können wir leicht aus dem soeben abgeleiteten Trägheitsmoment der Scheibe erhalten. Sei, um die Berechnung durchzuführen, der



Kreis K ein Durchschnitt durch die Kugel, deren Radius gleich a sei, und AA' sei die Drehungsaxe. Sei auch jetzt wieder q das Gewicht der Volumeneinheit der Kugel. Sei BB' eine Scheibe, welche durch zwei unendlich nahe zur Drehungsaxe senkrechte Schnitte begrenzt sei, deren erster im Abstände x , deren zweiter im Abstände $x + dx$ vom Mittelpunkte C der Kugel sich befinde. Diese Scheibe können wir als einen Cylinder ansehen, dessen Höhe gleich dx und dessen Radius r gegeben ist durch die Gleichung

$$r^2 = a^2 - x^2.$$

Da die Drehungsaxe der Kugel durch die Axe dieser Scheibe geht, so ist das Trägheitsmoment derselben, wie eben abgeleitet wurde,

$$\frac{1}{2} \pi \frac{q}{g} r^2 dx = \frac{1}{2} \pi \frac{q}{g} (a^2 - x^2)^2 dx \dots (1).$$

Das Trägheitsmoment der ganzen Kugel ist die Summe der Trägheitsmomente aller Scheiben, in welche wir auf diese Weise die Kugel zerlegen können. Wir erhalten alle diese einzelnen Trägheitsmomente, indem wir in dem soeben entwickelten Ausdruck nach und nach für x alle die Abstände einsetzen, welche in der Kugel vorkommen. Die obere Hälfte der Kugel bekommen wir, indem wir für x nach und nach alle Werte einsetzen, von 0 bis a , die untere, deren Scheiben an der entgegengesetzten Seite des Mittelpunktes sich befinden, wenn wir für x alle Werte zwischen 0 und $-a$ einsetzen; denn um die in Bezug auf den Mittelpunkt, von dem aus wir die Abstände x rechnen, entgegengesetzte Lage der Scheiben zu beachten, müssen wir den nach unten gerechneten Abständen x das negative Vorzeichen geben. Wir erhalten somit das Trägheitsmoment der ganzen Kugel, indem wir von $-a$ anfangen nach und nach für x alle Werte von $-a$ bis $+a$ setzen und alle die so sich ergebenden Werte des Ausdruckes (1) summieren, oder

$$K = \int_{-a}^{+a} \frac{1}{2} \pi \frac{q}{g} (a^2 - x^2)^2 dx = \frac{1}{2} \pi \frac{q}{g} \int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx.$$

Um dieses bestimmte Integral nehmen zu können, führen wir die unter dem Integralzeichen angedeutete Quadrierung aus; das Integral zerlegt sich dann in drei, da sich aus dem Begriffe des Integrals als Summe ergibt, daß das Integral einer Summe gleich ist der Summe der Integrale der einzelnen Glieder

$$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx = \int_{-a}^{+a} a^4 dx - \int_{-a}^{+a} 2a^2 x^2 dx + \int_{-a}^{+a} x^4 dx.$$

Nach E 1 ist der Ausdruck unter dem ersten Integralzeichen das Differential von $a^4 x$, unter dem zweiten von $\frac{2}{3} a^3 x^2$, unter dem dritten von $\frac{1}{5} a^5$. Damit wird nach E VIII

$$\int_{-a}^{+a} (a^2 - x^2)^2 dx = (a^5 + a^5) - \frac{2}{3}(a^5 + a^5) + \frac{1}{5}(a^5 + a^5) = \frac{16}{15} a^5$$

somit

$$K = \frac{1}{2} \pi \frac{g}{g} \cdot \frac{16}{15} a^5 = \frac{2}{3} \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \frac{g}{g} \right) a^2.$$

Der in der Klammer eingeschlossene Teil des Ausdruckes ist die Masse der Kugel; bezeichnen wir dieselbe mit M , so wird

$$K = \frac{2}{3} M \cdot a^2.$$

Die beiden Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, wie man durch Rechnung das Trägheitsmoment eines homogenen Körpers von geometrisch bestimmter Gestalt erhalten kann. Für alle Formen, welche uns für das Trägheitsmoment eines Elementes einen Differentialausdruck liefern, dessen Integral man auswerten kann, läßt sich das Trägheitsmoment berechnen.

Außer durch Rechnung läßt sich das Trägheitsmoment einer Masse auch experimentell bestimmen. Dafür geeignete Methoden werden wir § 31 kennen lernen.

§ 20.

Allgemeiner Satz über die Trägheitsmomente. Das Trägheitsmoment einer Masse hat nach der Definition dieses Begriffes keineswegs einen für die gegebene Masse immer gleichen Wert, sondern dieser Wert hängt wesentlich ab von der Lage der Drehungsaxe, um welche die drehende Bewegung stattfindet. Auf specielle Fälle der Art einzugehen, würde zu weit führen; wir wollen in der Beziehung nur einen allgemeinen Satz beweisen, der uns immer gestattet, das Trägheitsmoment einer Masse in Bezug auf eine beliebige Axe zu bestimmen, wenn man es in Bezug auf eine der beliebigen Axe parallele durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte Axe kennt. Ist nämlich M die Masse eines Körpers und Mk^2 das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt des Körpers gehende Axe, so ist in Bezug auf eine mit der letztern parallele und im Abstande z von derselben befindliche Drehungsaxe das Trägheitsmoment gleich $M(k^2 + z^2)$.

Um diesen Satz zu beweisen, sei der senkrechte Abstand a des Punktes (Fig. 32) von der durch den Schwerpunkt o des Körpers senkrecht zur Ebene der Zeichnung gehenden Axe durch zwei senkrechte Koordinaten x und y gegeben, daß

$$a^2 = x^2 + y^2.$$

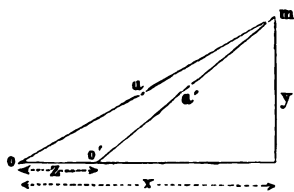
Das Trägheitsmoment des im Punkte m befindlichen Massenelementes m ist dann

$$ma^2 = m(x^2 + y^2),$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Körpers die Summe der so für alle Massenelemente gebildeten Momente

$$\sum ma^2 = \sum m(x^2 + y^2) = M k^2.$$

Fig. 32.



Liege die zweite Axe in der Richtung der senkrechten Abstände von der ersten Axe um z entfernt, sie gehe durch o' , so ist das Trägheitsmoment des in m befindlichen Massenelementes in Bezug auf diese neue

$$ma'^2 = m \{ (x - z)^2 + y^2 \}$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Körpers, die Summe der Trägheitsmomente aller Massenelemente

$$\Sigma ma'^2 = \Sigma m \{ (x - z)^2 + y^2 \}.$$

Letztere Summe ist aber gleich

$$\Sigma m \{ (x - z)^2 + y^2 \} = \Sigma mx^2 + \Sigma mz^2 + \Sigma my^2 - 2z \Sigma mx$$

oder auch

$$\Sigma m \{ (x - z)^2 + y^2 \} = \Sigma m(x^2 + y^2) + \Sigma mz^2 - 2z \Sigma mx.$$

Das erste Glied des Ausdruckes auf der rechten Seite ist gleich Mk^2 , das zweite, da z^2 ein für alle Glieder der Summe konstanter Factor ist, und $\Sigma m = M$ gleich der Masse des Körpers ist, gleich $M \cdot z^2$. haben demnach für das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in Bezug die neue Axe

$$Mk^2 + Mz^2 - 2z \Sigma mx = M(k^2 + z^2) - 2z \Sigma mx.$$

Das Glied $- 2z \Sigma mx$ ist nun aber gleich Null, weil die Axe, der die Abstände x gerechnet sind, durch den Schwerpunkt geht, und nach unserer Definition des Schwerpunktes als des Mittelpunktes der durch die Schwere der einzelnen Körperelemente gegebenen parallelen Kräfte. Summe der Momente in Bezug auf denselben Null ist.

Es bleibt somit für das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug die neue Axe, welche mit der durch den Schwerpunkt gehenden parallel und um z von ihr entfernt ist,

$$M(k^2 + z^2).$$

Wir werden von diesem Satze demnächst Gebrauch machen.

Mit Hülfe der Sätze über das Trägheitsmoment ist, wie schon vor bemerkt wurde, die Behandlung der drehenden Bewegung auf jene der schreitenden zurückgeführt, indem wir die Masse des zu bewegenden Körpers immer in dem Angriffspunkt der resultierenden Kraft konzentriert denken können. Es erübrigt uns jetzt noch, einige Anwendungen der abgeleiteten Sätze und einige die drehende Bewegung begleitende Erscheinungen zu trachten.

§ 21.

Die Wage. Wir wenden unsere Sätze zunächst an, um die Theorie des für die Physik wichtigsten Meßapparates, der Wage, abzuleiten.

Die Wage hat die Aufgabe, das Gewicht der Körper zu bestimmen, das heißt, das Gewicht eines gegebenen Körpers mit demjenigen eines kannten Gewichtsstücke zu vergleichen. Zu dem Zwecke besteht bekanntlich die Wage aus einem in seiner Mitte unterstützten Stabe, der an seinen Enden die Wagschalen trägt, deren eine den abzuwägenden Körper, die andere die Gewichte aufnimmt. Wir schließen dann, daß das Gewicht

abzuwägenden Körper demjenigen der Gewichte gleich ist, wenn der die Schalen tragende Stab, der Wagebalken, horizontal steht. Die horizontale Stellung erkennen wir an einem mit dem Wagebalken fest verbundenen Zeiger, der dann auf eine bestimmte Marke zeigt. Wir verlangen ferner, daß der Wagebalken in einer geneigten Stellung zur Ruhe kommt, wenn auf der einen Seite ein nicht zu großes Übergewicht ist. Die Neigung soll für das kleinste Übergewicht noch deutlich sichtbar sein, der Wagebalken also noch einen deutlich erkennbaren Winkel mit der Horizontalen bilden. Dieses kleinste Übergewicht ist je nach dem Zwecke der Wagen verschieden; Wagen zu wissenschaftlichen Untersuchungen sollen schon einen deutlich sichtbaren Winkel mit der Horizontalen, einen deutlichen Ausschlag geben, wenn die eine Seite um Bruchteile eines Milligrammes schwerer ist.

Aus dieser Aufgabe der Wage läßt sich unmittelbar ableiten, wie dieselbe eingerichtet sein muß. Wir wollen aus der Horizontalstellung der Wage auf die Gleichheit der abzuwägenden Gewichte schließen; daraus folgt zunächst, daß die Wage im unbelasteten Zustande horizontal stehen, das heißt, daß dann der Schwerpunkt mit der Drehungsaxe in derselben Vertikalen liegen muß. Dazu ist erforderlich, daß die beiden Hälften der Wage an jeder Seite der Drehungsaxe derselben, durch die Schwere genau dasselbe Drehungsmoment erhalten müssen, somit daß, wenn die beiden Hälften gleichartig gearbeitet sind, was wir voraussetzen, dieselben gleiche Gewichte haben müssen.

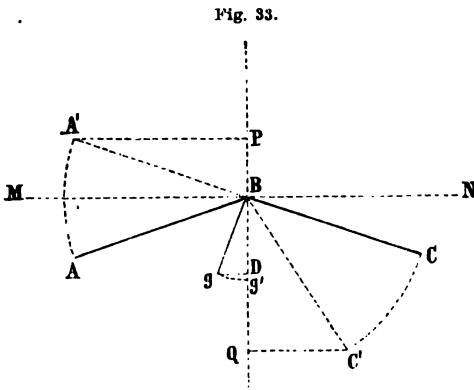
Es ergibt sich daraus zweitens, daß die beiden Hälften des Wagebalkens, die Abstände der Drehungsaxe der Wage von den Aufhängepunkten der Wagschalen, genau gleiche Längen haben müssen. Denn in der Voraussetzung, daß die erste Bedingung erfüllt ist, beweist uns die horizontale Stellung der belasteten Wage nur, daß die Drehungsmomente der beiden Seiten gleich sind. Aus der Gleichheit der Drehungsmomente folgt aber die Gleichheit der wirkenden Kräfte, hier also der in den Wagschalen liegenden Gewichte, nur dann, wenn wir wissen, daß die Hebelarme, hier also die horizontalen Abstände der Aufhängepunkte der Wagschalen von der Drehungsaxe einander gleich sind. In wie weit diese Bedingung strenge erfüllt werden kann, werden wir im nächsten Paragraphen besprechen.

Da die Wage, wenn auf der einen Wagschale ein kleines Übergewicht liegt, in einer geneigten Lage zur Ruhe kommen soll, so folgt als dritte notwendig zu erfüllende Bedingung, daß die unbelastete Wage im stabilen Gleichgewichte sich befinden, daß also der Schwerpunkt unter der Drehungsaxe liegen muß. Würde die Wage im labilen Gleichgewichte sein, so würde sie bei der geringsten Bewegung umschlagen. Wäre die Wage im indifferenten Gleichgewicht, so würde sie unbelastet in jeder Lage im Gleichgewichte sein, bei dem geringsten Übergewichte auf der einen Seite sich dagegen um 90° drehen, soweit, bis der Schwerpunkt des Übergewichtes unter der Drehungsaxe in derselben Vertikalen liegen würde. Denn da im Zustande des indifferenten Gleichgewichtes die Summe der statischen Momente der einzelnen Teile der Wage in Bezug auf die Unterstützungsaxe selbst Null ist, und in jeder Lage Null bleibt, kann bei Hinzufügung eines Übergewichtes nur dann Gleichgewicht sein, wenn das Moment des Übergewichtes für sich gleich Null ist; das ist aber nur dann der Fall, wenn sein Schwerpunkt mit der Drehungsaxe in derselben Vertikalen ist. In

diesem Falle würde somit die Wage ebenfalls unbrauchbar sein. Ist die unbelastete Wage dagegen im stabilen Gleichgewicht, so tritt eine von der Größe des Übergewichtes abhängige Drehung der Wage ein. Denn dadurch, daß die Wage sich nach der Seite des Übergewichtes neigt, wird der Schwerpunkt nach der andern Seite gehoben, somit ein die Wage zurückdrehendes Moment erzeugt; die Gleichgewichtslage ist dann jene, in welcher die nach entgegengesetzter Richtung drehenden Momente einander gleich sind.

Indem wir diese Gleichgewichtsbedingung formulieren, erkennen wir weiter, von welchen Umständen außer von der Größe des Übergewichtes die Größe der Drehung abhängig ist, welche speciellere Einrichtung somit

die Wage haben muß, damit sie für ein möglichst kleine Übergewicht einen deutlich erkennbaren Ausschlag gibt. Bei dieser Formulierung machen wir die allgemeinste mit den bereits erkannten Bedingungen verträgliche Annahme, die sich im allgemeinen in der Praxis stets realisiert findet, daß nämlich der Wagebalken AB (Fig. 33) nicht eine gerade Linie bilde, daß also die Verbindungslinie der Aufhängepunkte der Wagschalen nicht durch die Drehungsaxe geht.



Wir nehmen aber an, daß in der Gleichgewichtslage die Verbindungslinie AC horizontal sei, daß also AB und BC dann mit der horizontalen MN den gleichen Winkel β bilden. Die Längen $AB = BC$ seien gleich l . Der Schwerpunkt des Wagebalkens liege in g' im Abstände l' unter B .

Sei ferner p das Gewicht des Balkens und sei das Gewicht der an A und angehängten Wagschalen inklusive der eingelegten Gewichte auf der einen Seite gleich Q , auf der andern Seite $Q + q$. Die Wage wird sich um einen Winkel α neigen und die Lage $A'BC'$ annehmen. Der Schwerpunkt der Wage rückt dann nach g . Besteht Gleichgewicht, so muß die Summe der Momente der wirkenden Gewichte $Q, p, Q + q$ gleich Null sein.

Die Hebelarme der Gewichte sind für Q die Länge $A'P$, für das Gewicht p der Wage gD und für die Gewichte $Q + q$, welche an den Punkten C' angreifen, $C'Q$, es muß sonach

$$Q \cdot A'P + p \cdot gD - (Q + q) C'Q = 0,$$

oder

$$Q \cdot A'P + p \cdot gD = (Q + q) C'Q \dots 1.$$

Nun sind

$$A'P = A'B \cdot \cos BA'P = A'B \cdot \cos A'BM = l \cdot \cos (\alpha - \beta),$$

$$gD = gB \cdot \sin gBD = l' \cdot \sin \alpha,$$

$$C'Q = C'B \cdot \cos QC'B = C'B \cdot \cos C'BN = l \cdot \cos (\alpha + \beta)$$

und daraus, wenn wir diese Ausdrücke in (1) einsetzen,

$$Ql \cos(\alpha - \beta) + p'l \sin \alpha = (Q + q)l \cos(\alpha + \beta)$$

oder auch

$$\begin{aligned} Ql(\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta) + p'l \sin \alpha &= \\ &= (Q + q)l(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta). \end{aligned}$$

Fassen wir die mit $\cos \alpha$ und $\sin \alpha$ multiplizierten Glieder zusammen, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos \alpha \{ Ql \cos \beta - (Q + q)l \cos \beta \} &= \\ = - \sin \alpha \{ Ql \sin \beta + (Q + q)l \sin \beta + p'l \} \end{aligned}$$

oder

$$ql \cos \beta \cdot \cos \alpha = \{ 2Ql \sin \beta + ql \sin \beta + p'l \} \sin \alpha.$$

Dividieren wir durch $\cos \alpha$ und lösen die Gleichung nach $\tan \alpha$ auf

$$\tan \alpha = \frac{ql \cos \beta}{2Ql \sin \beta + ql \sin \beta + p'l}$$

oder

$$\tan \alpha = \frac{ql}{(2Q + q)l \tan \beta + \frac{p'l}{\cos \beta}} \dots 2.$$

Der Winkel α gibt die Neigung des Wagebalkens, wenn in die Wagschale bei C das Übergewicht q gebracht ist, er mißt also die Empfindlichkeit der Wage. Da α immer sehr klein ist, können wir auch $\tan \alpha$ als Maß der Empfindlichkeit betrachten. Man sieht in obiger Gleichung, daß wenn der Winkel β von Null verschieden ist, der Wert α abhängig ist von $2Q + q$, das heißt, die Empfindlichkeit der Wage ist nicht konstant, sie ändert sich bei gleichem Übergewichte q mit der gemeinsamen Belastung der Wage, sie ist größer, wenn die Wage weniger belastet ist. Daß das der Fall sein muß, ergibt die direkt an Fig. 33 als richtig einzusehende Überlegung, daß bei der hier vorausgesetzten Neigung der Wagebalken die Drehung der Wage zur Folge hat, daß der Hebelarm, an welchem das Übergewicht wirkt, in stärkerem Verhältnisse kleiner wird, als der Hebelarm an der andern Seite der Wage.

Lägen die Punkte A und C anstatt unter der Horizontalen über derselben, so wäre die Rechnung genau so durchzuführen, nur müßte man in den Gleichungen den Winkel β negativ setzen, wo in den vorigen Gleichungen $\alpha + \beta$ steht, müßten wir $\alpha - \beta$ setzen und umgekehrt. Die Gleichung (2) wird dann

$$\tan \alpha = \frac{ql}{\frac{p'l}{\cos \beta} - (2Q + q) \tan \beta}.$$

Hier wird der Nenner unseres Ausdrucks mit zunehmender Belastung kleiner, die Empfindlichkeit der Wage also größer.

Ist der Winkel β gleich Null, so ist die Empfindlichkeit der Wage konstant, unabhängig von der Belastung. Da das durchaus wünschenswert ist, so sucht man soviel wie möglich die drei Punkte A , B , C in eine gerade Linie zu legen. Nehmen wir an, daß das erreicht, also $\beta = 0$ sei, so wird die Empfindlichkeit der Wage gegeben durch die Gleichung

$$\tan \alpha = \frac{1}{l} \left(\frac{l}{p} \right) q.$$

Bei gleichem gegebenen Übergewicht wird somit der Ausschlag der Wage um so gröfser

1) je kleiner l , also der Abstand des Schwerpunktes von dem Unterstützungspunkte ist. Man erkennt das auch an der Fig. 33 sofort als richtig, denn je näher g an B liegt, um so gröfser mufs der Winkel α werden, damit der Hebelarm, an welchem das Gewicht des Wagebalkens angreift, einen solchen Wert hat, dafs das zurückdrehende Moment dem Drehungsmoment des Übergewichtes gleich wird.

2) Der Winkel α wird um so gröfser, je gröfser der Quotient $\frac{l}{p}$, also aus der Länge des Wagebalkens und dem Gewichte desselben wird, je länger also bei gegebenem Gewichte p die Wagebalken sind, oder je leichter bei gegebener Länge das Gewicht des Wagebalkens ist. Diese Bedingungen sind selbstverständlich innerhalb gewisser Grenzen eingeschlossen, da bei zu grofser Länge oder zu kleinem Gewichte die Wagebalken sich biegen, somit die Bedingung, dafs $\beta = 0$ ist, nicht mehr erfüllt sein kann. Von zwei Wagen, bei denen der Quotient $\frac{l}{p}$ denselben Wert hat, ist schon deshalb diejenige die beste, deren Wagebalken die kürzeren sind, da bei dieser nicht so leicht Verbiegungen eintreten. Es wird sich im nächsten Paragraphen herausstellen, dafs sich mit einer solchen Wage auch schneller wägen läfst.

Die Theorie liefert daher für eine gute Wage folgende Bedingungen, die man in der Praxis möglichst zu erfüllen sucht:

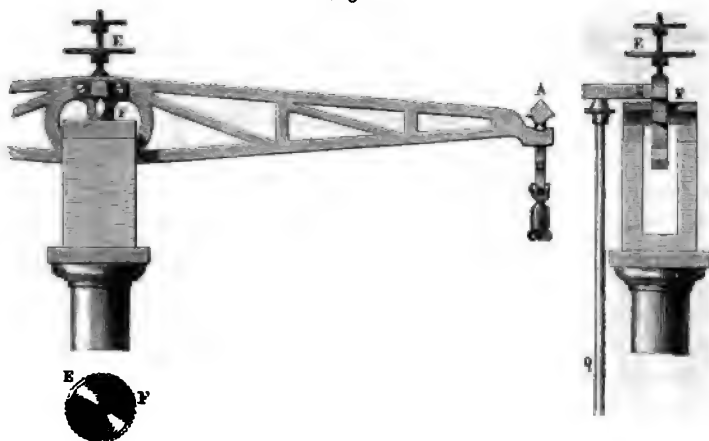
- 1) Die beiden Wagebalken sollen einander gleich sein.
- 2) Der Quotient $\frac{l}{p}$ soll möglichst grofs sein.
- 3) Der Aufhängepunkt des Wagebalkens und diejenigen der Wagschalen sollen in einer geraden Linie liegen.
- 4) Der Schwerpunkt der Wage soll unter der Drehungsaxe liegen, aber derselben möglichst nahe.

Um diesen vielfachen Bedingungen Genüge zu leisten, wendet man als Wagebalken einen Messing- oder Stahlstreifen von ungefähr 5^{mm} Dicke und 60^{cm} Länge an. Man gibt ihm die Form (Fig. 34) eines länglichen verschobenen Vierecks, und, um ihn leicht zu machen, wird er vielfach durchbrochen, so dafs nur die Seiten des Vierecks übrig bleiben nebst einigen das Viereck durchsetzenden Stützen. Man erfüllt dadurch die zweite Bedingung, man erhält einen bei gegebener Länge möglichst leichten Wagebalken, ohne befürchten zu müssen, dafs er sich biegt.

Auf die Aufhängung des Balkens sowohl als der Schalen ist grofse Aufmerksamkeit zu verwenden. Es ist notwendig, Träger herzustellen, die in einer zur Drehebene des Wagebalkens senkrechten Linie auslaufen, die fähig sind, dem Drucke zu widerstehen, welchen die angehängten Gewichte ausüben, die sich während der Drehung des Wagebalkens nicht verschieben, und die hinlänglich beweglich sind, um nicht durch einen merklichen Reibungswiderstand die Bewegung des Wagebalkens zu hemmen. Man befestigt zu dem Ende in dem Wagebalken ein Prisma von gehärtetem Stahl F , dessen untere möglichst geradlinig gearbeitete Kante auf einer gut polierten Platte von Stahl oder besser noch von Achat aufliegt.

Es ist klar, daß eine solche Aufhängevorrichtung den gestellten Bedingungen auf das wünschenswerteste entspricht. An den Enden des Wagebalkens sind ebenfalls zwei Prismen angebracht, deren Kanten nach oben errichtet sind, um auf diese die unten eben abgeschliffenen Stahlstücke *A* aufzunehmen, an denen die Wagschalen aufgehängt sind. Die Aufhängeaxen des Wagebalkens sowie der Wagschalen sind demnach die Kanten dieser drei Prismen. Diese drei Kanten müssen nun gemäß der dritten Regel möglichst in eine gerade Linie gebracht werden, und die beiden Abstände *r* an den Enden des Wagebalkens angebrachten von der mittlern nach der ersten Regel unter sich genau gleich gemacht werden.

Fig. 34.



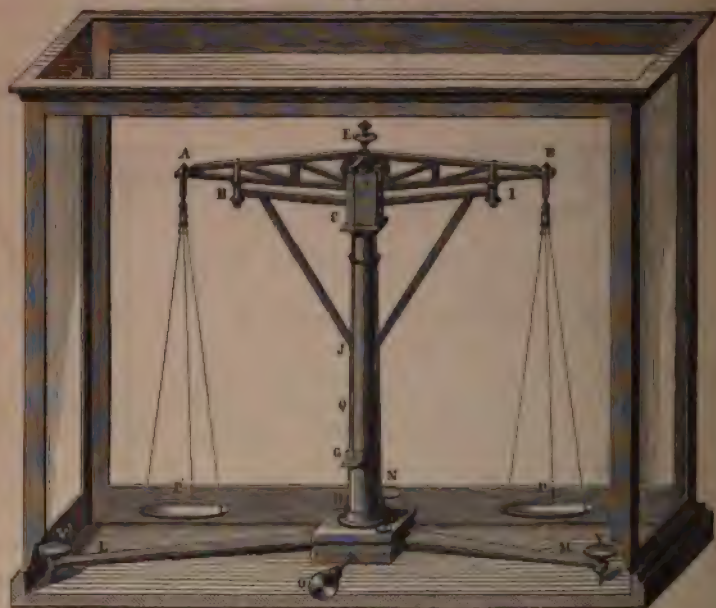
Gewöhnlich werden diese Bedingungen von dem Verfertiger der Waage erfüllt, das ist bei unserer Zeichnung angenommen; zuweilen aber wird es auch demjenigen überlassen, der mit der Waage arbeitet. In dem Falle sind die zwei Prismen unveränderlich fest. Das dritte kann durch Schrauben axial verschoben werden, um die Kanten der drei Prismen in eine Linie zu bringen, und horizontal, um die Abstände der beiden äußern Prismen von dem mittlern unter sich gleich zu machen.

Um die vierte und wichtigste Bedingung herzustellen, ist an dem äußern Rande des Wagebalkens gerade über dem Aufhängepunkt eine Schraubenspindel mit sehr schmalen Gängen eingesetzt, auf welcher sich zwei Laufgewichte *E* auf- und abschrauben lassen. Das untere ist größer und schwerer, das obere kleiner und leichter. Eine Bewegung dieser Gewichte ändert die Lage des Schwerpunktes; werden sie hinaufgeschraubt, so steigt der Schwerpunkt, werden sie hinabgeschraubt, so sinkt derselbe. Die größern Hebungen und Senkungen des Schwerpunktes werden durch eine Bewegung der großen, die kleinern durch eine Drehung der kleinern Schraubenmutter bewirkt. Durch diese Vorrichtung wird also der Schwerpunkt des Wagebalkens beweglich, und man sieht, wie man ihn dadurch der Aufhängeaxe so nahe bringen und dadurch die Waage so empfindlich machen kann, wie man will. Man hat diese Vorrichtung noch dahin vervollkommenet, daß man mittels derselben dem Schwerpunkt auch eine seitliche Bewegung geben kann. Zu dem

Ende ist auf der einen Schraubenmutter ein excentrischer Knopf angebracht, der durch seine seitliche Bewegung bei der Drehung des Lastgewichtes den Schwerpunkt auch seitlich etwas verschiebt, uns also in den Stand setzt, ihn genau vertikal unter die Aufhängeaxe zu bringen in den Augenblicke, wo die drei Prismenkanten sich in der Horizontalen befinden.

Wir bedürfen an unserer Wage noch eines Zeigers, der angibt, wann der Wagebalken horizontal ist. Zu dem Zwecke ist in der Mitte des Balles genau über der Aufhängeaxe eine stählerne Nadel *Q* (Fig. 35) befestigt,

Fig. 35.



bis unten an die Säule hinabreicht, welche die Wage trägt. Die Spitzennadel schwingt vor einer Elfenbeinplatte *G* (Fig. 35) hin und her, welche mit einer Teilung versehen ist. Man reguliert die unbelastete Wage durch Drehung der Stellschrauben *V V'* so, daß das Ende der Nadel gerade auf die Mitte der Teilung, dem mit *O* bezeichneten Teilstrich, einsteht. Von diesem Punkte geht man aus, eine Neigung des Wagebalkens wird dann durch einen Ausschlag der Nadel angegeben; und da letztere sehr lang ist, gibt sie für die geringste Neigung schon einen deutlichen Ausschlag¹⁾.

Es erübrigt noch die Aufstellung der Wage zu betrachten. Dieselbe steht auf einem eisernen Dreifuß *L M N* (Fig. 35), welcher mit Stellschrauben versehen ist. Von der Mitte des Dreifußes erhebt sich eine Messingsäule

¹⁾ Der Mechaniker Bunge in Hamburg verfertigt jetzt Wagen mit kurzen Wagebalken, indem er durch die Form, die er den Balken gibt, so leicht machen kann, ohne Verbiegung zu befürchten, daß die Wagen dieselbe Empfindlichkeit haben, als Wagen mit längern Balken. Die Wagen von Bunge werden sehr gerühmt, ich habe kein Urtheil darüber, weil ich noch nicht einer solchen gearbeitet habe; das Princip, nach dem sie gearbeitet sind, ist jedenfalls ganz richtig.

auf deren Spitze die Achatplatte angebracht ist, auf welcher die Schneide des Stahlprisma F ruht. Teils um die Stahlschneide zu schonen, teils um die Wagebalken vor einer Biegung zu bewahren und die Wage besser transportieren zu können, ist an der Säule DC eine Gabel $H I J$ angebracht, deren Arme den Wagebalken erreichen. Sie kann mittels einer in der Säule verborgenen Zahnstange, in welche ein mittels des Knopfes O drehbares Zahnrad eingreift, gehoben und gesenkt werden. Dreht man den Knopf nach der einen Seite, so hebt man die Gabel; dieselbe nimmt den Wagebalken zwischen ihre Arme bei H und I und unterstützt ihn, indem sie ihn ein wenig emporhebt. Dreht man den Knopf O und damit das Zahnrad nach der entgegengesetzten Seite, so sinkt die Gabel hinunter, läßt die Schneide F sehr langsam auf ihre Unterlage herab und läßt dann den Wagebalken frei.

Um beim Vornehmen einer Wägung die störenden Luftströmungen, welche die Bewegung der Wage hemmen, um die Wirkung der Feuchtigkeit auf die zu wägenden Körper zu hindern, und andererseits um die Wage selbst vor Staub und sonstigen verderblichen Einflüssen zu schützen, umgibt man den ganzen Apparat mit einem Glaskasten, der an einer Seite geöffnet werden kann.

§ 22.

Prüfung der Wage; Methode der Wägungen. Wenn man die von der Theorie geforderten Bedingungen bei Herstellung der Wagen auch möglichst zu erfüllen sucht, so läßt sich eine theoretisch vollkommene Wage nicht herstellen. Man muß deshalb eine jede Wage sorgfältig prüfen, besonders wie weit die Grundbedingung an derselben, die Gleichheit der Wagebalken erfüllt ist. Man kann das leicht durch zwei Wägungen. Wir legen in die Wagschale links einen Körper, dessen Gewicht mit q bezeichnet werde, und bringen ihn durch das auf die Schale rechts gelegte erforderliche Gewicht p ins Gleichgewicht. Ist die Länge des Wagebalkens links gleich l , rechts gleich r , so folgt

$$lq = pr.$$

Wir legen dann den Körper vom Gewichte q auf die Wagschale rechts und bringen ihn durch die erforderlichen in die linke Schale gelegten Gewichte ins Gleichgewicht. Sei dazu $p + p_1$ erforderlich, so ist

$$(p + p_1)l = rq.$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich

$$\frac{r}{l} = \sqrt{1 + \frac{p_1}{p}}.$$

Bei der Wägung mit einer solchen Wage müßte somit auch das beobachtete Gewicht korrigiert werden, es wäre

$$q = p \cdot \sqrt{1 + \frac{p_1}{p}}.$$

Bei Wägungen, bei denen es sich um die äußerste Genauigkeit handelt, wird man sich indes nicht mit dieser Korrektion begnügen, da schon geringe Temperatureinflüsse das Verhältnis der Längen der Wagebalken ändern können. Man wendet da besser die Methode der doppelten Wägung an. Zu dem

Zwecke legt man den abzuwägenden Körper auf die eine Wagschale, um bringt ihn durch Schrotkörner und ähnliches, die auf die andere Wagschale gelegt werden, genau ins Gleichgewicht. Dann ersetzt man den abzuwägenden Körper durch Gewichtsstücke, bis wiederum die Wage genau im Gleichgewicht ist.

Da auf diese Weise die Gewichtsstücke, durch welche das Gewicht des Körpers bestimmt wird, in derselben Schale liegen, somit an demselben Hebelarme wirken, so muß das Gewicht derselben auf das genaueste den Gewichte des Körpers entsprechen, mögen die Arme des Wagebalkens gleich sein oder nicht, wenn nur die Wage empfindlich genug ist, um die kleinsten Gewichtsunterschiede anzugeben.

Die Empfindlichkeit der Wage nimmt, wenn die Aufhängepunkte des Wagebalkens und der Wagschalen nicht in einer geraden Linie liegen, mit steigender Last ab. Wenn nun auch ursprünglich diese drei Punkte in einer geraden Linie liegen, so ist bei den feinen Wagen doch nicht zu vermeiden, daß bei Wägung großer Gewichte eben wegen der Länge und Leichtigkeit des Wagebalkens derselbe eine geringe Biegung erhält. Dadurch aber sinkt der Schwerpunkt des Wagebalkens herab, und die Wage verliert an Empfindlichkeit. Um diesen Fehler zu korrigieren, sind die über dem Wagebalken angebrachten Laufgewichte vorzüglich brauchbar, indem sie die Lage des Schwerpunktes ändern. Man kann mittels derselben der Wage immer die größte Empfindlichkeit geben.

Will man kleine Gewichte wägen, so schraubt man vorher die beiden Laufgewichte in die Höhe, bis die Wage in den Zustand des labilen Gleichgewichts versetzt wird; dann schraubt man das eine der Gewichte wieder herunter, bis das Gleichgewicht der Wage gerade wieder anfängt stabil zu werden. Auf diese Weise ist in dem Falle das Maximum der Empfindlichkeit erreicht. Will man große Gewichte abwägen, so legt man zunächst an die beiden Wagschalen Gewichte, welche nahezu eine gleiche Belastung ausmachen als die zu bestimmenden. Dann verfährt man gerade wie vorher: man schraubt die beiden Laufgewichte bis zum labilen Gleichgewicht der Wage in die Höhe und läßt dann das eine soweit herab, bis das Gleichgewicht der Wage wieder stabil wird. Auch hier ist dann wieder das Maximum der Empfindlichkeit erreicht.

Da die Wägungen zu den feinsten und wichtigsten Versuchen in der Physik gehören, so wird es gut sein, das Verfahren bei denselben etwas genauer zu beschreiben. Wir setzen voraus, die Wage stehe auf einem festen Tische, durch die Stellschrauben sei der Zeiger bei unbelasteter Wage auf den Nullpunkt geführt, man habe der Wage den abzuwägenden Gewicht nach dem Maximum der Empfindlichkeit gegeben und wolle die Methode der doppelten Wägung anwenden. Man legt alsdann den abzuwägenden Körper in die eine Wagschale und Schrot in die andere, bis das Gleichgewicht nahezu hergestellt ist; das bietet keine Schwierigkeit. Ist das erreicht, so arretiert man mittels der Gabel den Wagebalken, hemmt mit der Hand die Schwankungen der Schalen, schließt den Kasten und läßt die Gabel vorsichtig wieder herab. Die Nadel wird dann sehr langsam vor der Teilung hin und her schwingen. Man beobachtet dann eine Anzahl Schwingungen; ist das Gleichgewicht erreicht, so sind die Schwingungen um den Nullpunkt symmetrisch, so daß die Summe zweier auf einander

den Schwingungen nach der einen Seite gleich ist dem doppelten der zwischen den beiden liegenden Schwingung nach der entgegengesetzten Seite. Man wird nämlich bei absolut gleicher Belastung, oder wenn man die mit aller Genauigkeit justierte Wage ohne Belastung in Schwingung versetzt, finden, daß die auf einander folgenden Schwingungen von gleicher Größe sind, daß die Weite der Schwingungen vielmehr und regelmäßig abnimmt. Geht etwa die erste Schwingung nach um r Skalenteile, so findet man die darauf folgende Schwingung links etwa $r - \alpha$ Skalenteile; dann bewegt sich der Zeiger nach rechts $- 2\alpha$ Skalenteile, wieder nach links um $r - 3\alpha$ Skalenteile u. s. f. Grund dieser Abnahme liegt darin, daß der Bewegung der Wage der Widerstand der Luft und die Reibung in der Aufhängung entgegen wirkt. Nehmen wir nun die Schwingungen, ausgedrückt in Teilen der Skala rechts mit $r_1, r_2, r_3 \dots$, nach links mit l_1, l_2, l_3, \dots , so muß, wenn die Wage um die horizontale Lage, der Zeiger also um den Nullpunkt abgelenkt,

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 &= 2l_1 \\ 2r_2 &= l_1 + l_3 \\ r_3 + r_2 &= 2l_2 \end{aligned}$$

sein. Findet man also nach der vorgenommenen Tarierung, daß dies nicht ist, so folgt, daß die Ruhelage des Wagebalkens die horizontale, daß das Gleichgewicht erreicht ist. Findet man dagegen, daß

$$r_1 + r_2 \geq 2l_1$$

s. f., so beweist das, daß die Ruhelage des Wagebalkens nicht die horizontale, somit daß das Gleichgewicht noch nicht erreicht ist; ist $r_2 < 2l_1$, so ist die Wage rechts zu schwer, im entgegengesetzten auf der linken Seite. Man muß dann, nachdem man die Wage arrahat, mit einer Pincette ein Schrotkorn fortnehmen oder zulegen, indem die Tara zu groß oder zu klein ist. Wenn durch Wegnehmen Zulegen eines Schrotkornes aber die Tara zu sehr geändert wird, so man feineres Schrot anwenden oder Papierschnitzel oder auch Sand an und so lange mit dem Ab- und Zugeben dieser kleinen Gewichtchen annehmen, bis die Schwingungen des Zeigers der angegebenen Bedingung entsprechen¹⁾.

Dann ist der Körper tariert; nun wird er aus der Wagschale genommen, seiner werden Gewichte hineingelegt und mit den Gewichten jetzt gerade fahren, wie vorhin mit der Tara. Man findet zunächst das notwendige Gewicht leicht als zwischen n und $n + 1$ Gramme enthalten und hat dann zu dem Ende sich in den Gewichtssätzen 9 Decigramme in Stücken von 5, 2 und 1 Decigramm, so daß man dadurch eine beliebige Zahl von Decigrammen

¹⁾ Die oben auseinandergesetzte Beobachtung der Gleichgewichtslage aus Schwingungen ist der Beobachtung ohne Schwingungen vorzuziehen, da sie rascher und rascher zum Ziele führt. Gerade dann zeigt sich aber der Vorzug der Wagen, welche bei gleicher Empfindlichkeit die kürzesten Balken haben, daß die Schwingungsdauer bei kürzern Balken immer kleiner ist als bei längern Balken.

zwischen 1 und 9 herstellen kann. Ebenso findet man 9 Centigramme und 9 Milligramme in ähnlichen Stücken, so daß man bis auf Milligramme genau das Gewicht eines Körpers erhalten kann.

An vielen Wagen ist nun noch eine Vorrichtung, um selbst die Bruchteile der Milligramme bis auf 0,1 zu erhalten. Es ist nämlich jede Hälfte des Wagebalkens durch vertikale Striche zunächst in 10 gleiche Teile geteilt und diese einzelnen Teile nochmal in 10 gleiche Unterabteilungen. Bei den Gewichtssätzen befinden sich dann Häkchen von Platindraht, genau ein Centigramm schwer, welche als Reiterchen auf dem Wagebalken verschoben werden können. Auf dem ersten Hauptteilstrich wirkt dann ein solches Reiterchen gerade soviel als 1 Milligramm in der Wagschale, weil es an einem Hebelarm wirkt, der nur 0,1 der Länge des Wagebalkens hat; auf den Teilstreichen 2, 3, . . . als 2, 3 . . . Milligramme und auf den zwischen den Hauptteilstreichen eingeschnittenen Teilstreichen als 1,1; 1,2 etc. Milligramme, so daß man durch Verschiebung der Reiter zugleich die Milligramme und ihre Bruchteile erhält.

Die Unterabteilungen der Grammgewichte verfertigt man sich am besten selbst, da man sich meist auf die käuflichen nicht sicher verlassen kann. Man macht dieselben aus Platindraht, der mehrmals durch denselben Drahtzug gezogen ist, und von dem eine Länge von 1 Meter ungefähr ein Gramm wiegt. Nachdem man von einem solchen Draht ein Stück abgeschnitten, welches etwas mehr als ein Gramm wiegt, beschneidet man es um es genau auf ein Gramm zu bringen. Dann wird es ausgespannt und seine Länge gemessen; da nun jedes Zehntel des Drahtes ein Decigramm wiegt, so zerteilt man ihn nach der Länge in Stücke von 5, 2, 1, 1 Decigramm. Das übrig bleibende Zehntel wird dann in einem Drahtzuge x ungefähr einem Meter ausgezogen, und man verfährt mit dem neuen Stück wie vorhin, um die Centigramme zu erhalten. Das dann übrig bleibende Zehntel wird dann zu Milligrammen verarbeitet. Schließlich gibt man den verschiedenen Drahtstücken entsprechende Formen, welche ihr Gewicht bezeichnen.

§ 23.

Specifisches Gewicht und Dichtigkeit. Mittels der Wage sind wir imstande eine wichtige Eigenschaft der Körper zu erkennen. Man findet nämlich sehr oft, daß zwei gleiche Volumina verschiedener Körper nicht das gleiche Gewicht haben, oder was dasselbe ist, daß das Verhältnis der Volumina verschiedener Körper zu ihren Gewichten nicht dasselbe ist. Für einen und denselben Körper ist das Gewicht P seinem Volumen V proportional, also .

$$P = V \cdot p \text{ oder } \frac{P}{V} = p.$$

Diese Größe p nennt man das specifische Gewicht der Körper. Die Größe p gibt also das Verhältnis des Gewichtes zum Volum eines Körpers oder das Gewicht der Volumeinheit. Die Größe p ist konstant für ein und dieselbe Substanz bei gleicher Temperatur, für verschiedene Substanzen verschieden.

Da die Größe p das Gewicht eines bestimmten Volumens eines Körpers ausdrückt, so ist sie eigentlich abhängig von den gewählten Einheiten d

Gewichts und Volumens und daher in verschiedenen Ländern numerisch verschieden. Um jedoch diese Verschiedenheit zu vermeiden, ist man übereingekommen, die specifischen Gewichte überall in derselben Einheit auszu-drücken, nämlich als Einheit das Gewicht der Volumeinheit Wasser zu nehmen. Für gleiche Volumina hat man

$$\text{für irgend einen Körper } P = V \cdot p$$

$$\text{für Wasser } \dots \dots P' = V \cdot p'$$

und daraus

$$\frac{P}{P'} = \frac{p}{p'} = s,$$

so daß s das Verhältnis des Gewichtes der Volumeinheit eines Körpers zu dem der Volumeinheit von Wasser bei 4°C . darstellt. Es ist das relative specifische Gewicht, welches aber meist schlechthin das specifische Gewicht genannt wird.

Um es zu erhalten, genügt es, das Verhältnis der Gewichte P und P' zu bestimmen, d. h. des Gewichtes von einem beliebigen Volum eines Körpers zu dem eines gleichen Volum Wasser von 4° . Dieses Verhältnis ist sonach unabhängig von den gewählten Einheiten.

Man hat nun

$$P = P' \cdot s = V \cdot p' \cdot s,$$

d. h. das Gewicht eines Körpers ist gleich dem Produkt aus seinem Volumen V , seinem relativen specifischen Gewicht s und dem Gewicht p' der Volumeinheit Wasser von 4° .

Legt man das Grammgewicht zu Grunde, so ist die Gewichtseinheit schon die von 1 Kubikcentimeter Wasser bei 4° , also das Gewicht p' gleich 1; in dem Falle hat man daher

$$P = V \cdot s.$$

Diese Vereinfachung gilt jedoch nur dann, wenn man das Verhältnis des Gewichtes eines Körpers zu dem eines gleichen Volumens Wasser als sein relatives specifisches Gewicht nimmt; geht man von dem Gewicht der Volumeinheit eines andern Körpers aus, so fällt sie fort.

Bei den Gasen und Dämpfen z. B. geht man von dem Gewicht der Volumeinheit der atmosphärischen Luft aus; p' ist dann das Gewicht eines Kubikcentimeter atmosphärischer Luft bei 0° und 760^{mm} Barometerstand gleich $0^{\text{gr}} 0,001\,293$. Das Gewicht des Volum V irgend eines Gases ist dann, wenn s sein specifisches Gewicht in Bezug auf atmosphärische Luft ist,

$$P = V \cdot s \cdot 0,001\,293.$$

Wir haben früher § 6 die Masse eines Körpers definiert und gesehen, daß sie gemessen wird durch den Quotienten seines Gewichtes und der Beschleunigung g , die er beim freien Falle erhält. Die Masse eines Körpers ist also seinem Gewichte und somit für eine und dieselbe Substanz auch dem Volumen proportional. Man hat sonach

$$m = V \cdot d, \quad \frac{m}{V} = d.$$

Der Quotient d heißt die Dichtigkeit des Körpers, er gibt die Masse der Volumeinheit.

Man kann die Massen der verschiedenen Körper mit der eines gleichen Volumen Wasser von 4^0 vergleichen. Bedeuten m' , V' , d' Masse, Volumen und Dichtigkeit des Wassers, so hat man

$$m = Vd, \quad m' = V'd',$$

$$\frac{m}{m'} = \frac{d}{d'} = \delta.$$

Dieses Verhältnis δ der Massen gleicher Volumina eines Körpers und Wassers ist die relative Dichtigkeit, welcher die Masse der Volumeinheit Wasser als Einheit zu Grunde liegt.

Nun ist

$$m = \frac{P}{g}, \quad m' = \frac{P'}{g},$$

und daher

$$\frac{m}{m'} = \frac{P}{P'} = \delta = s.$$

Es geht daraus hervor, daß Dichtigkeiten und spezifische Gewichte der Körper durch eine und dieselbe Zahl dargestellt werden. Dennoch aber sind Dichtigkeiten und spezifische Gewichte verschieden, und die Einheiten, die beiden zu Grunde liegen, sind nicht dieselben; bei dem einen ist es das Gewicht, bei dem andern die Masse der Volumeinheit Wasser.

Vielfach läßt man indes diesen Unterschied fallen, gebraucht die Bezeichnung Dichtigkeit auch für das spezifische Gewicht und trennt ebenfalls nicht scharf relatives und eigentliches spezifisches Gewicht oder Dichtigkeit

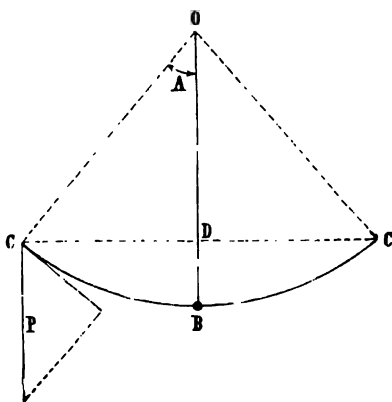
§ 24.

Das Pendel. Die zweite Anwendung, welche wir von den in den frühern Paragraphen abgeleiteten Gesetzen der drehenden Bewegung machen müssen, ist die Untersuchung der Bewegung des Pendels; wir erhalten dadurch zunächst die Theorie des gewöhnlichen Pendels, welches wir zum Messen der Zeit gebrauchen, weiter aber benutzen wir diese Sätze in ausgedehntester Weise zur Messung von Kräften, Trägheitsmomenten und Beschleunigungen.

Das Pendel in seiner einfachsten Form ist ein Stab oder Faden OB (Fig. 36), welcher um eine Axe O drehbar ist und an seinem untern Ende oder in der Nähe desselben ein Gewicht B trägt. In der Gleichgewichtslage muß der Schwerpunkt des Pendels vertikal unter der Drehungsaxe sich befinden, das Pendel muß also vertikal hängen.

Heben wir dasselbe aus der Gleichgewichtslage nach der einen Seite heraus, etwa nach OC , so daß die Lage des Pendels mit der Gleichgewichtslage den Winkel A bildet, und überlassen es dann sich selbst, so muß das Pendel sich gegen die Gleichgewichtslage hin bewegen. Denn das im

Fig. 36.



Schwerpunkte des Pendels angreifende Gewicht P , welches vertikal abwärts gerichtet ist, gibt demselben ein Drehungsmoment, welches das Pendel gegen die Gleichgewichtslage hintreibt. Dieses Drehungsmoment ist gleich dem Produkte aus der zu OC senkrechten, also der in die augenblickliche Bewegungsrichtung fallenden Komponente der Kraft, des im Schwerpunkt angreifenden Gewichtes P , und dem Abstände des Schwerpunktes von der Drehungsaxe. Die zu OC senkrechte Komponente der Kraft ist $P \sin A$; nennen wir den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe z , so ist das Drehungsmoment, welches das Pendel aus seiner augenblicklichen Lage gegen die Gleichgewichtslage hintreibt, $P \sin A \cdot z$. Sowie nun aber das Pendel seine Lage OC verlassen hat, und einen kleinern Winkel α mit der Gleichgewichtslage bildet, wird auch sofort das Drehungsmoment kleiner, es geht über in $P \sin \alpha \cdot z$, da dann die Komponente der Kraft nur mehr $P \sin \alpha$ ist. Die bewegende Kraft wird somit stetig kleiner mit $\sin \alpha$, um gleich Null zu werden, wenn α und damit $\sin \alpha = 0$ wird. Das Pendel muß daher auf seiner Bahn OB eine beschleunigte Bewegung erhalten, deren Beschleunigung mit Annäherung an die Gleichgewichtslage aber immer kleiner wird.

In der Lage OB angekommen, besitzt das Pendel eine gewisse Winkelgeschwindigkeit, es kann deshalb in dieser Lage nicht verharren, sondern muß vermöge der Trägheit nach der andern Seite weiter gehen. Sowie es aber an dieser mit der Gleichgewichtslage einen Winkel α bildet, wirkt wieder ein Drehungsmoment von der Größe $P \sin \alpha \cdot z$ auf dasselbe ein, aber jetzt in entgegengesetzter Richtung, da α jetzt an der andern Seite der Vertikalen liegt. Dasselbe wirkt somit jetzt gerade so verzögernd auf die Bewegung ein wie vorher beschleunigend. Da nun die jetzt verzögernden Drehungsmomente genau denselben Wert haben, wie bei einem gleichen Winkel α auf der andern Seite die beschleunigenden, so folgt, daß das Pendel sich nach dieser Seite der Vertikalen, bis durch die fortwährend wirkende Verzögerung die Geschwindigkeit gleich Null geworden ist, durch genau denselben Winkel BC' aufsteigend bewegen muß, als der Bogen BC war, auf welchem die Geschwindigkeit von Null bis zu jenem Werte gewachsen ist, den das Pendel bei dem Passieren der Gleichgewichtslage besaß. In dieser äußersten Lage angekommen muß das Pendel einen Augenblick in Ruhe sein; das dann aber wirkende Drehungsmoment $P \sin A \cdot z$ treibt das Pendel zurück, und da das Pendel diesen Rückgang unter genau denselben Umständen beginnt und fortsetzt, so folgt, daß es jetzt genau denselben Bogen $C'BC$ und genau in derselben Weise in entgegengesetztem Sinne durchläuft wie bei der ersten Bewegung von C nach C' . Daraus folgt, daß das Pendel unaufhörlich denselben Bogen CBC' einmal in der einen, dann in der entgegengesetzten Richtung durchlaufen muß. Das Pendel nimmt somit eine schwingende Bewegung an, es vollführt Schwingungen um die Gleichgewichtslage. Die Größe des Bogens, durch welchen das Pendel schwingt, nennt man seine Schwingungsweite oder Amplitude. Dieselbe müßte nach unserer Betrachtung konstant sein; in Wirklichkeit ist das indes nicht der Fall, da wir bei unserer Ableitung die der Bewegung entgegenstehenden Hindernisse, als Reibung in der Aufhängeaxe, Widerstand der Luft, außer Acht gelassen haben. Da die Überwindung derselben in jedem Momente etwas Arbeit erfordert, so wird die

dem Pendel durch die erste Hebung erteilte Arbeit allmählich verbraucht werden, die Amplituden werden kleiner und das Pendel kommt allmählich zur Ruhe. Diese Abnahme lassen wir zunächst außer Acht, und nehmen an, das Pendel bewege sich ohne Widerstand, oder, wie es in unsern Uhren der Fall ist, es erhalte jedesmal in der äußersten Lage einen solchen Antrieb, daß durch der zur Überwindung der Widerstände stattgehabte Arbeitsverlust gerade ausgeglichen werde.

Dann erkennt man weiter, daß die Zeit, welche das Pendel zur Ausführung einer Schwingung gebraucht, seine Schwingungsdauer, immer selbe sein muß, da es immer denselben Weg unter denselben Verhältnissen zurücklegt. Gerade das macht das Pendel zu einem vorzüglichem Mittel der Zeitmessung, daß es uns genau gleiche Zeitabschnitte angibt.

§ 25.

Ableitung der Schwingungsdauer des Pendels. Die Untersuchung von welchen Umständen die Schwingungsdauer des Pendels abhängig könnten wir zum Teil wenigstens experimentell führen; wir wollen in die Gesetze der Pendelbewegung aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ableiten, da sie uns ein ausgezeichnetes Beispiel der Bewegung durch konstante Kräfte bietet.

Wir sahen im vorigen Paragraph, daß das Drehungsmoment, welches das Pendel in jedem Momente antreibt, wenn es mit der Gleichgewichtslage den Winkel α bildet, gleich $Pz \sin \alpha$ ist. Setzen wir zunächst voraus, die Amplitude so klein sei, daß wir den Sinus gleich dem Bogen setzen dürfen, so können wir auch als Drehungsmoment $Pz\alpha$ setzen. Dieses Drehungsmoment gibt uns nach § 14 die in der Abstandseinheit von der Drehungsachse angreifende Kraft; das heißt die in der Abstandseinheit von der Drehungsachse angreifende Kraft $Pz\alpha$ ersetzt die das Pendel wirklich in Bewegung setzenden Kräfte.

Um die Beschleunigung zu erhalten, welche diese Kraft dem Pendel in dem Momente erteilt, in welchem es mit der Vertikalen den Winkel α bildet, müssen wir die Masse bestimmen, welche in der Abstandseinheit von der Drehungsachse die Masse des Pendels ersetzt, welche an Stelle gegebenen Pendels dort angebracht durch die wirksamen Kräfte genau selbe Winkelgeschwindigkeit bekommt, als das Pendel. Wir wissen, diese Masse durch das Trägheitsmoment des Pendels gegeben ist. Setzen wir voraus, wir hätten dasselbe berechnet und gleich K gefunden. Dann ist dann die Beschleunigung, die das Pendel in diesem Momente erhält resp. die Beschleunigung des in der Abstandseinheit von der Drehungsachse liegenden Punktes, an dem die Kraft angreift, und in dem die Masse sich befindet,

$$\frac{Pz\alpha}{K}.$$

Für diese Beschleunigung erhalten wir andererseits nach § 11 : § 12 den Quotienten aus der Geschwindigkeitszunahme dv und der unendlich kleinen Zeit dt , während deren wir die Kraft als konstant ansehen können erhalten somit die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{Pz\alpha}{K}.$$

Wir müssen in dieser Gleichung indes für die rechte Seite noch das Vorzeichen richtig bestimmen, da wir sahen, daß die Beschleunigung bald positiv, bald an der andern Seite der Gleichgewichtslage negativ ist. Da das Pendel sich zu verschiedenen Zeiten an den entgegengesetzten Seiten der Gleichgewichtslage in gleichen Abständen α befindet, so müssen wir, um sie absolut gleichen aber an entgegengesetzten Seiten der Ruhelage vorkommenden Lagen zu unterscheiden, dieselben mit entgegengesetztem Vorzeichen versehen. Wir wollen nun die Abstände von der Gleichgewichtslage nach links hin mit dem positiven, diejenigen nach rechts hin mit dem negativen Vorzeichen versehen. Dann müssen wir auch die Beschleunigung nach links hin als positive, die nach rechts hin als negative bezeichnen. Nun ist, so lange das Pendel sich links befindet, also α positiv ist, die Beschleunigung nach rechts gerichtet, also negativ, so lange α negativ ist, als Pendel sich rechts befindet, nach links; oder die Beschleunigung hat immer die dem augenblicklichen Abstände α entgegengesetzte Richtung. Wir müssen daher in unserer Gleichung der rechten Seite das negative Vorzeichen geben, um zu erkennen, daß die Beschleunigung immer der Richtung, nach welcher α gerechnet ist, entgegengesetzt ist, oder es ist

$$\frac{dv}{dt} = - \frac{Pz\alpha}{K}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{Pz}{K} = k^2,$$

wird

$$\frac{dv}{dt} = - k^2 \alpha \quad \dots \dots \dots (1)$$

Wir erhalten hier den Differentialquotienten der Geschwindigkeit nach der Zeit nicht als eine Funktion der Zeit angegeben, sondern als eine Funktion der Lage des Punktes in seiner Bahn. Wir können demnach hier leicht die in der Einleitung abgeleiteten Sätze, nach denen wir aus dem Differentialquotienten nach einer Veränderlichen die Funktion ableiten, unmittelbar anwenden. Wir gelangen indes leicht dazu, wenn wir mit Hilfe des im § 11 abgeleiteten Satzes, daß die Arbeit der Kraft gleich ist der ebendigen Kraft, welche diese Arbeit der Masse erteilt hat, aus der Gleichung (1) eine andere ableiten. Wir gehen dabei aus von der äußersten Lage des Pendels, in welcher es die Ablenkung α_0 und die Geschwindigkeit 0 hat. Fällt es dann herab, bis die Ablenkung α ist, so sei seine Geschwindigkeit in diesem Momente gleich v , somit seine lebendige Kraft gleich $\frac{1}{2} K v^2$. Diese lebendige Kraft ist der Masse K dadurch erteilt worden, daß auf jedem Wegelement $d\alpha$ von α_0 bis α die Kraft $Pz\alpha$ gewirkt hat. Da die Masse K sich in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe befindet, und wir α als Bogen in Bruchteilen des Kreisumfanges 2π rechnen, ist $d\alpha$ im Längenmaße der Weg, durch welchen die Kraft $Pz\alpha$ gewirkt hat, somit $Pz\alpha d\alpha$ die auf dem Wegelement $d\alpha$ geleistete Arbeit. Die Summen aller der Arbeiten von α_0 bis α genommen ist demnach gleich der überhaupt geleisteten Arbeit oder gleich der gewonnenen lebendigen Kraft, oder es ist

$$\frac{1}{2} K v^2 = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} Pz\alpha d\alpha,$$

worin wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen setzen müssen, weil das Zurücklegen des Bogens $d\alpha$, wenn α positiv ist, während die Geschwindigkeit v wächst, einer Verminderung des Bogens α entspricht. Das auf der rechten Seite der Gleichung stehende bestimmte Integral ergibt sich unmittelbar nach E 1 und VIII, es ist

$$\frac{1}{2} K v^2 = -\frac{1}{2} P z (\alpha^2 - \alpha_0^2) = \frac{1}{2} P z (\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Für die Geschwindigkeit v im Abstände α von der Gleichgewichtslage ergibt sich daraus

$$v^2 = \frac{P z}{K} (\alpha_0^2 - \alpha^2) = k^2 (\alpha_0^2 - \alpha^2).$$

Dafs diese Gleichung die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung gemäß unserer vorigen Betrachtung wiedergibt, erkennt man sehr leicht. Die Geschwindigkeit ist gleich Null, wenn $\alpha = \alpha_0$, in der äußersten Lage von wo aus die Bewegung beginnt; sie wächst mit abnehmendem α und erhält ihren größten Wert, wenn $\alpha = 0$, wenn das Pendel die Gleichgewichtslage passiert. Nach Überschreiten derselben nimmt sie wieder ab, und hat für gleiche Werte α auf beiden Seiten der Gleichgewichtslage denselben Wert, da α^2 für ein positives oder negatives α denselben Wert hat. Da die Gleichung für v

$$v = \pm k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}$$

wird, so gibt sie gleichzeitig an, dafs die Geschwindigkeit bei der einen Schwingung nach der einen, bei der andern nach der entgegengesetzten gerichtet ist.

Aus dieser Gleichung für die Geschwindigkeit der Bewegung müssen wir nun ableiten, welche Zeit das Pendel braucht, um irgend ein beliebiges Stück seiner Bahn zurückzulegen, woraus sich dann die Zeit ergibt, welche das Pendel zum Durchlaufen seiner ganzen Bahn gebraucht. Nach § 1 resp. § 11 haben wir, wenn s die von dem Körper in der Zeit t durchlaufene Bahn ist,

$$\frac{ds}{dt} = v; \quad ds = v \cdot dt.$$

Da nun $d\alpha$ die von dem Pendel in der Zeit dt zurückgelegte Strecke ist, so wird

$$d\alpha = v dt = -k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2} \cdot dt,$$

wo wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen schreiben, wenn wir die Bewegung von dem positiven Werte α_0 aus verfolgen, da die Geschwindigkeit, wenn wir die Schwingung von $+\alpha_0$ zu $-\alpha_0$ betrachten, nach der negativen Seite gerichtet, also negativ zu setzen ist. Für die Zeit dt , während welcher die Strecke $d\alpha$ durchlaufen wird, ergibt sich daraus

$$dt = -\frac{d\alpha}{k \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}}.$$

Die Bewegung beginnt in dem Augenblick, in welchem wir das Pendel in seiner äußersten Lage, wo $\alpha = \alpha_0$, loslassen; die Zeit t , welche es braucht, um einen solchen Bogen zurückzulegen, dafs α_0 in α übergeht, ist die Summe der Zeitelemente dt , während deren es die Wegelemente $d\alpha$ durchlief, welche auf dem Wege von α_0 bis α liegen, also

$$t = \int dt = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{k \cdot \sqrt{\alpha_0^2 - \alpha^2}},$$

oder auch

$$k \cdot t = - \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{\frac{1}{\alpha_0} d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2}}.$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Differentialausdruck ist der E 9 abgeleitete, wie man unmittelbar erkennt, wenn man $\frac{\alpha}{\alpha_0} = x$ setzt, wonach $dx = \frac{1}{\alpha_0} d\alpha$ wird. Demnach wird

$$kt = \arccos\left(\cos = \frac{\alpha}{\alpha_0}\right) - \arccos\left(\cos = \frac{\alpha_0}{\alpha_0}\right).$$

Der Bogen, dessen Cosinus gleich $\frac{\alpha_0}{\alpha_0}$, also gleich 1 ist, ist 0, 2π , oder überhaupt irgend ein Vielfaches von 2π . Welchen Wert wir dafür setzen, ist gleichgültig, da wir für $t = 0$ auch in dem ersten Gliede auf der rechten Seite $\alpha = \alpha_0$ zu setzen haben, wir also dort von demselben Werte ausgehen müssen, den wir dem zweiten beilegen. Wir setzen deshalb am einfachsten das Glied gleich Null, und erhalten

$$kt = \arccos\left(\cos = \frac{\alpha}{\alpha_0}\right).$$

Die Schwingungsdauer des Pendels T erhalten wir hieraus, wenn wir α so bestimmen, daß die zurückgelegte Bahn der ganzen Amplitude entspricht; das ist der Fall, wenn $\alpha = -\alpha_0$ wird, demnach

$$kT = \arccos(\cos = -1) = \pi,$$

somit

$$T = \pi \frac{1}{k}.$$

Da wir nun gesetzt hatten

$$k^2 = \frac{P_z}{K}; \quad \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{K}{P_z}},$$

so folgt schließlich

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{P_z}}.$$

Die Schwingungsdauer des Pendels ist somit gleich der Zahl π multipliziert mit der Quadratwurzel aus dem Quotienten des Trägheitsmomentes des Pendels und des Drehungsmomentes, welches die wirksamen Kräfte dem Pendel erteilen, wenn α oder vielmehr, da wir α für $\sin \alpha$ gesetzt haben, wenn $\sin \alpha = 1$ ist, also das Pendel in horizontaler Lage ist.

Um zu erkennen, daß obige Gleichung für t uns die Schwingung des Pendels so darstellt, wie uns die Betrachtungen des vorigen Paragraphen sie lieferten, schreiben wir

$$\frac{\alpha}{\alpha_0} = \cos kt, \quad \alpha = \alpha_0 \cos kt,$$

wofür wir auch, da

$$k = \frac{\pi}{T},$$

setzen können

$$\alpha = \alpha_0 \cos \pi \frac{t}{T}.$$

Ist $t = 0$, so wird der Cosinus gleich 1, somit $\alpha = \alpha_0$; wächst wird der Cosinus immer kleiner, bis er für $t = \frac{1}{2} T$ gleich Null wird. Das Pendel hat somit nach der ersten Hälfte der Schwingungsdauer die Gleichgewichtslage erreicht. Wächst t weiter, so wird der Cosinus und damit α negativ, das Pendel bewegt sich auf die andere Seite der Gleichgewichtslage bis für $t = T$ die Ablenkung $\alpha = -\alpha_0$ wird. Bei weiterer Zunahme von t nimmt der negative Wert des Cosinus und damit α wieder ab, bis für $t = \frac{3}{2} T$ gleich Null, und wird dann wieder positiv und wächst bis $t = 2 T$ u. s. f. Kurz wir sehen, das Pendel geht unaufhörlich hin und her, und legt jedesmal in der Zeit T seine Bahn zurück.

Die abgeleitete Gleichung gibt somit in der That die Bewegung des Pendels gerade so wieder, wie wir sie durch die Betrachtung des Pendels in den vorherigen Paragraphen erkannt hatten.

§ 26.

Mathematisches und physisches Pendel. Der vorhin für das Pendel erhaltene Ausdruck

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{Pz}}$$

nimmt eine sehr einfache Form an, wenn wir voraussetzen, das Pendel bestehe aus einem gewichtslosen Faden, an dessen unterem Ende sich ein schwerer Punkt befände. Sei die Länge des Fadens gleich l , das Gewicht des Punktes gleich P , so erhalten wir für das Trägheitsmoment des Fadenpunktes

$$K = \frac{P}{g} \cdot l^2,$$

und für das statische Moment

$$Pz = Pl,$$

da, wenn der Faden gewichtslos ist und das Gewicht P ein schwerer Punkt ist, die ganze Masse sich im Abstände l von der Drehungsaxe befindet, ebenso der Schwerpunkt in den Punkt P fällt. Die Schwingungsdauer des Pendels ist dann

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Ein solches Pendel, welches man in Wirklichkeit streng genommen nicht stellen kann, nennt man ein mathematisches Pendel. Für dieses gilt, wie wir zu dem Satze, daß die Schwingungsdauer der Quadratwurzel aus der Pendellänge direkt und der Quadratwurzel aus der Beschleunigung im freien Fall umgekehrt proportional ist.

Die wirklich herstellbaren Pendel, bei denen also die Masse ganz am Ende des Pendels verteilt ist, nennt man physische Pendel. Mit einem physischen Pendel hat ein mathematisches bestimmter Länge die gleiche

Schwingungsdauer; diese Länge bezeichnet man als die Länge des physischen Pendels. Einen Ausdruck für diese Länge gibt uns unsere Gleichung für die Schwingungsdauer des physischen Pendels unmittelbar, wenn wir die Masse des Pendels m einführen, also

$$\frac{P}{g} = m, \quad P = g m$$

setzen, denn dann wird der Ausdruck für T

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{g m z}},$$

und die Länge l des isochron schwingenden mathematischen Pendels wird

$$l = \frac{K}{m z}.$$

Den in dem so bestimmten Abstände l von der Drehungsaxe liegenden Punkt des physischen Pendels nennt man den Schwingungspunkt des Pendels.

§ 27.

Experimentelle Prüfung der Pendelgesetze. Die theoretisch abgeleiteten Gesetze über die Schwingungsdauer des Pendels lassen sich in doppelter Weise experimentell prüfen. Zunächst kann man Pendel herstellen, welche einem mathematischen Pendel möglichst nahe kommen, indem man einen möglichst leichten Faden unten mit einer kleinen aber möglichst schweren Kugel belastet. Für ein solches Pendel muß dann die Schwingungsdauer durch die Gleichung

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gegeben sein, worin man für l ohne merklichen Fehler den Abstand des Mittelpunktes der Kugel von der Drehungsaxe einsetzen kann.

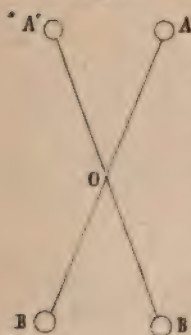
Stellt man ein solches Pendel etwa aus einem ganz feinen weichen Kupferdraht her, an welchem unten eine Bleikugel befestigt ist, so kann man zunächst leicht zeigen, daß bei kleinen Amplituden die Schwingungsdauer nicht merklich von der Amplitude beeinflusst wird. Man versetzt das Pendel in Schwingungen, so daß α_0 , der Anfangsausschlag nur etwa 4° beträgt. Wie wir schon bemerkten werden wegen der verschiedenen Widerstände, welche der Bewegung des Pendels entgegenwirken, die Amplituden der Bewegung immer kleiner, ein solches Pendel macht aber doch, ehe es zur Ruhe kommt, einige hundert Schwingungen. Bestimmt man nun die Dauer etwa der ersten hundert, dann der zweiten etc. hundert Schwingungen, so findet man die Zeit stets gleich, trotzdem die Größe der Amplitude bei den weiter folgenden Schwingungen stets kleiner ist als bei den vorhergehenden.

Die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Länge des Pendels erkennt man, indem man Fäden von verschiedener Länge anwendet. Nimmt man Fäden, deren Längen sich verhalten wie 1, 4, 9, 16, so findet man, daß die Schwingungsdauern sich verhalten wie 1 : 2 : 3 : 4.

Eine vollständigere experimentelle Prüfung der Pendelgesetze können wir indes durch Herstellung eines Pendels erreichen, an welchem wir die

statischen Momente und die Trägheitsmomente zu verändern imstande sind. An den beiden Enden AB (Fig. 37) eines dünnen und leichten Stabes von Tannenholz befestigen wir zwei schwere Bleikugeln, deren Gewicht resp.

Fig. 37.



P und $P + p$ ist. Mittels einer in der Mitte O des Stabes befestigten Stahlschneide setzen wir dann den Stab auf eine feste Unterlage, und erhalten dann ein Pendel, dessen Schwingungsdauer wir leicht berechnen können. Die bewegende Kraft für dieses Pendel ist nicht das Gesamtgewicht, sondern nur das Übergewicht p , da die beiden Gewichte P im Abstände $\pm l = OB = OA$ und ebenso die Gewichte der beiden Stabhälften sich vollständig aequilibrieren. Der Angriffspunkt der Kraft ist der Punkt B , wenn wir annehmen, daß dort der Schwerpunkt des untern Gewichtes sei. Das statische Moment unseres Pendels ist somit gleich $p \cdot l$. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des Holzstabes mit K und die Radien der beiden Kugeln mit r und r_1 , so ist nach § 19

und 20 das Trägheitsmoment des ganzen Pendels

$$\begin{aligned} M &= K + \frac{P}{g} (\frac{2}{5} r^2 + l^2) + \frac{P+p}{g} (\frac{2}{5} r_1^2 + l^2) \\ &= K + \frac{2}{5} \left(\frac{P}{g} r^2 + \frac{P+p}{g} r_1^2 \right) + \frac{2P+p}{g} l^2. \end{aligned}$$

Nehmen wir den Stab recht leicht und geben ihm eine Länge von 2 Meter, so daß $l = 1$ Meter wird, so können wir ohne merklichen Fehler die beiden ersten Glieder vernachlässigen, da der Radius der Bleikugeln selbst wenn wir bis zu einem Gewichte von 2 Kilogramm gehen, nur etwa 0,035^m beträgt. Der Wert der beiden ersten Glieder erreicht dann noch nicht 0,001 des letzten.

Dies vorausgesetzt erhalten wir für die Schwingungsdauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{(2P+p)l^2}{gpl}} = \pi \sqrt{\frac{(2P+p)l}{gp}}.$$

Wählen wir nun als Kugel bei A eine von 1 Kilogramm Gewicht und bei B der Reihe nach Kugeln von

1,6666 Kilogr. 1,25 Kilogr. 1,1333 Kilogr.,
wodurch also

$$p = \frac{2}{3} \text{ Kilogr.}, \quad \frac{2}{5} \text{ Kilogr.}, \quad \frac{2}{15} \text{ Kilogr.}$$

wird, so werden die Schwingungsdauern des Pendels

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad 3\pi \sqrt{\frac{l}{g}}; \quad 4\pi \sqrt{\frac{l}{g}};$$

die Schwingungsdauern müssen also unter einander und zu denen des einfachen Pendels von der Länge l im Verhältnis 2 : 3 : 4 stehen.

Man wird bei Versuchen diese Resultate leicht bestätigt finden, um so genauer, je leichter man den Pendelstab gewählt hat.

Wir können noch in anderer Weise die Beschleunigungen und Schwingungsdauern variieren und damit gleichzeitig einen experimentellen Beweis für die Richtigkeit des im § 19 abgeleiteten Satzes über das Trägheitsmoment

liefern. Wir nehmen zwei Bleikugeln, jede vom Gewichte P , und durchbohren sie so, daß sie auf dem Stabe verschiebbar und in verschiedenen Abständen von der Drehungsaxe festgeklemmt werden können. Im Abstände l unten am Ende des Stabes befestigen wir dann eine Kugel vom Gewichte p . Klemmen wir dann die Kugeln P einmal so ein, daß ihr Mittelpunkt sich im Abstände $\frac{3}{4}l$ befindet, dann, daß der Abstand der Mittelpunkt wird $\frac{1}{2}l$, $\frac{1}{4}l$, so lassen wir die bewegende Kraft und die bewegte Masse ganz ungeändert, geben letzterer aber eine andere Verteilung, und infolge dessen muß die Schwingungsdauer jedesmal eine andere sein. Befinden sich die Kugeln im Abstand $\frac{3}{4}l$, so wird das Trägheitsmoment des Pendels

$$M = K + 2 \frac{P}{g} \left(\frac{9}{16} l^2 + \frac{3}{8} r^2 \right) + \frac{p}{g} (l^2 + \frac{3}{8} r_1^2),$$

wenn r der Radius der Kugeln P und r_1 jener der Kugeln p ist. Nach der vorhin gemachten Bemerkung können wir auch hier die nicht mit l^2 multiplizierten Glieder vernachlässigen und erhalten dann

$$M = \left(\frac{9}{8} \frac{P}{g} + \frac{p}{g} \right) l^2$$

und für die Schwingungsdauer des Pendels

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{(18P + 16p)l}{16 \cdot gp}}.$$

Klemmen wir die beiden Kugeln P_1 so, daß ihre Mittelpunkte sich in $\frac{1}{2}l$ befinden, so wird in derselben Weise berechnet

$$t = \pi \sqrt{\frac{(8P + 16p)l}{16 \cdot pg}},$$

und wenn die Kugeln in $\frac{1}{4}l$ eingeklemmt werden,

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{(2P + 16p) \cdot l}{16 \cdot pg}}.$$

Nehmen wir nun jede der Kugeln P gleich 1 Kilogramm und p gleich $\frac{1}{16}$ Kilogramm, so werden diese Schwingungsdauern

$$t = 4,35 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad 3\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad 1,732 \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

Werte, die man leicht durch den Versuch bestätigt findet. Damit ist dann auch experimentell der Nachweis geführt, daß das Produkt einer Masse in das Quadrat ihres Abstandes von der Drehungsaxe ihr Trägheitsmoment ist, oder daß bei der drehenden Bewegung Massen sich ersetzen, welche sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsaxe.

§ 28.

Korrektion wegen der Amplitude. Wir haben schon im § 24 darauf hingewiesen, daß unsere Ableitung der Pendelgesetze die Voraussetzung machte, daß die Amplitude so klein sei, daß wir die Bögen für die Sinus einsetzen dürfen. Das ist strenge nur für unendlich kleine Bögen der Fall. In der That ist deshalb auch die Schwingungsdauer etwas von

der Amplitude abhängig und etwas gröfser, als unsere Gleichung sie angibt. Die Berechnung der Schwingungsdauer, wenn wir in der Gleichung 1 des § 24 $\sin \alpha$ anstatt α beibehalten, ist ziemlich kompliciert, ohne jedoch im Princip irgendwie anders geführt zu werden, als wir sie führten. Wir begnügen uns deshalb hier damit, das Resultat der Rechnung mitzuteilen. Ist α_0 der Ausschlagswinkel des Pendels, so wird

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{Pz}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0 + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{1}{2} \alpha_0 + \dots \right).$$

Wenn α_0 nur wenige Grade beträgt, so kann man schon das dritte Glied der Klammer fort lassen. Der Wert der ganzen Korrektion beträgt erst, wenn $\alpha_0 = 10^\circ$ ist, etwa 0,2 Procent der Schwingungsdauer, das heifst, ein Pendel, welches mit dieser Amplitude 1000 Schwingungen vollführt, würde mit unendlich kleiner Amplitude 1001,89 Schwingungen machen. Mit dieser Korrektion erhält man aus der beobachteten Schwingungsdauer T die auf unendlich kleine Amplitude reducierte T'

$$T' = \pi \sqrt{\frac{K}{Pz}} = \frac{T}{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_0},$$

für welche somit die abgeleitete Gleichung für die Schwingungsdauer des Pendels strenge gilt.

§ 29.

Bestimmung von g . Eine der wichtigsten Anwendungen unserer Gleichung für die Schwingungsdauer des Pendels

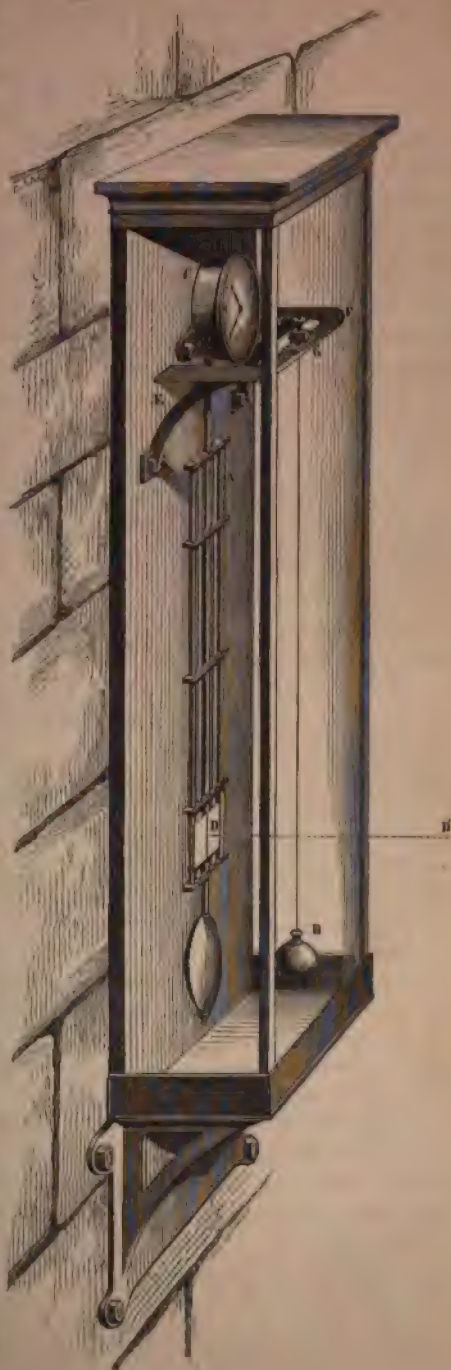
$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

worin l die vorhin definierte Länge des physischen Pendels bedeutet, ist die Bestimmung der Gröfse g , der Beschleunigung beim freien Fall, da diese Gröfse auf keinem andern Wege mit einer ähnlichen Genauigkeit bestimmt werden kann, als durch Beobachtung der Pendelschwingungen. Man beobachtet dazu mit möglichster Genauigkeit die Schwingungsdauer eines Pendels, bestimmt die Länge des mathematischen Pendels bei gleicher Schwingungsdauer und berechnet dann g . Die einzige Schwierigkeit ist die Bestimmung der Länge des mathematischen mit dem physischen isochron schwingenden Pendels. Man kann dazu auf einem doppelten Wege gelangen; entweder gibt man dem Pendel eine geometrisch bestimmte Gestalt, und sorgt dafür, dafs die Masse des Pendels überall die gleiche Dichtigkeit hat, so dafs man das Trägheitsmoment des Pendels berechnen kann; diesen Weg schlugen Borda, Arago und Biot sowie Bessel bei ihren Bestimmungen von g ein; oder man gibt dem Pendel eine solche Form, dafs man an ihm experimentell die Länge des mit ihm isochron schwingenden mathematischen Pendels bestimmen kann. Letztere Methode ist von Bohnenberger angegeben und vorzugsweise von Kater ausgeführt worden.

Die Anordnung der Versuche, wie sie Borda und später Arago und Biot anwandten, zeigt Fig. 38. Das Pendel BG besteht aus dünnem Platindraht, an welchem unten eine Kugel von Platin befestigt ist. Das Pendel ist befestigt an einem stählernen Prisma, das mit seiner untern scharfen Kante auf einer auf dem eisernen Träger EFG aufgelegten in ihrer Mitte

am Durchlassen des Pendels durchbohrten Platte von Stahl der Achat aufsteht. Da das Prisma und die Klemmvorrichtung, welche den Draht hält, an den Oscillationen teilnehmen und ein nicht zu vernachlässigendes Gewicht haben, so würde die Schwingungsdauer des Pendels auch von der Verteilung der Masse des Prismas abhängen. Dadurch würde es schwierig sein, durch Rechnung das Pendel auf ein mathematisches zu reducieren, da man bei der Aufhängevorrichtung nicht eine so einfache geometrische Gestalt geben kann, wie sie zur Berechnung des Trägheitsmomentes erforderlich ist. Zur Umgehung dieser Schwierigkeit richtete Borda die Aufhängevorrichtung so ein, daß sie auf die Schwingungsdauer des Pendels keinen Einfluß hatte. Wegen der unter dem Prisma angebrachten, zur Aufnahme des Platinrahtes dienenden Klemmvorrichtung liegt der Schwerpunkt der ganzen Aufhängevorrichtung unterhalb der Schneide. Stellt man daher das Prisma ohne angehängtes Pendel auf die Unterlage, so schwingt es selbst als Pendel hin und her. Um nun die Schwingungsdauer dieses kleinen Pendels verlängern zu können, ist, wie die Figur zeigt, in der Mitte des Prismas, gewissermaßen als eine nach oben gerichtete Verlängerung des Pendelfadens, eine Karubenspindel aufgesetzt, auf welcher ein Laufgewicht auf und abwärts bewegt werden kann. Durch die Hebung des Laufgewichtes wird der Schwerpunkt der Aufhängevorrichtung der Schneide näher gebracht, und damit wird die Schwingungsdauer derselben vergrößert. Denn nennen wir

Fig. 38.



die Masse der Aufhängevorrichtung m , den Abstand ihres Schwerpunktes von der Schneide a und das Trägheitsmoment in Bezug auf die Schneide k , so ist die Schwingungsdauer

$$t = \pi \sqrt{\frac{k}{g a m}};$$

es wächst somit t , wenn a kleiner wird. Das Laufgewicht wurde nun so gestellt, daß die Schwingungsdauer der Aufhängevorrichtung für sich genau gleich war der Schwingungsdauer des ganzen zusammengesetzten Pendels. Dann ist die Schwingungsdauer des ganzen Pendels dieselbe, als wenn es nur aus dem Aufhängedraht und der unten angehängten Kugel bestände. Sei, um das nachzuweisen, K das Trägheitsmoment des Fadens und der unten angehängten Kugel, A der Abstand des Schwerpunktes dieser beiden Teile von der Schneide, und M die Masse von Faden und Kugel. Ist nun die Schwingungsdauer des ganzen Pendels ebenfalls gleich t , so ist

$$t = \pi \sqrt{\frac{k + K}{g a m + A M}}.$$

Da das Trägheitsmoment eines zusammengesetzten Körpers gleich ist der Summe der Trägheitsmomente der Bestandteile, und das statische Moment mehrerer Kräfte gleich ist der Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte. Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber

$$\frac{k}{g a m} = \frac{k + K}{g a m + A M},$$

und daraus unmittelbar

$$\frac{k + K}{g a m + A M} = \frac{K}{g A M}$$

oder auch

$$t = \pi \sqrt{\frac{K}{g A M}}.$$

Bei den eigentlichen Versuchen zur Bestimmung von g war die Kugel von Platin, um aber zu untersuchen, ob der Wert von g für alle Substanzen genau derselbe sei, wurde die Kugel zuweilen gewechselt. Deshalb war die Kugel nicht direkt, sondern durch ein ganz kleines Ansatzstück B , welches unten konkav als Teil einer Kugelfläche, deren Radius gleich dem der umhängenden Kugeln war, befestigt. Die Kugel wird mittels einer ganz dünnen Wachsschicht in diese Vertiefung eingeklebt. Dadurch ist gleichzeitig ermöglicht, die Kugel an verschiedenen Stellen ihrer Oberfläche anzukleben, um so zu untersuchen, ob der Mittelpunkt der Kugel auch der Schwerpunkt derselben ist.

Das Pendel wurde an einem festen stammbesessenen Träger EGF (Fig. 4) aufgehängt, welcher in einer massiven steinernen von belebten Stützen getragenen Mauer feststehend befestigt und durch Streben E unterstützt war, das er wieder durch seinen Stütz, noch auch durch die Schwingungen des Fadenes die geringste Bewegung annahm. Auf diesen Träger war bei g ein gut polierter Platin- von Stahl- oder Achat fest aufgesetzt, auf welcher die Schneide der Aufhängevorrichtung aufstand.

Das Pendel hing von einer gleichgültigen astronomischen Uhr herab, so daß man gleichzeitig die Bewegung des in der Beobachtungen dienenden

und des Pendels der Uhr übersehen konnte. Schliesslich war Uhr und Pendel von einem Glasgehäuse umgeben, welches etwaige Luftströmungen von dem Pendel abhielt.

Zur Bestimmung von g bedarf es zunächst der Kenntnis der Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem physischen isochron schwingt, also des Wertes

$$l = \frac{K}{A M}.$$

Dazu ist es notwendig, die Länge f des Fadens, das Gewicht des Fadens und den Radius, sowie das Gewicht der Kugel, zu dem wir ohne merklichen Fehler das Gewicht des Ansatzstückes B hinzuziehen können, zu messen. Die Länge des Fadens, deren Bestimmung vor Konstruktion des Kathetometers mit einiger Schwierigkeit verknüpft war, ist mit Hilfe dieses Messapparates leicht zu erhalten. Borda brachte eine genau horizontale Platte durch eine Mikrometerschraube mit dem tiefsten Punkte der Kugel zur Berührung und mafs dann mit Hilfe eines Mafsstabes den Abstand der Platte von der Schneide. Jetzt visiert man mit einem Kathetometer einmal die Schneide und dann den tiefsten Punkt der Kugel, so dafs der horizontale Faden des Fadenkreuzes gerade als Tangente der Kugel erscheint. Die Differenz der Stellungen des Kathetometerfernrohrs gibt dann die Länge des Fadens plus dem Durchmesser der Kugel. Ist das Pendel länger als die Skala des Kathetometers, so visiert man zunächst die Schneide und irgend einen zwischen dem obern und untern Ende des Pendels liegenden Punkt, setzt dann das Kathetometer tiefer und visiert dann von neuem den eben visierten Punkt und darauf den tiefsten Punkt der Kugel.

Um den Durchmesser der Kugel zu erhalten, kann man sich des Sphärometers bedienen, oder genauer, man bestimmt den Gewichtsverlust der Kugel beim Eintauchen derselben in Wasser von bestimmter Temperatur; in welcher Weise, wird später hervortreten, wenn wir die Methoden zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes der festen Körper besprechen. Die Differenz zwischen den Ablesungen des Kathetometers und dem Durchmesser $2r$ der Kugel gibt dann die Länge f des Fadens.

Da der Faden überall dieselbe Dichtigkeit hat, so liegt sein Schwerpunkt in dem Abstände $\frac{1}{2}f$ von der Aufhängeaxe; der Schwerpunkt der Kugel liegt in ihrem Mittelpunkte. Ist daher p das Gewicht des Fadens, P das Gewicht der Kugel, so ist

$$A M = \frac{p}{g} \frac{f}{2} + \frac{P}{g} (f + r).$$

Das Trägheitsmoment des Fadens erhalten wir in folgender Weise. Sei q das Gewicht der Längeneinheit des Fadens, so ist das Gewicht eines unendlich kleinen Stückchens von der Länge dx gleich $q \cdot dx$. Befindet sich dieses Stückchen im Abstände x von der Schneide, so ist das Trägheitsmoment dieses Stückchens

$$\frac{q}{g} \cdot x^2 \cdot dx$$

und das Trägheitsmoment des ganzen Fadens

$$K_1 = \frac{q}{g} \int_0^f x^2 dx = \frac{1}{3} \frac{q}{g} f^3.$$

Nun ist $q \cdot f = p$ gleich dem Gewichte des Fadens, somit

$$K_1 = \frac{1}{3} \frac{p}{g} \cdot f^2.$$

Das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf eine durch ihren Mittelpunkt gehende, der Schneide parallele Axe ist

$$\frac{2}{5} \frac{P}{g} \cdot r^2.$$

Da diese Axe sich im Abstände $f + r$ von der Drehungsaxe des Pendels befindet, so wird das Trägheitsmoment der Kugel in Bezug auf diese Axe

$$K_2 = \frac{2}{5} \frac{P}{g} \{r^2 + (f + r)^2\},$$

somit

$$K = K_1 + K_2 = \frac{1}{3} \frac{p}{g} f^2 + \frac{2}{5} \frac{P}{g} \{r^2 + (f + r)^2\}$$

und schließlich die Länge l des mathematischen Pendels

$$l = \frac{\frac{1}{3} p f^2 + \frac{2}{5} P \{r^2 + (f + r)^2\}}{p \frac{f}{2} + P \{f + r\}}.$$

Da die Länge f des Fadens und der Radius der Kugel von der Temperatur abhängig sind, so ändert sich auch die Länge l des Pendels mit der Temperatur. Ist daher die Temperatur bei den Beobachtungen nicht immer dieselbe und zwar jene, bei welcher die Längenmessungen durchgeführt sind, so muß man eine Korrektur anbringen, um die für jeden Versuch gültige Länge des Pendels zu erhalten. Ist Faden und Kugel von demselben Metall und t die Temperatur, bei welcher die Längenmessungen vorgenommen sind, t_1 die Temperatur, bei welcher die Schwingungen beobachtet werden, so ist die zur Bestimmung von g in Rechnung zu ziehende Länge l'

$$l' = l(1 - \beta_1 t_1 + \beta_1 t),$$

wenn β_1 den Ausdehnungskoeffizienten des Metalls bedeutet. Die Werte von β_1 für die verschiedenen Metalle werden wir im dritten Bande kennen lernen.

Um die Schwingungsdauer des Pendels mit größter Genauigkeit zu bestimmen, vergleicht man die Schwingungen des Beobachtungspendels mit denen des Uhrpendels. Zu dem Zwecke beobachtet man die Schwingungen des durch einen kleinen Stab in Bewegung gesetzten Pendels mit Hilfe eines dem Apparate gegenüber in der Richtung DP in einer Entfernung von mehreren Metern aufgestellten Fernrohrs.

Genantes über die Bestimmung der Pendellänge und insbesondere über den Einfluß der als Drehungsaxe benutzter Schneide auf die Länge des Pendels siehe max. F. W. Kose, Untersuchungen über die Länge des einfachen Sekundenpendels. Aus den Abhandlungen der Sächsischen Akademie für 1836.

Man sieht dann, wenn man durch das Fernrohr auf den Apparat blickt, das Pendel der Uhr, auf welches man vorher einen feinen vertikalen Strich gezogen hat, und das davor aufgehängte Pendel gesondert durch das Gesichtsfeld gehen. Da nun das eine der Pendel immer etwas rascher schwingt als das andere, nehmen wir an, das raschere sei das Pendel GB , so werden nach einigen Schwingungen die beiden Pendel zugleich in das Gesichtsfeld treten und sich decken. Diesen Zeitpunkt einer Koincidenz der beiden Pendel wählt man zum Ausgangspunkte der Beobachtungen. Um ihn genau zu erhalten, beginnt man die Beobachtungen schon etwas früher; man sieht dann, daß bei den aufeinanderfolgenden Durchgängen die Pendel sich immer näher rücken, bis sie endlich bei einem Durchgange zur Koincidenz kommen. Bei den weiter folgenden Schwingungen eilt dann das Pendel GB vor, so daß nach einiger Zeit das Pendel GB schon eine rückgängige Bewegung hat, während das Uhrpendel noch eine vorwärtsgerichtete Bewegung besitzt. Dabei kommt wieder ein Zeitpunkt, in welchem die beiden Pendel sich wieder in der Mitte des Gesichtsfeldes decken, aber jetzt mit entgegengesetzt gerichteter Bewegung. Dann hat das Pendel GB eine Oscillation mehr gemacht als das Pendel der Uhr von dem als Ausgangspunkt der Bewegung gerechneten Zeitpunkt der vorigen Koincidenz an. Weiterhin eilt das Pendel GB immer mehr vor, es geht bald wieder in gleicher Richtung mit dem Uhrpendel durch das Gesichtsfeld und kommt dann wieder mit dem Uhrpendel zur Koincidenz wie bei der ersten Beobachtung. Bei dieser zweiten Koincidenz hat das Pendel zwei Schwingungen mehr gemacht, und so bei jeder folgenden Koincidenz jedesmal eine Schwingung mehr. Setzen wir nun voraus, daß das Uhrpendel genau Sekunden schwingt, und daß man, während man m Koincidenzen beobachtet hat, an dem Sekundenzeiger der Uhr n Sekunden abliest, so ist die Schwingungsdauer t gleich

$$t = \frac{n}{n + m}.$$

Diese Art, die Schwingungen des Pendels zu beobachten, die Methode der Koincidenzen, bietet eine Reihe von Vorteilen. Zunächst leitet man die Dauer einer Schwingung aus der Beobachtung einer sehr großen Zahl $(n + m)$ Schwingungen ab; der bei der Zeitmessung begangene Fehler wird deshalb durch die Division mit dieser großen Zahl beträchtlich verkleinert. Ferner kann man bei der Beobachtung mit dem Fernrohr den Zeitpunkt der einzelnen Koincidenz scharf beobachten. Schließlich bedarf es nur einer sehr scharfen Beobachtung der ersten und letzten Koincidenz; ja man kann sogar, nachdem man die zweite Koincidenz beobachtet und so jedenfalls mit großer Annäherung die zwischen zwei Koincidenzen liegende Anzahl z von Sekunden erhalten hat, die Beobachtungen bis kurz vor der letzten Koincidenz unterbrechen, indem dann der Koeffizient $\frac{n}{z} = m$ uns die Anzahl der Koincidenzen liefert.

Zur Berechnung von g müssen die Schwingungsdauern auf unendlich kleine Bögen reducirt werden. Sind die Bögen überhaupt nur sehr klein, so genügt es, das Mittel aus der ersten und letzten Amplitude zu nehmen. Man mißt zu dem Ende die Amplituden an einem hinter dem Pendel angebrachten Gradbogen, den man gleichzeitig mit dem Pendel im Fernrohr

sehen kann. Ist die erste Amplitude α_1 , die letzte α_n , so setzt man in Gleichung

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha\right)$$

$$\alpha = \frac{\alpha_1 + \alpha_n}{2}.$$

Will man bei der Rechnung strenge verfahren, so hat man zu beachten, dass die Dauer der einzelnen Schwingungen unter einander nicht ganz gleich ist, und dass der gefundene Mittelwert t nicht gerade die Schwingungsdauer des Pendels bei der so bestimmten Amplitude α ist. Es würde nur der Fall sein, wenn die Schwingungsdauer sich in einfach linearer Weise mit dem Bogen änderte, und wenn weiter die aufeinanderfolgenden Bögen immer um dieselbe Grösse kleiner würden. Beides ist nicht der Fall; das erstere nicht der Fall ist, zeigt unsere Gleichung für die Schwingungsdauer, und dass letzteres nicht der Fall ist, ergibt die Beobachtung. Dieselbe zeigt nämlich, dass nicht die Differenzen der aufeinanderfolgenden Schwingungsbögen konstant sind, sondern dass dieselben sehr nahe in einem konstanten Verhältnisse stehen, oder dass die Schwingungsbögen sehr nahe eine geometrische Reihe bilden, um so näher, je kleiner überhaupt die Schwingungen sind. Sind also $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ die einzelnen Bögen, so ist

$$\alpha_2 = c \cdot \alpha_1; \alpha_3 = c \cdot \alpha_2 = c^2 \cdot \alpha_1 \dots \alpha_n = c^{n-1} \cdot \alpha_1,$$

wenn wir mit c einen echten Bruch bezeichnen.

Da wir bei den hier vorausgesetzten kleinen Bögen die Sinus noch der Bögen proportional setzen können, so dürfen wir auch schreiben

$$\sin \frac{1}{2} \alpha_2 = c \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1; \sin \frac{1}{2} \alpha_3 = c^2 \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1 \dots \sin \frac{1}{2} \alpha_n = c^{n-1} \cdot \sin \frac{1}{2} \alpha_1$$

und zur genauern Berechnung von g erhalten wir dann folgende Gleichungen, wenn wir mit t_1, t_2, \dots, t_n die Dauer der ersten, zweiten etc. bis zur letzten Schwingung, für welche wir $k = m + n$ setzen, bezeichnen:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1\right)$$

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} c^2 \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1\right)$$

$$\vdots$$

$$t_n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} c^{2n-2} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1\right)$$

Die Summe aller dieser Schwingungsdauern ist gleich der Dauer n der ganzen Beobachtung. Bilden wir die Summe aller dieser Gleichungen, so erhalten wir deshalb auf der linken Seite n , und die Gleichung wird

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ k + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1 (1 + c^2 + c^4 + \dots + c^{2n-2}) \right\}.$$

Die Summe der geometrischen Reihe ist bekanntlich

$$1 + c^2 + c^4 + \dots + c^{2n-2} = \frac{c^{2n} - 1}{c^2 - 1}$$

omit wird

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ h + \frac{c^{2h} - 1}{c^2 - 1} \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1 \right\},$$

worin c nach dem eben angeführten Gesetze aus zwei aufeinanderfolgenden Amplituden, oder aus der ersten und letzten Amplitude gegeben ist durch

$$c^{h-1} = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_h}{\sin \frac{1}{2} \alpha_1}.$$

Bei einer Bestimmung von g darf man indes den bisher von uns außer Acht gelassenen Einfluß der Luft, in welcher das Pendel schwingt, nicht vernachlässigen. Dieser Einfluß der Luft ist ein doppelter. Zunächst wird das Gewicht des Pendels verkleinert, somit das statische Moment, also die bewegende Kraft verkleinert. Diese Verkleinerung des Gewichtes ist, wie wir später nachweisen werden, gleich dem Gewichte der von dem Pendel verdrängten Luft, wofür wir auch ohne merklichen Fehler das Gewicht der von der Kugel verdrängten Luft einsetzen dürfen. Nennen wir dieses Gewicht P_1 , so haben wir das von dem Gewichte P der Kugel abzuziehen, und der Nenner unseres Ausdruckes für l , den wir auf Seite 128 entwickelten, geht dadurch über in

$$p \frac{f}{2} + (P - P_1) (f + r).$$

Dann aber zweitens, und darauf hat Bessel¹⁾ zuerst aufmerksam gemacht, wird die Bewegung des Pendels durch den Widerstand der Luft verzögert; das Pendel muß, indem es in der Luft von einer Stelle zur andern geht, die Luft verdrängen, welche den Raum einnimmt, in welchen das Pendel eintritt, es muß dazu eine gewisse Arbeit verwendet werden, welche in jedem Momente von der Beschleunigung des Pendels abzuziehen ist; außerdem tritt durch die Reibung in der Luft eine Verminderung der Geschwindigkeit ein, wie wir bei der Untersuchung der Luftreibung nachweisen werden. Diese beiden Umstände kann man dadurch in Rechnung ziehen, daß man annimmt, mit dem Pendel bewege sich gleichzeitig nahezu die den Raum des Pendels ausfüllende Luftmenge. Wir müssen demnach zu dem Trägheitsmoment des Pendels eine dem Trägheitsmoment dieser Luftmenge nahezu gleiche Größe hinzuaddieren. Bezeichnet demnach K' das Trägheitsmoment, für das wir ohne merklichen Fehler dasjenige der von der Platinkugel verdrängten Luftkugel setzen dürfen, und ist k eine Zahl kleiner wie 1, so wird der Zähler unseres Ausdruckes für l

$$K + kK'$$

oder die Länge des mathematischen Pendels, welches im luftleeren Raume schwingend dieselbe Schwingungsdauer hat, wird

$$l = \frac{K + kK'}{p \frac{f}{2} + (P - P_1) (f + r)}.$$

Die Konstante k hängt von der Länge und Gestalt des Pendels ab; Bessel bestimmte dieselbe, indem er die Schwingungsdauer zweier Pendel verglich,

¹⁾ Bessel, Länge des einfachen Sekundenpendels. Abhandl. d. Berl. Akad. 1826 p. 32 ff.

deren einziger Unterschied darin bestand, daß bei dem einen die Kugel aus Messing, bei dem andern aus Elfenbein hergestellt war. Der Durchmesser der Kugeln war bei beiden gleich. Der Wert des Gliedes kK' ist dann in beiden Fällen derselbe, während K für das Pendel mit der Messingkugel einen erheblich größern Wert hat als für die Elfenbeinkugel. Eine Vergleichung der Schwingungsdauern der Pendel gestattet demnach, dieses Glied zu eliminieren oder auch den Wert von k zu berechnen und so die Länge l des Pendels zu berechnen, welches im luftleeren Raum die gleiche Schwingungsdauer hat¹⁾. Mit dem so berechneten l erhalten wir dann den Wert von g aus der Gleichung

$$g = \pi^2 \frac{l}{t^2}.$$

Der so berechnete Wert für g gilt nur für den Ort, an dem man die Messungen durchgeführt hat. Im nächsten Kapitel wird sich ergeben, daß der Wert von g mit der Erhebung von der Erdoberfläche, resp. dem Meeresniveau kleiner wird; wir werden dort auch zeigen, wie wir den beobachteten Wert auf das Meeresniveau reducieren.

Borda erhielt auf diese Weise für g in Paris unter $48^\circ 50' 14''$ n. Br. reducirt auf die Meereshöhe

$$g = 9,80882.$$

Biot fand unter denselben Verhältnissen

$$g = 9,80896,$$

zwei Werte, die sich nur um $0,14^{\text{mm}}$ unterscheiden. Bessel erhielt für Königsberg unter $55^\circ 42'$ n. Br. und auf das Niveau der Ostsee reducirt

$$g = 9,81443,$$

für Berlin unter $52^\circ 30' 16''$ n. Br.

$$g = 9,81278.$$

Borda sowohl als Bessel haben dann weiter gezeigt²⁾, daß der Wert von g identisch derselbe ist, aus welcher Substanz man auch die Kugel des Pendels wählt; daraus folgt dann mit aller Strenge, daß die Schwere auf alle Körper gleichmäßig wirkt, daß alle Körper beim freien Fall dieselbe Beschleunigung erhalten.

§ 30.

Bestimmung von g mittels des Reversionspendels. Die im vorigen Paragraphen besprochene Methode zur Bestimmung von g leidet an einer Unsicherheit, nämlich ob, wie es bei der Berechnung des Trägheitsmomentes vorausgesetzt werden muß, die Kugel am untern Ende des Pendels auch überall dieselbe Dichtigkeit besitzt. Von dieser Unsicherheit ist die zweite der vorhin erwähnten Methoden frei, welche die Länge des mit dem physichen isochronen Pendels auf experimentellem Wege bestimmt. Die Methode wurde im Anfange dieses Jahrhunderts von dem Astronomen Bohnenberger zu Tübingen vorgeschlagen und später besonders von dem englischen Naturforscher Kater zur Messung der Länge des Sekundenpendels benutzt. Das

¹⁾ Man sehe Bessel a. a. O. und O. E. Meyer, Poggend. Ann. CXLII.

²⁾ Bessel, Über die Kraft der Schwere. Abh. der Berl. Akad. von 1830.

Verfahren beruht auf einer besondern Eigenschaft des Schwingungspunktes des physischen Pendels. Führt man nämlich durch den Schwingungspunkt eines physischen Pendels eine der Aufhängeaxe des Pendels parallele Axe und hängt dann an dieser als Drehungsaxe das Pendel auf, so ist die Schwingungsdauer des Pendels bei dieser Aufhängung genau gleich derjenigen bei der frühern Aufhängung. Da nun der Abstand des Schwingungspunktes von der Drehungsaxe gleich ist der Länge des mathematischen Pendels, welches dieselbe Schwingungsdauer hat wie das physische Pendel, so gibt uns der Abstand der beiden Schneiden die Länge des mathematischen Pendels, mit der wir den Wert von g zu berechnen haben.

Wir können diese Eigenschaft des Schwingungspunktes leicht nachweisen mit Hülfe des im § 20 abgeleiteten Satzes, daß wenn das Trägheitsmoment eines Körpers in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt geführte Axe gleich ist $M \cdot a^2$, daß es dann in Bezug auf eine mit dieser parallele und im Abstand z von ihr befindliche gleich ist $M(a^2 + z^2)$.

Ist nämlich M die Masse unseres Pendels und z bei der ersten Aufhängung der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe, so ist die Länge des mathematischen Pendels von gleicher Schwingungsdauer

$$l = \frac{M(z^2 + a^2)}{M \cdot z} = z + \frac{a^2}{z}.$$

Sei bei der zweiten Aufhängung der Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsaxe gleich z' , so ist der Abstand der beiden Schneiden gleich $z + z'$ und die Länge des mathematischen Pendels

$$l' = z' + \frac{a^2}{z'}.$$

Ist nun die Schwingungsdauer in beiden Fällen dieselbe, so folgt auch

$$l = l'$$

oder

$$z + \frac{a^2}{z} = z' + \frac{a^2}{z'}.$$

Diese Gleichung besteht erstens, wenn $z = z'$ ist, wenn also der Schwerpunkt des Pendels in der Mitte zwischen den beiden Schneiden liegt. Ist das aber der Fall, so können wir aus der Gleichheit der Schwingungsdauern nur auf die Gleichheit der beiden Werte von l und l' schließen, ohne daß der Abstand der beiden Schneiden $z + z'$ gleich l zu sein braucht. Ist aber z von z' verschieden, so kann die Gleichung nur erfüllt sein, wenn

$$z' = \frac{a^2}{z},$$

somit wenn

$$l = z + z'$$

st. Liegt daher der Schwerpunkt nicht in der Mitte zwischen beiden Schneiden, so folgt aus der Gleichheit der Schwingungsdauern, daß die zweite Schneide durch den Schwingungspunkt geht, somit daß der Abstand der beiden Schneiden gleich ist der Länge des mathematischen Pendels mit gleicher Dauer der Schwingungen.

Das auf diesen Satz basierte Katersche Pendel (Fig. 39) besteht aus einem Messingstabe, der an seinen beiden Enden mit Spitzen versehen ist,

um bei der Beobachtung der Schwingungen die in dem vorigen Paragraphen besprochene Methode der Koincidenzen anwenden zu können. D

Fig. 39. Schneiden S und S^1 sind ein für allemal an dem Pendel anbringerlich und zwar so befestigt, daß das fertige Pendel jede Sekunde eine Schwingung vollführt. Unterhalb der Schneide S^1 ist eine Metalllinse angebracht, welche der Schwerpunkt des Pendels, das im übrigen in Bezug auf die beiden Schneiden symmetrisch eingerichtet ist, sicher unterhalb der Linie SS^1 herab, also näher zu S^1 legt. Zwischen den beiden Schneiden ist auf dem Pendelstabe eine Masse m mit Reibung verankert und außerdem befindet sich an einer andern Stelle eine Masse m_1 , welche durch eine in dem Ringe a befestigte Schraube eine kleine Verschiebung auf und ab erhalten kann.

Man hängt das Pendel nun zunächst an die eine der beiden Schneiden, etwa S , und beobachtet in der vorher beschriebenen Weise seine Schwingungsdauer. Darauf hängt man das Pendel an die andere Schneide S^1 , bewirkt durch eine Verschiebung der Massen m und m_1 in dieser Aufhängung die Schwingungsdauer ganz genau die gleiche wie vorher. Hat man das erreicht, so hat man nur mit dem Kathetometer den Abstand der Schneiden zu messen, und die so gefundene Länge l in die Gleichung zur Berechnung von g für die Länge l einsetzen, also in die Gleichung

$$n = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{ h + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{2} \alpha_1 \frac{c^{2h} - 1}{c^2 - 1} \right\},$$

worin die Bedeutung der Zeichen dieselbe ist wie im vorigen Paragraphen.

Es ist selbstverständlich, daß man bei einem solchen Pendel auch die Reduktion auf den luftleeren Raum anbringen kann. Bei der ursprünglichen Form des Reversionspendels einige Schwierigkeit hat. Bei einer von Bessel angegebenen Form des Reversionspendels fällt indes der Einfluß der Luft ganz aus den Weg (vergl. Fig. 39). Es ist das der Fall, wenn man dem Pendel in beiden Schneiden eine genau symmetrische Gestalt gibt. Man kann das in Fig. 39 mit hinreichender Annäherung erreichen, indem man über der Schneide S eine in der äußern Form der ungleich Linse anbrachte, die indes hohl und überdies leicht gearbeitet wäre. Durch diese symmetrische Form wird erreicht, daß der Schwerpunkt der verdrängten Luft genau in die Mitte der beiden Schneiden fällt, und daß das Trägheitsmoment der verdrängten Luft in Bezug auf beide Schneiden genau denselben Wert hat. Nennen wir dann M_1 die Masse der verdrängten Luft, also deren Gewicht dividiert durch g , z_1 den Abstand ihres Schwerpunktes von jeder der beiden Schneiden, und K_1 das Trägheitsmoment der verdrängten Luft, so wird nach den Bemerkungen des vorigen Paragraphen die Schwingungsdauer um die Schneide S

¹⁾ Bessel, Länge des einfachen Sekundenpendels. Abhandl. d. Akad. 1826. p. 97.

$$t = \pi \sqrt{\frac{M(z^2 + a^2) + kK_1}{g(Mz - M_1 z_1)}}$$

oder die Länge des mathematischen Pendels, welches mit dem gegebenen die gleiche Schwingungsdauer hat, ist

$$l = \frac{M(z^2 + a^2) + kK_1}{Mz - M_1 z_1}.$$

Lassen wir das Pendel um die andere Schneide schwingen, so wird

$$l = \frac{M(z'^2 + a^2) + kK_1}{Mz' - M_1 z_1}.$$

Multiplizieren wir beide Ausdrücke mit den Nennern und subtrahieren, so wird

$$Ml(z - z') = M(z^2 - z'^2) \\ l = z + z'.$$

In dem Falle gibt uns also der Abstand der beiden Schneiden die Länge des mathematischen Pendels, welches im luftleeren Raum dieselbe Schwingungsdauer hat, wie das Reversionspendel.

Eine volle Übereinstimmung der Schwingungsdauern ist nur schwierig zu erreichen; wenn man indes die Lage des Schwerpunktes des Pendels bestimmt, und die Schwingungsdauern so nahe gleich macht, daß man annehmen darf, der Schwerpunkt der verdrängten Luft läge auch jetzt in der Mitte zwischen beiden Schneiden, und das Trägheitsmoment der verdrängten Luft habe für beide Aufhängungen denselben Wert, so läßt sich aus der Beobachtung der beiden Schwingungsdauern auch jetzt g ableiten, oder die Schwingungsdauern des mathematischen Pendels bestimmen, dessen Länge gleich ist dem Abstände der beiden Schneiden.

Sei die Schwingungsdauer um die Schneide $S = t_1$, um die Schneide $S' = t_2$, so ist

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{M(z^2 + a^2) + kK_1}{g(Mz - M_1 z_1)}}$$

$$t_2 = \pi \sqrt{\frac{M(z'^2 + a^2) + kK_1}{g(Mz' - M_1 z_1)}}$$

Wir erhalten dann zunächst

$$g \frac{t_1^2}{\pi^2} (Mz - M_1 z_1) = Mz^2 + Ma^2 + kK_1$$

$$g \frac{t_2^2}{\pi^2} (Mz' - M_1 z_1) = Mz'^2 + Ma^2 + kK_1$$

und daraus

$$g = \pi^2 \frac{z^2 - z'^2}{t_1^2 z - t_2^2 z' - \frac{M_1}{M} z_1 (t_1^2 - t_2^2)}$$

und für die Schwingungsdauer des Pendels von der Länge $z + z_1$

$$t = \sqrt{\frac{t_1^2 z - t_2^2 z' - \frac{M_1}{M} z_1 (t_1^2 - t_2^2)}{z - z'}}.$$

Wie man sieht, muß man in dem Falle nur das Gewicht der verdrängten Luft bestimmen. Da M_1 gegen M indes schon sehr klein ist, darf man, wenn t_1 und t_2 nahe gleich sind, das davon abhängige Korrektionsglied außer Acht lassen.

Bei den letzteren Gleichungen ist zu beachten, daß für t_1 und t_2 die auf unendlich kleine Schwingungen reducierten Schwingungsdauern zu nehmen sind.

Mit einem solchen Pendel erhielt Kater für die Länge eines Pendels, welches in einer Sekunde seine Schwingung vollführt, unter der Breite von Paris und im Niveau des Meeres

$$l = 0,9938606.$$

Daraus ergibt sich der Wert von g nach der Gleichung

$$1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{0,9938606}{g}}$$

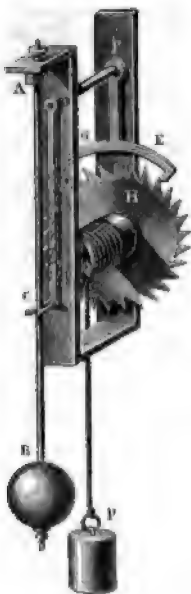
$$g = \pi^2 \cdot 0,9938606 = 9,80904,$$

eine Zahl, welche mit der von Biot gefundenen fast genau übereinstimmt.

§ 31.

Anwendung des Pendels bei Uhren. Da die Schwingungen eines Pendels von gegebener Länge eine ganz bestimmte Dauer haben, so kann man sich derselben zu Zeitmessungen bedienen.

Fig. 40.



Deshalb findet das Pendel seine ausgedehnteste Anwendung bei den Uhren. Die Einrichtung der Uhren ist im wesentlichen folgende. Um eine Walze Q (Fig. 40) ist ein Faden geschlungen, an dessen Ende sich ein Gewicht P befindet, welches beim Herabsinken bewirkt, daß sich die Walze dreht. Auf die Walze ist ein gezähntes Rad H mit schräg geschnittenen Zähnen aufgesetzt. An einer mit der Axe der Walze parallelen Drehungsaxe A ist ein Pendel $A'CB$ aufgehängt, welches durch seine Schwingungen einem Stift CD und einem mit dem Stift verbundenen Doppelhaken GE eine hin- und hergehende Bewegung erteilt. Die umgebogenen Enden des Doppelhakens greifen in die Zähne des Rades H . Bewegt sich nun das Pendel und hebt sich der Haken bei E , so sinkt das Gewicht und die Walze dreht sich; während dessen senkt sich jedoch die andere Seite des Doppelhakens, greift in die Zähne des Rades ein und hemmt die Drehung der Walze. Bei der folgenden Schwingung hebt sich nun diese Seite, die Walze dreht sich wieder, bis das Ende E neuerdings in das Rad eingreift, aber nicht in denselben, sondern in den folgenden Zahn des Rades. Für je zwei Oscillationen des Pendels dreht sich also die Walze um einen Zahn

weiter. Die Walze dreht sich somit während gleicher Zeiten, die durch die Schwingungen des Pendels gegeben sind, um gleiche Winkel; und ist an ihrer Axe ein Zeiger befestigt, der sich vor einem Zifferblatte dreht, so

schreitet auch der Zeiger in gleichen Zeiten um gleiche Bögen fort. Hat das Rad z. B. 30 Zähne und vollführt das Pendel in der Sekunde eine Schwingung, so wird der Zeiger sich in einer Minute um das ganze Zifferblatt bewegen, und ist der Umkreis desselben in 60 Teile geteilt, so entspricht jeder Teilstrich einer Sekunde. Wie man nun mittels passend angebrachter Räderwerke die Bewegung der Zeiger ändern, Sekunden- und Minutenzeiger anbringen kann, ist leicht ersichtlich. Nur ist zu erwähnen, daß die Stellung der Zähne und Haken derartig ist, daß der Haken jedesmal, wenn er gehoben wird, zugleich einen Anstoß erhält, wodurch die Bewegung des Pendels, welche sonst durch die Reibung aufhören würde, erhalten wird.

Um die Bewegung der Uhr zu regulieren, ist die Linse *B* an der Pendelstange verschiebbar angebracht; ein Heraufschieben beschleunigt, ein Herabziehen verzögert die Bewegung. Dadurch ist es möglich zu bewirken, daß das Pendel gerade in der gewünschten Zeit eine Schwingung vollführt.

§ 32.

Allgemeine Anwendung der Pendelgesetze. Es wird im Laufe unserer Untersuchungen häufig unsere Aufgabe sein, Kräfte zu messen, welche zwar den verschiedensten Ursprung haben, sich aber durch Anziehungen und Abstosungen äußern. Wir haben dann zwei Mittel, diese Kräfte zu messen: entweder halten wir der Kraft durch eine in entgegengesetzter Richtung wirkende an ihrem Angriffspunkte das Gleichgewicht; diese Methode gibt meist nur angenähert richtige Resultate; oder wir messen die Beschleunigung, welche sie einer bekannten Masse *m* erteilt. Bezeichnen wir diese Beschleunigung mit *G*, so ist nach § 11 und 12 die Kraft *P* gegeben durch

$$P = G \cdot m.$$

Zur Bestimmung der Beschleunigung ist nun das genaueste Mittel, ein Pendel unter dem Einflusse der Kraft schwingen zu lassen. Sind die Kräfte einer festen Richtung parallel, oder sind sie wie die Schwerkraft nach einem festen Centrum gerichtet, welches hinlänglich weit entfernt ist, so daß man sie in Bezug auf ein kleines Pendel als parallel ansehen kann, so beobachtet man die Schwingungsdauer, welche dasselbe unter Wirkung dieser Kräfte annimmt. Nach § 25 ist dann diese Schwingungsdauer gleich

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{D}},$$

wenn *K* das Trägheitsmoment des Pendels und *D* das Drehungsmoment bedeutet, welches die wirksame Kraft dem Pendel in einer zur Richtung der Kraft senkrechten Lage erteilt. Die Beschleunigung, welche diese Kraft jener Masse erteilt, die in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe die Masse des Pendels ersetzt, ist dann

$$G = \frac{D}{K},$$

und da *K* die Masse ist, der jene Beschleunigung erteilt ist, so erhalten wir für die Größe der Kraft in gewöhnlichem Maße, das heißt in Druckeinheiten

$$P = G K = D,$$

so daß also schon der Nenner des Ausdrucks unter dem Wurzelzeichen im

Ausdruck für die Schwingungsdauer uns die gesuchte GröÙe der Kraft gibt, indem wir den Ausdruck für t nach D auflösen

$$D = \frac{\pi^2 \cdot K}{t^2}.$$

Ändert sich die GröÙe der Kraft mit dem Abstände vom anziehenden Mittelpunkte, so können wir durch Annäherung oder Entfernung des Pendels von demselben auch das Gesetz ableiten, nach welchem die Kraft sich ändert.

Die Pendelgesetze finden noch weitere Anwendung; wir werden noch mehrfach schwingende Bewegungen von Körpern um eine bestimmte Gleichgewichtslage beobachten, deren Schwingungsdauer von der GröÙe der Amplitude unabhängig ist. Wir schließen daraus dann stets, daß die Kraft, welche diese Schwingungen veranlaßt, dem Ausschlagswinkel proportional ist, oder daß bei einem Ausschlagswinkel α diese in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe angreifende Kraft gleich $F \cdot \alpha$ ist. Die Kraft F , welche das auf den schwingenden Körper wirkende Drehungsmoment gibt, wenn der Wert von α gleich 1 wird, also auch den in dieser Lage auf die Masse, welche die Masse des Körpers in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe ersetzt, wirkenden Druck bedeutet, erhalten wir dann ebenfalls aus der Beobachtung der Schwingungsdauer t . Ist K das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers, so ist gerade wie in den vorher besprochenen Fällen

$$F = \frac{\pi^2 K}{t^2}.$$

Es ergibt sich das aus der Überlegung, daß die Kraft F in diesem Falle ganz an die Stelle des Gewichtes an dem unter der Wirkung der Schwere schwingenden Pendel tritt, indem ja bei diesem die Kraft bei dem Ausschlagswinkel α , so lange derselbe nur klein ist, gleich $Pz \cdot \alpha$ ist. Die Kraft F bewirkt also in dem jetzt betrachteten Falle die schwingende Bewegung, wie die Kraft Pz bei dem unter Wirkung der Schwere schwingenden Pendel; beide müssen also auf dieselbe Weise aus der beobachteten Schwingungsdauer abgeleitet werden.

Ebenso benutzen wir die Pendelgesetze in manchen Fällen zu einer experimentellen Bestimmung der Trägheitsmomente, wo die Formen oder die Verteilung der Massen der schwingenden Körper eine Berechnung derselben nicht zulassen. In welcher Weise das geschehen kann, möge kurz an einem Beispiele angedeutet werden. Man hänge an einem Metalldraht einen Stab in seiner Mitte so auf, daß der Stab horizontal schwebt. Ist der Draht oben ganz fest eingeklemmt, so nimmt der Stab eine bestimmte Lage an; stößt man ihn dann an, so vollführt er in horizontaler Ebene Schwingungen um seine Gleichgewichtslage, deren Dauer von der GröÙe der Schwingungen unabhängig ist. Es ergibt sich somit, daß auf den Stab eine Kraft wirkt, welche der Ablenkung des Stabes von der Gleichgewichtslage proportional ist; dieselbe rührt, wie wir später nachweisen werden, daher, daß der Draht um eine in ihm liegende Axe gedreht, daß er tordiert ist. Bezeichnen wir diese Kraft, wenn die Ablenkung gleich eins ist, mit F und das Trägheitsmoment des Stabes und Drahtes in Bezug auf die Drehungsaxe mit K , so ist nach der vorhin gemachten Bemerkung

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{K}{F}}.$$

in K experimentell zu bestimmen, hängen wir etwa mit Hilfe einer Leine von ganz feinem Draht an den Stab an jeder Seite des Aufhängepunktes und in gleichen Abständen r_1 von demselben ein Gewicht, dessen Masse mit der der Drahtschlinge gleich M sei. Da jetzt das Trägheitsmoment der hängenden Masse ein anderes ist, so wird auch die Schwingungsdauer eine andere; bezeichnen wir das Trägheitsmoment nach dem Anhängen der Gewichte mit K_1 , so wird die Schwingungsdauer sein

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K_1}{F}}.$$

Das Trägheitsmoment K_1 ist gleich dem frühern Trägheitsmoment K plus dem Trägheitsmoment der angehängten Gewichte. Bezeichnen wir das Trägheitsmoment jedes der angehängten Gewichte in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt der Gewichte gehende vertikale Axe mit $M \cdot a^2$, das Trägheitsmoment desselben in Bezug auf die Drehungsaxe des Pendels gleich $M(a^2 + r_1^2)$. Denn jedes der Gewichte hängt so, daß sein Schwerpunkt senkrecht unter dem Aufhängepunkt liegt; die Verbindungslinie des Aufhängepunktes mit dem Schwerpunkt ist also parallel zur Drehungsaxe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment des Gewichtes gleich $M \cdot a^2$ ist. Da diese Axe dem Aufhängepunkt parallel und im Abstände r_1 von demselben befindlich ist, so ist das Trägheitsmoment jedes der Gewichte auf den Aufhängepunkt gleich $M(a^2 + r_1^2)$. Damit wird

$$K_1 = K + 2M(a^2 + r_1^2)$$

$$t_1 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K + 2M(a^2 + r_1^2)}{F}}.$$

Hängen dieselben Gewichte in einen Abstand r_2 von der Drehungsaxe und beobachten die Schwingungsdauer t_2 , dann ist

$$t_2 = \pi \cdot \sqrt{\frac{K + 2M(a^2 + r_2^2)}{F}}.$$

Die beobachteten Schwingungsdauern liefern die Gleichungen

$$F \cdot t^2 = \pi^2 K$$

$$F \cdot t_1^2 = \pi^2 (K + 2Ma^2 + 2Mr_1^2)$$

$$F \cdot t_2^2 = \pi^2 (K + 2Ma^2 + 2Mr_2^2).$$

Hieraus ziehen wir von der zweiten die dritte Gleichung, so wird

$$F(t_1^2 - t_2^2) = \pi^2 2M(r_1^2 - r_2^2)$$

$$F = \pi^2 \frac{2M(r_1^2 - r_2^2)}{t_1^2 - t_2^2} \dots\dots (A),$$

Wenn wir diesen Wert von F in die erste Gleichung setzen und nach K auflösen

$$K = t^2 \cdot \frac{2M(r_1^2 - r_2^2)}{t_1^2 - t_2^2} \dots\dots (B).$$

Wir erhalten somit den Wert von K ausgedrückt in lauter bekannten Größen, da die Masse M jedes der angehängten Gewichte P gleich ist $\frac{P}{g}$.

Die Gleichung (A) zeigt gleichzeitig, daß wir aus so geführten Beobachtungen auch direkt die GröÙe der bewegenden Kraft ableiten können, ohne daß wir den Wert des Trägheitsmomentes K zu berechnen haben.

Man sieht demnach, wie das Pendel in der einen oder andern Form für die experimentelle Physik einer der wichtigsten Apparate ist; wir werden fast stets zur Messung von Kräften von demselben Gebrauch machen.

§ 33.

Centripetalkraft und Centrifugalkraft. Wir haben sowohl bei der fortschreitenden, als bei der drehenden Bewegung gesehen, daß die Masse eines Körpers vermöge der Trägheit der Materie jeder Änderung des Bewegungszustandes ein Hindernis entgegensetzt, welches durch die Wirkung der Kraft überwunden werden muß. Demgemäß sahen wir, daß die Beschleunigung, welche ein Körper erfährt, abhängig ist von dem Verhältnis der Kraft zur bewegten Masse. Bei den drehenden Bewegungen tritt die Trägheit der Materie in einer noch auffallenderen Weise in einer andern Richtung hervor.

Bei dieser Bewegung wird nämlich in jedem Augenblick die Richtung des beweglichen Körpers geändert, indem die augenblickliche Bewegungsrichtung stets mit der Tangente der Bahn zusammenfällt, in der sich der Körper bewegt. Vermöge der Trägheit hat dann der Körper das Bestreben, in der einmal angenommenen Bewegungsrichtung zu verharren.

Soll der Körper seine Bewegungsrichtung ändern, soll er in einer kreisförmigen Bahn verharren, so muß auf ihn eine Kraft wirken, welche ihn dem Centrum der Bahn soviel nähert, als die Bahn selbst von der Tangente sich entfernt. Diese Kraft, welche bei jeder drehenden Bewegung vorhanden sein muß, und die den Körper stets nach dem Mittelpunkt seiner Bahn hinzieht, heißt die Centripetalkraft.

Der Centripetalkraft genau an GröÙe gleich und ihr entgegengesetzt ist die Centrifugalkraft. Daß diese Kraft vorhanden sein muß, und daß infolge derselben der Körper auf den Mittelpunkt der Bahn einen genau ebensolchen Zug ausüben muß, wie vom Mittelpunkt her auf ihn ausgeübt wird, das ist eine unmittelbare Folge des § 11 näher besprochenen Principes der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Wir nehmen dieselbe auch bei jeder drehenden Bewegung wahr. Ist der im Kreise bewegte Körper an einem Faden befestigt, so ist es der Zusammenhang des Fadens, der ihn nach dem Mittelpunkt hinzieht, der Faden ist gespannt, ein Beweis, daß der Körper einen ebenso starken Zug auf den Mittelpunkt ausübt, als der ist, welcher ihn aus der geradlinigen Bewegung ablenkt. Reißt der Faden, so bewegt sich der Körper einfach in der Tangente der Bahn weiter.

Die Centrifugalkraft ist also weiter nichts als der Widerstand, den der träge Körper der Änderung seiner Bewegungsrichtung entgegensetzt; hört die Centripetalkraft auf, so auch die Centrifugalkraft, indem der Körper sich dann in der Richtung seiner Bewegung von der Drehungsaxe entfernt.

Es ist leicht, aus den bisher gewonnenen Sätzen die GröÙe der Centrifugalkraft oder Centripetalkraft abzuleiten.

Es bewege sich ein Körper A mit der Masse m in einem Kreise um den Mittelpunkt O (Fig. 41), mit welchem er durch einen Faden verbunden ist. Er habe beim Beginn der Bewegung eine konstante nach AB gerichtete

geschwindigkeit erhalten. Nach einer sehr kleinen Zeit t sei er in M angekommen; er hat den Bogen AM beschrieben, den wir so klein voraussetzen, daß wir ihn mit der Sehne AM zusammenfallen lassen dürfen. Die ursprünglich dem Körper erteilte Geschwindigkeit hätte ihn nach C gebracht, der Zusammenhang des Fadens hat ihn derselben Zeit durch die Strecke $AD = AC$ gezogen, er wirkt also wie die Kraft, welche in derselben Zeit den Körper nach D gezogen hätte; M ist dann nach dem Satze vom Parallelogramm der Bewegungen die diagonale des aus AC und AD konstruierten Rechteckes. Da wir AM als sehr klein voraussetzen, können wir die Centripetalkraft während der Zeit als konstant und nach AO gerichtet annehmen, wir haben dann, wenn wir dieselbe mit F bezeichnen,

$$AD = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2;$$

andererseits ist, wenn wir mit v die Geschwindigkeit des Körpers in seiner Bahn bezeichnen,

$$AM = v t.$$

Ferner nach einem bekannten Satze aus der Geometrie

$$AM^2 = 2R \cdot AD,$$

wenn R den Radius des Kreises bedeutet. Setzen wir hierin für AM und AD ihre Werte, so ist

$$v^2 t^2 = R \frac{F}{m} t^2$$

und daraus

$$F = \frac{m v^2}{R}.$$

Damit sich also der Körper im Kreise drehe, muß ihn an jeder Stelle seiner Bahn eine Kraft nach dem Mittelpunkte ziehen, die proportional ist der Masse des Körpers, dem Quadrate seiner Geschwindigkeit, und die umgekehrt proportional ist dem Radius des Kreises, in welchem der Körper sich bewegt.

Mit gleicher Kraft wirkt die Centrifugalkraft entgegen und spannt, wenn der Körper an einem Faden befestigt ist, den Faden. Gleitet der Körper in einer Rinne, so übt der Rand derselben auf ihn in jedem Augenblicke einen Druck aus gleich $\frac{m v^2}{R}$, und mit gleicher Kraft drückt der Körper gegen den Rand der Rinne.

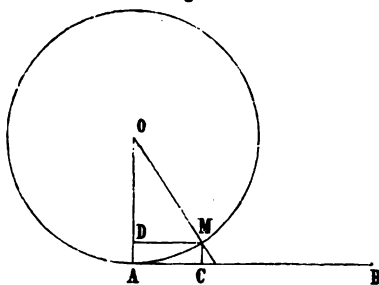
Man kann dem Ausdrucke für die Centrifugalkraft eine manchmal bequemere Form geben, indem man beachtet, daß der Umfang des Kreises $2\pi R$ mit der Geschwindigkeit v in einer Zeit T durchlaufen wird, also

$$2\pi R = v T.$$

Setzen wir den hieraus sich ergebenden Ausdruck für v in die Gleichung für F ein, so wird

$$F = \frac{4\pi^2 R \cdot m}{T^2}.$$

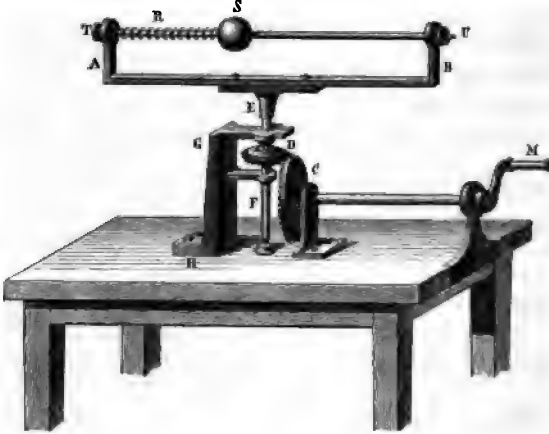
Fig. 41.



Man kann das Dasein der Centrifugalkraft durch eine Menge sehr einfacher Versuche nachweisen. Wenn man ein an einem Faden befestigtes, mit Wasser gefülltes Gefäß sehr rasch im Kreise der Vertikalebene herumschleudert, so fällt kein Tropfen Wasser heraus, weil bei der raschen Bewegung das Wasser gegen den Boden des Gefäßes mit einer Kraft drückt, welche senkrecht gegen den Kreisumfang gerichtet und stärker ist als das Gewicht des Wassers.

Es gibt Apparate, mit denen man diese Kraft messen kann. Eine metallische Axe EF (Fig. 42), die vertikal auf einem festen Tische steht, kann mittels einer Kurbel M , deren Zahnrad C in ein an der Axe befestigtes

Fig. 42.



Zahnrad D eingreift, in Rotation versetzt werden kann. Auf der Axe ist ein Rechteck $TABU$ befestigt, dessen eine Seite TU aus einem zylindrischen Stab besteht, der beliebig herausgenommen werden kann. Man kann auf diesen Stab eine durchbohrte Kugel S schieben, deren Gewicht gleich P sei, und zwischen die Kugel und die Seite T eine Feder E einsetzen, die mit einem Zeiger versehen ist, um den Druck zu bestimmen, welchen die Kugel auf sie

ausstübt. Setzt man mittels der Kurbel den Apparat in rasche Rotation, so beschreibt die Kugel anfangs eine Spirale; bald aber drückt die Kugel gegen die Feder und drückt sie bis auf einen bestimmten Punkt zusammen. Dann beschreibt sie einen Kreis, und der auf die Feder ausgeübte Druck mißt die Centrifugalkraft. Man wird finden, daß der Druck mit dem vorher durch Rechnung bestimmten der gleiche ist, daß

$$F = \frac{mv^2}{R} = \frac{P}{g} \cdot \frac{v^2}{R}.$$

Daß die Centrifugalkraft proportional dem Gewichte der rotierenden Körper ist, kann man an einem sehr hübschen Versuche sehen. Ersetzt man den Messingstab des vorigen Versuches durch eine geschlossene Glasröhre, in welcher Luft, Wasser, ein Stückchen Kork und eine Bleikugel eingeschlossen ist, so sieht man bei der Rotation des Apparates die Luft dem Centrum des Kreises am nächsten, das Stückchen Kork sich auf die dem Centrum zugewandte Seite des Wassers legen, und die Bleikugel sich bis ans Ende der Röhre bewegen, selbst wenn die Röhre gegen den Mittelpunkt des Kreises stark geneigt ist.

§ 34.

Erhaltung der Rotationsebene. In gleicher Weise, wie ein Körper bei der drehenden Bewegung der Änderung der Bewegungsrichtung in seiner

den einen gewissen Widerstand leistet, welcher sich in der Centrifugalkraft äußert, so strebt auch ein rotierender Körper in der Ebene, in welcher er rotiert, zu verharren. Jeder Teil des Körpers beschreibt nämlich bei seiner Bewegung einen ebenen Kreis, und in jedem Augenblicke besitzt derselbe eine nach der Tangente des Kreises gerichtete Geschwindigkeit. Wenn man nun den rotierenden Körper so drehen will, daß die Ebene, in der sich jeder Punkt desselben bewegt, mit ihrer ursprünglichen Lage einen Winkel bildet, so muß ebenfalls die Richtung der Bewegung geändert werden.

Dazu bedarf es aber ebenso einer Kraft, wie zu der Änderung der Bewegungsrichtung in der Rotationsebene. Wirken demnach keine äußeren Kräfte auf einen solchen rotierenden Körper ein, so bleibt er in seiner Lage, so daß die von den einzelnen Punkten beschriebenen Kreise stets derselben Ebene parallel bleiben.

Man sieht dieses sehr deutlich an einem schmalen Rade oder einer ebenen Scheibe, welche sofort umfallen, wenn man sie ruhend auf dem Boden vertikal aufstellen will, welche aber in der vertikalen Ebene fortstehen, wenn man sie in rasche Drehung um eine horizontale Axe versetzt.

Dasselbe zeigt sich in dem Beharren der sogenannten freien Axen rotierender Körper.

Lebt sich nämlich der Körper um eine Axe, um welche die Masse derselben ganz symmetrisch verteilt ist, so zwar, daß die Schwerpunkte aller einzelnen auf der Axe senkrechten Schichten auf der Axe liegen, dann übt die Centrifugalkraft nach allen Richtungen hin einen gleichen Zug auf die Axe aus, ihre Wirkung hebt sich also auf. Eine solche Axe, welche durch die Centrifugalkraft gar keinen Zug erfährt, nennt man eine freie Axe. Daß eine solche Axe ihre Richtung im Raume beibehält, sieht man sehr deutlich an dem Bohnenberger'schen Apparate. Derselbe besteht aus drei ineinander liegenden Ringen, in deren innerstem eine Kugel in rasche Rotation versetzt werden kann. Der äußerste Ring *A* (Fig. 43) ist fest vertikal aufgestellt.

Der zweite Ring *B* kann sich in dem ersten um eine vertikale Axe frei drehen. Der dritte Ring *C* kann sich in dem zweiten um eine Axe frei drehen, welche mit der Drehungsaxe des zweiten Ringes einen rechten Winkel bildet, und die Kugel *D* endlich ist um eine auf dieser senkrechten Axe drehbar. An der Axe der Kugel ist eine kleine Rolle angebracht, um welche ein Faden vielfach geschlungen werden kann. Zieht man den Faden sehr rasch ab, während man den Ring festhält, so nimmt die Kugel eine sehr rasche Rotation um ihre Axe an.

Man sieht, durch diese dreifache Aufhängung kann sich die Axe der Kugel ganz frei nach allen Richtungen drehen; rotiert die Kugel nicht, so bringt auch der leiseste Druck eine Drehung der Axe hervor. Hat man

Fig. 43.

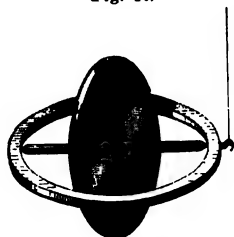


Man sieht, durch diese dreifache Aufhängung kann sich die Axe der Kugel ganz frei nach allen Richtungen drehen; rotiert die Kugel nicht, so bringt auch der leiseste Druck eine Drehung der Axe hervor. Hat man

aber die Kugel mittels raschen Abziehens der Schnur in schnelle Rotation versetzt, so mag man den Apparat drehen und wenden wie man will, die Axe der Kugel bleibt sich immer parallel. Sehr deutlich sieht man dies, wenn man den Apparat auf der Centrifugalmaschine befestigt und dann in Rotation versetzt; die Richtung der Drehungsaxe wird nicht geändert.

Ganz dieselbe Erscheinung zeigt sich bei dem bekannten Kringel, dem Kreisel. Wenn derselbe nicht rotiert, so fällt er auf die Seite; stellt man ihn sofort um, weil er sich dann im Zustande des labilen Gleichgewichts befindet. Rotiert er, so fällt er nicht um, selbst wenn die Axe die Vertikale geneigt ist, also der Kreisel die Schwerkraft umgeworfen würde, wenn er nicht rotierte.

Fig. 44.



Wie groß der Widerstand ist, den ein Körper einer Änderung der Rotation entgegensetzt, fühlt man sehr deutlich, wenn man versucht, die Axe der rotierenden Kugel im Bohnenbergerschen Apparat zu drehen. Noch auffallender zeigt es sich in den Versuchen, welche der Mechanikus Fessel auf die Konstruktion eines besonderen Apparates, des Fessels Rotationsapparates, führte.

Fig. 45.



Wenn man eine an ihrem Stiel mit einem starken Messingwanne (Scheibe) auf einer Achse montiert, welche wie die Bohnenbergersche Kugel in einem Ring angebracht ist, nun die Scheibe in sehr rasche Rotation versetzt und dann den Apparat in der in Fig. 44 bezeichneten Position auf einem Faden aufhängt, so sinkt die Scheibe nicht sofort herab, sondern bleibt frei schweben, weil bei einer Änderung der Rotation eine Änderung der Rotation entgegenwirkt, obwohl das Gewicht des Apparates weit über das Gewicht der Schwingungsscheibe ein ziemlich beträchtliches ist.

Dagegen sieht man an dem Fessels Rotationsapparat sowohl als am Kringel eine andere auf den ersten Blick höchst auffallende Erscheinung; die Scheibe dreht sich um den vertikalen Faden in einer der Rotation der Scheibe entgegengesetzten Richtung, während ein langsames Sinken der Drehungsaxe stattfindet.

Zu allseitiger Darstellung dieser Erscheinungen dient der Fessels Rotationsapparat (Fig. 45). Die Scheibe mit dem Ring von Fig. 44 nach Art der Bohnenbergerschen Aufhängung in einem zweiten Ring befestigt, an welchem sich ein Stiel befindet, welcher in der Gabel

eine horizontale Axe drehbar befestigt wird. Die Gabel befindet sich auf einer vertikalen im Fuß des Apparates drehbaren Axe. An der Verlängerung des Stieles können Gewichte angehängt werden, um die rotierende Scheibe ganz oder zum Teil zu äquilibrieren. Hängt die Scheibe ganz frei, und rotiert sie, so sieht man eine Drehung der Scheibe mit den Ringen um die vertikale Axe in dem eben bezeichneten Sinne; ist sie ganz äquilibrirt, so hängt die Scheibe ganz ruhig, als wenn sie nicht rotierte; ist dagegen das Übergewicht auf der andern Seite des Stieles, so dreht sich die ganze Vorrichtung in einer der vorhin angegebenen entgegengesetzten Richtung um die vertikale Axe, also in der Richtung der Rotation des Rades.

Dafs alle diese Erscheinungen nur Folge der tangentialen Geschwindigkeit der einzelnen Teile der Scheibe sind, hat Poggendorf in sehr faßlicher Weise gleich nach dem Bekanntwerden des Fesselschen Apparates gezeigt.

Wird nämlich die Drehungsaxe der rotierenden Scheibe zuerst horizontal gehalten, wie Fig. 44 und die Scheibe in der Vertikalebene rotieren gelassen, so wird beim Loslassen der Scheibe, wenn sie nicht durch ein Gewicht im Gleichgewicht gehalten wird, zunächst die Schwere einwirken und die Vorrichtung ein wenig sinken machen.

Durch dieses Sinken tritt eine geringe Drehung der Scheibe um eine horizontale Axe ein, und dadurch wird die Bewegung der Teilchen der Scheibe vorn, wo sie aufsteigen, und hinten, wo sie hinuntersinken, gestört. Dieselben haben eine vertikale Geschwindigkeit, die Scheibe nimmt dagegen eine etwas geneigte Lage an. Die vertikalen Geschwindigkeiten der Teilchen treten daher vorn, wo sie aufsteigen, zur Rechten, hinten, wo sie absteigen, zur Linken aus der Scheibe heraus. Da nun die Teilchen der Scheibe ihnen nicht mehr ganz folgen können, so üben sie einen Zug senkrecht auf die Scheibe aus, vorn nach rechts hin, hinten nach links hin. Beide Wirkungen unterstützen sich, und die Folge davon ist eine Drehung der ganzen Vorrichtung um die vertikale Axe und zwar von oben gesehen umgekehrt, wie die Bewegung eines Uhrzeigers stattfindet.

Sobald aber diese Drehung der Vorrichtung um die vertikale Axe beginnt, wird auch die Bewegung der Teilchen unten, wo sie sich nach vorn, oben, wo sie sich nach hinten bewegen, gestört. Die augenblickliche Geschwindigkeit derselben tritt unten nach links und oben nach rechts aus der augenblicklichen Stellung der Scheibe hervor. Zerlegen wir sie in zwei Komponenten, eine in der Richtung der augenblicklichen Bewegung der Scheibe und eine darauf senkrechte, so sieht man sofort, wie dadurch an dem tiefsten Punkte des Scheibendurchmessers ein Zug nach links und am höchsten ein Zug nach rechts entsteht. Beide Kräfte zusammen müssen die Drehungsaxe der Scheibe ein wenig heben, also in der entgegengesetzten Richtung bewegen, in welcher die Schwere ursprünglich das Bestreben hatte, die Axe zu drehen.

Ist dagegen dem Gewichte der Vorrichtung durch ein gleiches Gegengewicht das Gleichgewicht gehalten, so fehlt der erste Impuls, der die Scheibe ein wenig dreht, die Wirkung der Schwere, deshalb tritt gar keine Bewegung ein.

Ist aber das Gegengewicht schwerer, so ist die Wirkung eine gerade entgegengesetzte, wie eine der vorigen ganz analoge Betrachtung unmittelbar ergibt.

Die Bewegung der Rotationsaxe des Kreisels auf einem Kegel um die Vertikalrichtung wird man sich leicht auf die gleiche Weise ableiten können.

§ 35.

Foucaults Pendelversuch. Ein schwingendes Pendel hat ebenso das Bestreben, stets in derselben Vertikalebene zu schwingen, indem auch an diesem die einzelnen Teile in ebenen Kurven, in Kreisbogen, sich bewegen. Wenn daher keine seitliche Einwirkung auf das Pendel stattfindet, so wird es stets in derselben Ebene schwingen.

Diese Eigenschaft des Pendels hat der französische Physiker Foucault benutzt, um einen experimentellen Beweis für die Axendrehung der Erde zu liefern. Man denke sich ein Pendel gerade über dem Pole der Erde, z. B. dem Nordpole, aufgehängt und das Pendel gerade in einem Meridian schwingen. Das Pendel bleibt sich mit seinen Schwingungen stets parallel, der Meridian aber, mit dem es anfänglich parallel hin und her sich bewegte, dreht sich unter dem Pendel in 24 Stunden vollständig im Kreise herum. Ein Beobachter muß daher nach und nach die Richtung der Pendelschwingung von der des Meridians abweichen sehen und, da er die Drehung der Erde nicht wahrnimmt, glauben, daß sich die Pendelebene in entgegengesetztem Sinne drehe. Es muß daher den Anschein haben, als wenn sich die Pendelebene mit der Sonne drehe.

An andern Orten der Erde ist das Verhältnis nicht ganz so einfach, dort kann die Pendelebene nicht ganz ihre Lage beibehalten, wie unter dem Pole, da mit der Rotation der Erde die Richtung der Schwere sich ändert; in wie weit dort eine Drehung der Pendelebene eintreten muß, gilt folgende Überlegung. Die Lage der Pendelebene in einem bestimmten Momente ist bestimmt durch die Richtung der Vertikalen und durch die Richtung der horizontalen Tangente, die wir an den tiefsten Punkt des von dem Pendel beschriebenen Kreisbogens legen, also etwa durch den Winkel, den diese mit dem Meridian bildet. Nehmen wir der Einfachheit wegen an, das Pendel schwinde in dem betrachteten Moment in der durch den Meridian gelegten Vertikalebene, so würde OAC (Fig. 46) uns die Lage der Pendelebene darstellen, wenn A uns einen Ort, auf dem Parallel ABP , und O den Mittelpunkt der Erde bedeutet. Dreht sich nun die Erde um CO als Axe, so ändert sich die Richtung der Vertikalen stetig, und mit der Drehung der Vertikalen ändert sich die Lage der Pendelebene, da das Pendel immer um die augenblickliche Vertikale als die Gleichgewichtslage infolge der nach der Vertikalen gerichteten Wirkung der Schwere hin und her schwingen muß. Hat sich die Erde so weit gedreht, daß der Punkt A auf dem Parallel ABP bis B gekommen ist, so hat sich die Vertikale um den Winkel AOB gedreht, eine Drehung, die wir indes nicht wahrnehmen, da wir uns mit der Erde drehen.

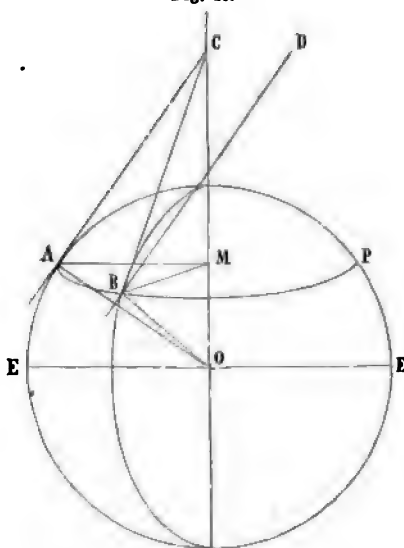
Auf die andere Richtung dagegen, welche uns die Lage des Pendels bestimmt, resp. auf die horizontale Komponente seiner Bewegung wirkt gar keine Kraft ein, so daß die horizontale Richtung, das heißt die an den tiefsten Punkt des Pendelbogens gelegte horizontale Tangente im Raume immer dieselbe Richtung beibehalten muß. Denn ein Verlassen dieser Richtung wäre nur möglich, wenn auf das schwingende Pendel in der

an Ebene irgend eine der horizontalen parallele Kraft einwirkte. Deshalb im Punkte B die zweite Richtung, welche die Lage der Ebene bestimmt, die an den tiefsten Punkt des Pendelbogens gelegte Tangente BD der ursprünglichen Richtung AC parallel sein. Man ursprünglich voraus, das Pendel schwinde in der durch den gelegten Vertikalebene. Da nun diese Ebene, resp. die Richtung des Meridians sich gedreht hat, so muß die an den untersten Punkt des Pendelbogens gelegte horizontale Tangente mit der Richtung des Meridians im Punkte B einen Winkel β bilden, der, wenn φ die geographische Breite im Orte A den Winkel AE ist, den der Punkt A auf seinem Parallelkreis von der Meridianebene hat, wie sich leicht zeigen läßt, gegeben ist durch

$$\beta = \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Der Ausdruck für die Größe des Winkels β ergibt sich unmittelbar aus dem 15. bewiesenen Satze über die Zusammensetzung und Zerlegung von Drehungen. Wir können nämlich darnach die um die Erdaxe OC statt-

Fig. 46.



findet. Die erste Drehung bringt die Ebene ABO in die Lage CBO , die zweite Drehung um BO dreht dann die Ebene ABO in die Lage CBO . Der Winkel CB mit der Meridianebene ist demnach gleich der Komponente der Drehung. Diese Komponente ist die Komponente einer Drehung um eine Achse, welche mit der Erdachse den Winkel $90 - \varphi$ bildet, gleich der gegebenen Drehung α multipliziert mit $\cos \varphi$. Die Achse AO bildet nun, wenn wir die geographische Breite AE des Beobachtungsortes mit φ bezeichnen, mit der Erdachse den Winkel $90 - \varphi$. Einer Drehung α um die Achse AO entspricht also als Komponente der Drehung um die Achse OC der

$$\beta = \alpha \cdot \cos (90 - \varphi) = \alpha \cdot \sin \varphi.$$

Der Winkel der scheinbaren Drehung der Pendelebene ist gleich dem Winkel, um den sich die Erde in der Zeit gedreht hat, multipliziert mit dem Sinus der Breite.

Am Pole ist $\varphi = 90^\circ$, $\sin \varphi = 1$, $\beta = \alpha$; am Pole dreht sich die Pendelebene ebenso rasch als die Erde, am Äquator ist $\varphi = 0$, $\sin \varphi = 0$, dort dreht sich die Pendelebene gar nicht, wie sich auch unmittel-

bar daraus erkennen läßt, daß am Äquator alle an den Meridian gezogene Tangenten der Erdaxe und somit einander parallel sind.

Für Berlin ist $\beta = \alpha \cdot \sin 52^\circ 30' = 0,793\,35\,\alpha$.

Für Bonn $\beta = \alpha \cdot \sin 50^\circ 43' 45'' = 0,774\,16\,\alpha$.

In 24 Stunden dreht sich somit, da α dann gleich 360° ist, das Pen

zu Berlin um $285^\circ 36'$,

zu Bonn um $278^\circ 41' 51''$,

oder zu einer ganzen Umdrehung braucht das Pendel

in Berlin 30 Stunden 15 Minuten

und

in Bonn 31 Stunden 6 Minuten.

Genau ausgeführte Versuche haben wirklich diese von der Theorie forderten Zahlen geliefert und haben somit einen experimentellen Beleg für die Axendrehung der Erde gegeben.

Am bequemsten werden die Versuche in hohen Räumen ausgeführt. Man befestigt an einem langen feinen Draht ein schweres Gewicht und stellt es um den Punkt, auf welchen das Pendel zeigt, wenn es vertikal herabhängt, als Mittelpunkt einen getheilten Kreis. Man sieht, wie nach und nach das Pendel auf immer andere Teilstriche zeigt, indem sich seine Schwingungsebene scheinbar mit der Sonne dreht.

Drittes Kapitel.

Von der allgemeinen Gravitation.

§ 36.

Allgemeine Anziehung. Keplers Gesetze. In den beiden vorhergehenden Kapiteln haben wir mehrfach gesehen, daß alle Körper auf der Erde der Schwerkraft angegriffen werden, die wir ihr Gewicht nannten, und welche an jeder Stelle senkrecht gegen den Horizont wirken. Es hat demnach den Anschein, als wenn die ganze Masse der Erde auf die an ihrer Oberfläche befindlichen Körper eine Anziehung ausübe, welche überall merklich gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet ist, und welche bis zu irgendeiner Höhe über dem Boden wirksam ist. Durch Induktion schließen wir daraus, daß sich diese Anziehung über jene Grenzen ausdehnt, welche wir erreichen können, daß sie sich bis zu den Sternen erstreckt, aber mit der Entfernung an GröÙe abnehmend.

Andererseits dürfen wir mit großer Wahrscheinlichkeit annehmen, daß alle Gestirne ähnliche Erscheinungen darbieten, daß es auf allen gegen ihren Mittelpunkt gerichtete Schwere gebe, die bis zu einer gewissen Entfernung auf alle anderen Himmelskörper wirkt. Diese Schlüsse waren es, welche Newton dahin führten, anzunehmen, daß alle Gestirne sich anziehen, daß ihre Bewegungen durch die wechselseitige Einwirkung derselben auf einander bestimmt seien, und daß das ganze Weltall durch K

regiert werde, die aus einer einzigen Quelle fließen, aus der Anziehung der Materie.

Ist dem so, so müssen die Bewegungen der Gestirne äußerst verwickelter Natur sein, weil ihre Zahl äußerst groß ist, und alle auf einander einwirken. Indes ist es leicht ersichtlich, daß sich das Problem mit einer ersten Annäherung einfacher stellt. Die Himmelskörper teilen sich in zwei Klassen; die eine umfaßt die Fixsterne, welche sich in so großen Entfernungen von der Sonne und Erde befinden, daß man ihren Einfluß vernachlässigen kann; die andern stehen sich näher, sie wirken einer auf den andern ein und bilden eine abgeschlossene, von Fixsternen freie Gruppe; es sind dies die Sonne nebst ihren Planeten. Wir haben uns zunächst nur mit der Wechselwirkung dieser auf einander zu befassen. Vergleichen wir nun die einzelnen Körper dieser Gruppe mit einander, so erkennen wir sofort, daß die Sonne wegen ihrer überwiegenden Größe in dem System auch einen überwiegenden Einfluß haben muß, derart, daß ein Planet wie unsere Erde von der Sonne sehr stark angezogen werden muß, von den übrigen so unbedeutend, daß wir auch deren Einfluß zunächst vernachlässigen dürfen. Wir betrachten daher die Sonne als den einzigen anziehenden Mittelpunkt in unserem System und nehmen an, daß die übrigen Planeten unabhängig von einander sich nach denselben Gesetzen bewegen, jeder so, als sei er allein der Anziehung der Sonne unterworfen. Wir haben dann, um die Gesetze der Anziehungskraft zu erhalten, nur die Aufgabe, die Bewegung der einzelnen Planeten um die als fest betrachtete Sonne zu untersuchen, und aus dieser nach den bisher entwickelten Gesetzen auf diejenigen zurückzuschließen, nach welchen die Kraft wirksam ist.

Die Gesetze, nach denen sich die einzelnen Planeten um die Sonne bewegen, sind im Anfange des 17. Jahrhunderts von dem großen deutschen Astronomen Keppler aus den sorgfältigen und langjährigen Beobachtungen Tycho de Brahes abgeleitet worden und werden daher nach ihm die Kepplerschen Gesetze genannt¹⁾. Es sind folgende drei:

1. Die Planeten bewegen sich in elliptischen Bahnen um die Sonne, welche in dem einen Brennpunkte der Ellipsen steht.
2. Die von dem Radius vector jedes Planeten beschriebenen Flächenräume verhalten sich wie die Zeiten, in denen sie beschrieben sind.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten der verschiedenen Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände von der Sonne.

Auf diese Gesetze gründete Newton den Nachweis von der Existenz einer zwischen verschiedenen Massen thätigen, anziehenden Kraft und die Entwicklung der Gesetze, nach welchen dieselbe sich ändert.

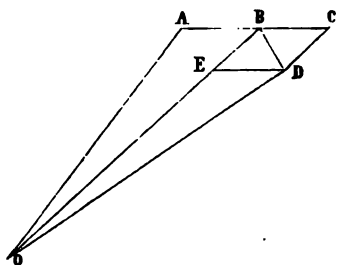
§ 37.

Die Anziehung ist gegen die Sonne gerichtet. Sei O (Fig. 47) das Centrum der Sonne, und A das eines Planeten, in einem bestimmten Augenblicke. Während einer sehr kleinen Zeit beschreibt nun letzterer das

¹⁾ Man sehe *Poggendorff*, Geschichte der Physik. Leipzig 1879, p. 161 ff.

Stück AB seiner Bahn. Wenn nun keine äußere Kraft auf ihn einwirkt, so würde er in einer der ersten gleichen und ihr folgenden Zeit das gleiche Stück BC in der Richtung seiner Bewegung zurücklegen. Anstatt dessen legt jedoch der Punkt A in der auf die erste folgenden und ihr gleichen Zeit den Weg BD zurück. Man muß daraus schließen, daß auf ihn eine

Fig. 47.



Kraft einwirkt, welche seine Bewegungsrichtung ändert. Um die Richtung dieser Kraft zu erhalten, bedenken wir, daß nach dem zweiten Keplerschen Gesetze die Fläche

$$ABO = BDO = CBO$$

sein muß. Soll nun aber das Dreieck BDO gleich dem Dreieck CBO sein, welches gleich ABO ist, weil $AB = BC$ ist, und die Spitzen der Dreiecke zusammenfallen, so müssen die Spitzen C und D der beiden Dreiecke BDO und BCO auf einer mit BO

parallelen Linie liegen, da sie die Seite BO gemeinsam haben. Konstruieren wir nun das Parallelogramm $BEDC$, so sehen wir, daß auf den Planeten eine Kraft wirken muß, welche ihn zwingt den Raum BE zu durchlaufen, während er vermöge seiner anfänglichen Geschwindigkeit sich nach BC bewegt haben würde. Diese Kraft ist aber nach dem Mittelpunkte O gerichtet. Es ist also bewiesen, daß die Planeten, da sie sich in einer krummen Linie bewegen, einer stetig wirkenden Kraft unterworfen sind, und daß aus dem zweiten Keplerschen Gesetze, nach welchem die von den Radien vectoren in gleichen Zeiten beschriebenen Flächenräume gleich sind, hervorgeht, daß diese Kraft nach dem Centrum der Sonne gerichtet sein muß. Das ist der erste Teil der Newtonschen Entwicklung.

§ 38.

Entwicklung des Anziehungsgesetzes. Das erste Keplersche Gesetz bestimmt die Gestalt der Planetenbahnen, es erklärt sie für Ellipsen, deren Excentricitäten verschieden sind. Nehmen wir nun als einen bestimmten Fall an, daß die Excentricität gleich Null sei, daß also die elliptische Bahn in eine Kreisbahn übergehe. In Wirklichkeit ist das zwar für keinen einzigen Planeten der Fall; da jedoch die Excentricität der Planetenbahnen immer sehr klein ist, so wird unsere Annahme nicht weit von der Wahrheit abweichen, und wir werden durch unsere Entwicklungen eine erste Annäherung erhalten. Den gleichen Weg schlug Newton ein.

Im Falle der Planet sich in einer kreisförmigen Bahn bewegt, in deren Mittelpunkt sich die Sonne befindet, müssen die einzelnen Bogen, welche der Planet in gleichen Zeiten durchläuft, gleich sein, da diese Gleichheit nach dem zweiten Keplerschen Gesetze für die von den Radien beschriebenen Räume, die Sektoren bestehen muß. Die Geschwindigkeit, mit welcher der Planet sich in seiner Bahn bewegt, ist demnach eine gleichförmige während der ganzen Umlaufzeit. Wir haben somit hier einen Fall der Kreisbewegung, wie wir ihn in dem Paragraphen über die Centripetalkraft und Centrifugalkraft betrachtet haben.

Für die Centripetalkraft hatten wir den Ausdruck

$$F = \frac{m \cdot v^2}{R},$$

oder für die von der Centripetalkraft hervorgebrachte Beschleunigung

$$\frac{F}{m} = G = \frac{v^2}{R} = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

worin R den Radius des von dem bewegten Körper beschriebenen Kreises und T die Umlaufszeit bedeutet. Nehmen wir für R den Radius der Planetenbahn und für T seine Umlaufszeit, so haben wir also hier den Ausdruck für die Beschleunigung, welche der Planet gegen die Sonne erhält, also die Anziehung der Sonne auf die Einheit der Masse des Planeten, in dem Abstände R von der Sonne.

Für die verschiedenen Planeten in den Abständen R, R', R'' von der Sonne erhalten wir aus den Umlaufszeiten T, T', T'' für die Größe der anziehenden Kraft der Sonne auf die Einheit der Masse in den Entfernungen R, R', R'' die Ausdrücke

$$G = \frac{4\pi^2 R}{T^2}, \quad G' = \frac{4\pi^2 R'}{T'^2}, \quad G'' = \frac{4\pi^2 R''}{T''^2}.$$

Nach dem dritten Keplerschen Gesetze verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten wie die dritten Potenzen der mittleren Entfernungen, so daß wir haben

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{T'^2}{R'^3} = \frac{T''^2}{R''^3} = K,$$

also $T^2 = K \cdot R^3, \quad T'^2 = K \cdot R'^3, \quad T''^2 = K \cdot R''^3.$

Setzen wir diese Werte in unsere Ausdrücke für $G, G' \dots$ ein, so erhalten wir

$$G = - \frac{4\pi^2}{KR^2}, \quad G' = - \frac{4\pi^2}{KR'^2}, \quad G'' = - \frac{4\pi^2}{KR''^2},$$

oder in Worten: die von der Sonne in verschiedenen Entfernungen den Planeten erteilten gegen die Sonne gerichteten Beschleunigungen, welche die auf die Einheit der Massen ausgeübte Anziehungskraft messen, sind dem Quadrate der Entfernungen umgekehrt proportional.

Wollen wir aus der Beschleunigung die anziehende Kraft F erhalten, welche die Sonne auf die verschiedenen Planeten ausübt, so haben wir $F = m \cdot G$, also die Beschleunigung G mit der Masse m zu multiplicieren. Es wird dann

$$F = m \cdot G = \frac{m}{R^2} \cdot \varphi,$$

wenn wir mit φ die Anziehung der ganzen Sonnenmasse auf die Einheit der Planetenmasse in der Einheit des Abstandes bezeichnen. Da nun diese Anziehung gleich ist der Summe der Anziehungen der einzelnen Massenteilchen, so ist sie proportional der gesamten Masse M der Sonne, so daß wir setzen können

$$\varphi = M \cdot f$$

und dann allgemein

$$F = \frac{m \cdot M}{R^2} \cdot f.$$

Das Gesetz der Massenanziehung können wir daher ganz allgemein ausdrücken: „Die Anziehung zweier Körper auf einander ist proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihres Abstandes.“

Wir haben bisher die der Wirklichkeit nicht entsprechende Annahme gemacht, daß die Planetenbahnen Kreise seien; es entsprach das unserer Absicht, durch eine angenäherte Methode zu zeigen, wie Newton die Gesetze der Attraktion entwickelte. In der theoretischen Mechanik werden diese Probleme jedoch ohne diese Beschränkung abgehandelt; man gelangt dann genau zu denselben Resultaten, daß auf die Planeten eine gegen die Sonne gerichtete Kraft wirke, die mit dem Quadrate ihres Abstandes von der Sonne abnimmt.

Nachdem man die Gesetze erkannt hat, denen die Attraktionskraft folgt, liegt es nahe, sich die Frage vorzulegen, wodurch es dahin gekommen, daß die Planeten sich in diesen Bahnen bewegen. Es ist das eine rein mathematische Aufgabe, wie aus Folgendem ersichtlich ist. Wären Sonne und Erde z. B. anfänglich ohne Bewegung sich im Raume in einem gewissen Abstände gegenübergestellt, so würden beide Gestirne infolge der Anziehung sich gegen einander bewegt haben, bis sie sich berührt hätten. Hatte aber die Erde anfänglich eine Geschwindigkeit in anderer Richtung als in der Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte erhalten, so mußte sie sich unter dem doppelten Einfluß dieser Anfangsgeschwindigkeit und der Anziehung der Sonne in einer krummlinigen Bahn bewegen. Die Rechnung zeigt nun, daß diese Bahn jedenfalls ein Kegelschnitt sein mußte und zwar, je nach dem anfänglichen Abstände der beiden Körper und der Anfangsgeschwindigkeit des beweglichen, ein Kreis, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel. Einmal auf dieser Bahn bewegt, muß das Gestirn dieselbe unaufhörlich durchlaufen, entweder wenn die Kurve geschlossen ist, seinen Weg immer wieder zurücklegend, wie es bei den Planeten der Fall ist, oder ohne Wiederkehr fortschreitend, wenn die Kurve eine nicht geschlossene ist. Letzteres ist für einige Kometen wahrscheinlich.

Dieses ist jedoch noch nicht die exakte Lösung des Problems der Astronomie; man kann die Gestirne in ihrer Bewegung nicht als unabhängig von einander betrachten, denn jedes derselben wird in jedem Augenblicke von der Sonne und allen andern angezogen. Deshalb sind die Bahnen der Planeten nicht vollkommene Ellipsen, als welche Keppler sie ansah, sondern sehr verwickelte Kurven, welche infolge der Störungen der andern Planeten bald an der einen bald an der andern Seite von der Ellipse abweichen. Dadurch wird das allgemeine Problem der Bewegung der Gestirne äußerst verwickelt, und es bedarf zu seiner Lösung schwieriger mathematischer Entwicklungen und exakter Beobachtungen. Erstere liefert die Mechanik des Himmels, letztere die beobachtende Astronomie.

Wir haben in den beiden letzten Paragraphen die zwischen den Gestirnen wirksame Kraft als eine Anziehung der Materie bezeichnet; mit dieser Bezeichnung haben wir bereits den Boden der Thatsachen verlassen und uns auf das Gebiet der Hypothese begeben. Die Thatsachen beweisen uns nur, daß zwischen den Gestirnen ein Antrieb zur Wirksamkeit kommt, welcher die Planeten gegen die Sonne treibt, und daß dieser Antrieb den Massen der Planeten direkt, den Quadraten ihrer Abstände umgekehrt pro-

tional ist. Nach unserer Definition des Wortes Kraft, als die Ursache des Antriebes, können wir ebenso sagen, daß zwischen den Weltkörpern Kraft thätig ist. Sowie wir aber als die Quelle dieser Kraft eine durch Raum wirkende Anziehung der Materie bezeichnen, machen wir zur Befriedigung unseres Kausalitätsbedürfnisses, zur Beantwortung der Frage, wer rührt diese Kraft, eine Hypothese. Ob Newton diese Hypothese so, läßt sich nicht mit Sicherheit behaupten, sicher ist, daß diese Hypothese zuerst von Roger Cotes in der Vorrede zu der von demselben noch Lebzeiten Newtons veranstalteten Ausgabe der *Philosophiae naturalis principia mathematica* deutlich ausgesprochen wurde.

Bis vor wenigen Jahren hat man sich mit dieser Hypothese ziemlich gemein begnügt. In neuester Zeit sucht man indes die zwischen zwei entfernten Massen thätige Kraft in anderer Weise zu erklären, indem man davon ausgeht, daß die Annahme einer durch nichts weiter vermittelten Anziehung in die Ferne unserem Kausalitätsbedürfnisse nicht genüge, oder mit anderen Worten, daß eine solche unvermittelte Wirkung in die Ferne für uns nicht begreiflich sei. Man hat deshalb ein Zwischenmittel angenommen, welches die von den einzelnen Massen ausgehenden Antriebe übermittelt, und hat als solches vorzugsweise den Äther angesehen, auf dessen Existenz sogenannten leeren Raume wir aus den Lichterscheinungen schließen können. Man hat weiter verschiedene zum Teil als abenteuerliche zu bezeichnende Vorgänge ersonnen, durch welche die Antriebe und deren Übermittlung zwischen den Massen zustande kommen sollen¹⁾. Wir können die verschiedenen Erklärungsversuche hier nicht eingehen, kein einziger von ihnen ist haltbar, entweder sind die Hypothesen, auf denen die Erklärungsversuche beruhen, selbst ebenso unbegreiflich als die Wirkung in die Ferne, welche sie erklären sollen, oder sie stehen mit anderweitig ermittelten Principien oder Gesetzen im Widerspruch.

Nur wollen wir hier sofort schon bemerken, daß alle diese Erklärungsversuche eigentlich müßig sind, so lange wir in der Auffassung der Naturerscheinungen an der atomistischen Konstitution der Materie festhalten. In Beginne des nächsten Abschnittes an werden wir nämlich sehen, daß in einer Erklärung der Naturerscheinungen am weitesten kommen, oder an die Sätze der Einleitung anzuknüpfen, daß wir die weitaus größte Zahl von Naturerscheinungen aus einer einzigen Hypothese ableiten können, wenn wir annehmen, daß die Materie aus einzelnen Teilchen, den Atomen oder Molekülen besteht, welche, ohne sich gegenseitig zu berühren, neben einander gelagert sind. Damit sind wir genötigt Kräfte anzunehmen, welche zwischen diesen Teilchen thätig sind, ohne daß wir ein Zwischenmittel annehmen können, welches die Wirkungen von einem Molekül auf das andere übermittelt. Zwar sind die Abstände der Moleküle für uns unmeßbar klein, doch eine unvermittelte Fernwirkung ist für kleine Entfernungen gerade so schwer oder so leicht begreiflich als für große Entfernungen. Klein und groß sind überhaupt nur relative Begriffe. Zudem wissen wir nicht, ob nicht der Abstand der Moleküle im Verhältniß zur Größe derselben ein

¹⁾ Eine ziemlich vollständige Übersicht über die verschiedenen Versuche zur Erklärung der Fernwirkung gibt Dr. Isackrahe in seinem Buche: *Das Rätsel der Schwerkraft*. Braunschweig bei Vieweg 1879.

ebenso großer ist, als der Abstand der Weltkörper im Verhältnis zur Größe dieser. Nur in einer solchen Hypothese zur Erklärung der Fernwirkung können wir daher einen Fortschritt erblicken, welche gleichzeitig die sogenannten Molekularkräfte überflüssig macht, welche uns also gestattet, die Materie als ein nicht aus diskreten Teilchen bestehendes Kontinuum aufzufassen. Da vorläufig dazu noch keine Aussicht vorhanden ist, halten wir an der Hypothese der Fernwirkung fest¹⁾.

Ob wir indes eine Fernwirkung annehmen oder nicht, das sogenannte Attraktionsgesetz, das Gesetz, nach welchem der zwischen zwei Massen vorhandene Antrieb von der Größe und dem Abstände der Massen bedingt wird, steht fest, und nur dieses Gesetz ist es, welches unsern weiteren Untersuchungen zu Grunde liegt.

§ 39.

Identität der Schwere und der allgemeinen Anziehung. Machen wir es uns jetzt zur Aufgabe, den Nachweis zu liefern, daß die Ursache, welche auf der Erde die Körper fallen macht, dieselbe ist wie jene, welche die eben betrachteten Bewegungen regelt. Auch dieses zuerst nachgewiesen zu haben ist Newtons Verdienst.

Die Erde besitzt einen Trabanten, den Mond, dessen Centrum im Mittel 60 Erdradien von dem Mittelpunkte der Erde entfernt ist. Astronomisch gesprochen ist dieser Abstand sehr gering, und daher kommt es, daß die Anziehung der Erde auf den Mond viel größer ist als die Anziehung der Sonne, so zwar, daß man annehmen darf, der Mond sei nur der Anziehung der Erde unterworfen. Es ist dieses allerdings nicht genau, aber eine ähnliche Annäherung an die Wirklichkeit wie bei unserer vorigen Annahme, daß die Planetenbahnen Kreise seien. Der Mond wird deshalb um die Erde, letztere als ruhend betrachtet, eine Ellipse beschreiben. Nehmen wir nun überdies an, daß die Mondbahn ein Kreis sei, was bei ihrer geringen Excentricität nur wenig von der Wahrheit abweicht, sowie die Erde und der Mond seien vollkommene Kugeln. Nach allen diesen Annahmen können wir zwar keine genauen numerischen Daten erwarten, jedoch für unsern Zweck hinreichende, da alle diese Annahmen nur sehr wenig von der Wahrheit abweichen.

Die Anziehung, welche der Mond von der Erde erfährt, können wir aus der centripetalen Beschleunigung berechnen, welche der Mond von der Erde erfährt; diese Beschleunigung ist gleich der Kraft, welche die Masseneinheit des Mondes von der ganzen Erde erfährt. Bezeichnen wir die Umlaufzeit des Mondes mit T , den Radius der Mondbahn mit r , so ist die centripetale Beschleunigung

$$G = \frac{4\pi^2 r}{T^2}.$$

Der Radius der Mondbahn ist nun, wie erwähnt, gleich 60 Erdradien bezeichnen wir letztern mit R , so wird

$$G = \frac{2\pi R \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi}{T^2}.$$

¹⁾ Wir werden im 4. Bande bei Besprechung der Gesetze der elektrischen Anziehung Gelegenheit nehmen nochmals auf diese Frage zurückzukommen.

In diesem Ausdrucke ist $2\pi R$ gleich dem Umfange der Erde, gleich 4000 000 Meter; die Umlaufszeit T des Mondes ist gleich 27 Tage, Stunden, 43 Minuten = 39 343 · 60 Sekunden. Demnach wird G

$$G = \frac{40\,000\,000 \cdot 2 \cdot 60 \cdot \pi}{(39\,343 \cdot 60)^2} = \frac{40\,000\,000 \pi}{(39\,343)^2 \cdot 30}$$

$$G = 0,002706 \text{ Meter.}$$

Diese Zahl gibt uns die Beschleunigung, welche der Mond durch die Anziehung der Erde in jeder Sekunde gegen den Mittelpunkt der Erde erhält, also auch die Anziehung in Kräfteinheiten, in Kilogrammen, welche die an der Stelle des Mondes befindliche Masseneinheit von der Erde erhält.

Ein an der Erdoberfläche befindlicher Körper erhält nun die Beschleunigung 9,81 Meter, oder was dasselbe ist, die Erde zieht an ihrer Erdoberfläche die Masseneinheit mit einer Kraft von 9,81 Kilogrammen an. Ist deshalb die Schwerkraft mit der allgemeinen Gravitation dieselbe Kraft, so würden die in beiden Fällen auf die Masseneinheiten wirkenden Kräfte sich umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Abstände derselben von dem Mittelpunkte der Erde, von welchem wir uns die Anziehung der Erde ausgehend berechnen können.

Um diese Vergleichung durchführen zu können, müssen wir deshalb zunächst untersuchen, von welchem Punkte der Erde aus die auf außerhalb der Erde befindliche Massen ausgeübte Anziehung ausgeht, von wo aus wir die Abstände der zu vergleichenden Masseneinheiten zu rechnen haben.

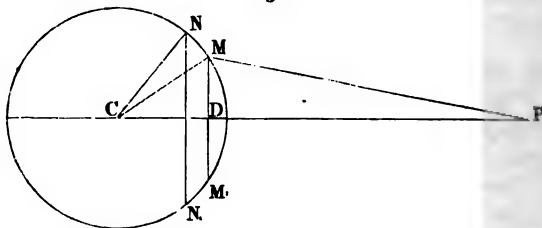
Befindet sich die angezogene Masse von der Erde so weit entfernt, als wir die Verbindungslinien aller Punkte der Erde mit dieser Masse als einander parallel ansehen können, so lehrt uns schon der Satz vom Mittelpunkte der parallelen Kräfte, daß die Erde und die Masse sich gerade so anziehen müssen, als ginge die gesamte Anziehung von dem Mittelpunkte der Erde aus. Denn da an allen Punkten der Erde in dem Falle parallele gegen die angezogene Masse gerichtete Kräfte angreifen, so befindet sich die Erde jener Masse gegenüber gerade wie eine auf der Erde befindliche schwere Kugel. Wie nun letztere von der Erde gerade so angezogen wird, als wäre ihr ganzes Gewicht im Schwerpunkt, welcher bei einer homogenen Kugel der Mittelpunkt ist, vereinigt, so ist auch die Anziehung der entfernten Masse auf die Erde und der Erde auf die entfernte Masse gerade so, als wenn die ganze anziehende Masse der Erde in deren Mittelpunkt vereinigt wäre.

Als Abstand der an der Stelle des Mondes befindlichen angezogenen Masseneinheit von der Erde müssen wir deshalb den Abstand der Mittelpunkte des Mondes und der Erde oder 60 Erdradien einsetzen.

Aber ebenso wie auf entfernte Massen wirkt eine Kugel auch auf solche, die sich in ihrer Nähe befinden, gerade so, als wenn die ganze anziehende Masse der Kugel in ihrem Schwerpunkte, also bei einer homogenen Kugel in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre. Zunächst erkennt man leicht, daß die Anziehung einer Kugel gegen den Mittelpunkt derselben gerichtet sein muß. Denn stellt der Kreis (Fig. 48) den Durchschnitt einer Kugel nach einem größten Kreise vor, welche anziehend auf irgend einen Punkt wirkt, so sieht man sofort, daß alle anziehenden Punkte der Kugel ganz symmetrisch um die Verbindungslinie PC des Punktes P mit dem Mittel-

punkte verteilt sind. Jedem Punkte M oberhalb PC ent-
so weit von P entfernter Punkt unterhalb PC . Zerlegen
 M und M_1 gerichteten Anziehungen in ihre Komponenten
und senkrecht zu PC , so heben die letzteren sich auf, da

Fig. 48.



Um die Anziehung der Kugel auf eine im P
Masse m , deren Abstand vom Mittelpunkt CP gleich
denken wir uns die Kugel in lauter einzelne sehr d
deren Dicke gleich δ sei; stelle jener Kreis den Durch
Schale vor. Die Dichtigkeit der Schale, das heißt die
enthaltene Masse sei gleich σ . Führen wir nun durch
einander sehr nahe zu PC senkrechte Schnitte MM_1 , un
dieselben aus der Schale eine Zone heraus, deren Volu
dukte aus dem Kreisumfang MM_1 , dem Bogen MN
Schale ist, wenn wir eben MN und δ so klein voraus
 MM_1 von dem in der Mitte der Schale mitten zwische
Schnitte nur unendlich wenig verschieden ist. Das
ist demnach

$$2\pi MD \cdot MN \cdot \delta,$$

und die in dieser Zone enthaltene Masse erhalten wir,
mit σ multiplizieren. Nennen wir nun die Anziehung
heit gleiche Massen in der Entfernungseinheit auf ein
erhalten wir für die Anziehung der Kugelzone auf
Masse m nach dem im vorigen Paragraphen entwickelt

$$f \cdot \frac{2\pi \cdot MD \cdot MN \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{MP^2}$$

und die allein übrig bleibende in PC fallende Komponen
Ausdruck mit $\cos CPM$ multiplizieren,

$$f \cdot \frac{2\pi \cdot MD \cdot MN \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{MP^2} \cdot \cos CPM$$

Bezeichnen wir nun den Radius der Kugelschale
stand des Punktes P von der Zone MP mit e , den W
die Breite der Zone im Winkelmaß oder MCN mit d

$$MD = r \cdot \sin \vartheta, \quad MN = r \cdot d\vartheta$$

$$\cos CPM = \frac{DP}{e} = \frac{a - r \cdot \cos \vartheta}{e}$$

Bestimmung des Zählers im Ausdruck für $\cos CPM$ haben wir

$$MP^2 = MC^2 + CP^2 - 2MC \cdot CP \cdot \cos \vartheta = r^2 + a^2 - 2ar \cdot \cos \vartheta$$

$$r \cdot \cos \vartheta = \frac{r^2 + a^2 - c^2}{2a}$$

$$a - r \cdot \cos \vartheta = \frac{a^2 + c^2 - r^2}{2a}$$

Setzen wir diese Ausdrücke in den für die Anziehung der Kugelzone gehaltenen ein, so wird derselbe

$$f \cdot \frac{2\pi \cdot r \cdot \sin \vartheta \cdot r d\vartheta \cdot \sigma \cdot m}{c^2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - r^2}{2a \cdot c},$$

er, indem wir passender ordnen,

$$f \cdot \frac{\pi r^2 \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a} \cdot \sin \vartheta d\vartheta \cdot \frac{a^2 + c^2 - r^2}{c^2}.$$

Um die Anziehung der ganzen Kugelschale auf m zu erhalten, haben wir für alle die Kugel zusammensetzenden Zonen obigen Ausdruck zu bilden und alle diese Ausdrücke zu addieren. Wir erhalten diese Werte für die einzelnen Zonen, indem wir für ϑ nach und nach alle Werte von $0 - \pi$ und gleichzeitig den jeder Zone entsprechenden Wert von c einsetzen. Mit Hilfe unseres Wertes für c können wir bequemer den Winkel ϑ eliminieren und die Breite der einzelnen Zonen durch e ausdrücken. Lassen wir nämlich die Länge von e , wenn wir von dieser Zone zur nächstfolgenden übergehen, deren Grenze in N liegt, $e + de$, so haben wir nach E 1 und E 5 aus

$$c^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos \vartheta,$$

da auf der rechten Seite nur ϑ veränderlich ist,

$$2e de = 2ar \sin \vartheta d\vartheta,$$

und daraus

$$\sin \vartheta d\vartheta = \frac{e}{ar} de.$$

Setzen wir diesen Wert in unsern Ausdruck ein, so erhalten wir für die Anziehung der ganzen Kugelzone

$$f \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma \cdot m}{a^2} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Lassen wir hierin e nach und nach alle der Kugelschale entsprechenden Werte annehmen, also e von $a - r$ bis $a + r$ sich ändern, so gibt uns die Summe der unendlich vielen Ausdrücke, die den einzelnen zwischen diesen Grenzen enthaltenen Werten von e entsprechen, die Anziehung der ganzen Kugelschale.

Die Anziehung der ganzen Kugelschale ist somit das Integral

$$\int_{a-r}^{a+r} \frac{\pi r \delta \sigma m}{a^2} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de,$$

er, da wir den nicht von e abhängigen Faktor vor das Integralzeichen

schreiben können,

$$f \frac{\pi r \delta \sigma m}{a^2} \int_{a-r}^{a+r} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2}\right) de.$$

Das Integral zerfällt in zwei, von denen das erste nach E 1 und E VIII

$$\int_{a-r}^{a+r} de = (a+r) - (a-r) = 2r,$$

das zweite nach denselben Regeln, da $\frac{de}{e^2} = -d\frac{1}{e}$

$$\int_{a-r}^{a+r} (a^2 - r^2) \frac{de}{e^2} = -(a^2 - r^2) \left(\frac{1}{a+r} - \frac{1}{a-r}\right) = 2r.$$

Die Summe der beiden Integrale ist somit gleich $4r$ und damit der Ausdruck für die Anziehung der ganzen Kugelschale

$$f \cdot \frac{4r^2 \pi \cdot \delta \cdot \sigma m}{a^2}.$$

In diesem Ausdrucke ist $4r^2\pi$ die Oberfläche der mit dem Radius r beschriebenen Kugel, $4r^2\pi\delta$ somit das Volumen und $4r^2\pi\delta \cdot \sigma$ die Masse der Kugelschale. Bezeichnen wir diese Masse mit M , so erhalten wir für die Anziehung der Kugelschale auf die im Abstände a von ihrem Mittelpunkt befindliche Masse m

$$f \cdot \frac{M \cdot m}{a^2},$$

oder die Kugelschale zieht die Masse m gerade so an, als wenn die gesamte Masse derselben in ihrem Mittelpunkte vereinigt wäre.

Was nun für diese Kugelschale gilt, dasselbe gilt für alle, in welche wir uns die Kugel zerlegt gedacht haben, selbst dann, wenn die einzelnen Schalen eine verschiedene Dichtigkeit haben. Wir erhalten deshalb ganz allgemein den Satz, daß die Anziehung einer homogenen oder einer aus konzentrischen Schalen zusammengesetzten Kugel, bei der nur die einzelnen Schalen überall dieselbe Dichtigkeit haben, nach außen gerade so wirkt, als wäre die ganze Masse derselben im Mittelpunkt vereinigt.

Zur Vergleichung der Anziehung, welche der Mond von der Erde erhält, mit der Schwere auf der Erde, müssen wir also auch für die auf der Erde befindlichen Gegenstände als anziehenden Punkt den Mittelpunkt der Erde ansehen, als Abstand der Masseneinheit auf der Oberfläche von der anziehenden Masse der Erde somit den Radius der Erde einsetzen.

Für die auf die Masseneinheit des Mondes wirkende Anziehung erhielten wir nun 0,002 706, für die auf der Erdoberfläche wirkende 9,81; ist deshalb die Schwere mit der allgemeinen Massenanziehung identisch, so müssen sich diese Zahlen umgekehrt verhalten wie die Quadrate der Entfernung dieser beiden Massen vom Mittelpunkt der Erde, oder es muß

$$g = 9,81 = 3600 \cdot G = 3600 \cdot 0,002\,706$$

sein. Führen wir die angedeutete Multiplikation aus, so erhalten wir aus

er Anziehung des Mondes

$$g = 9,742,$$

ine Zahl, die so nahe mit der aus der Pendelbewegung gefundenen übereinstimmt, daß unter Berücksichtigung der gemachten nicht ganz genauen Annahmen dadurch der sicherste Beweis geführt ist, daß die Schwere mit der allgemeinen Anziehung identisch ist.

Dieser Satz, daß die Schwere mit der allgemeinen Gravitation identisch ist, und daß die Erde auf alle auf ihr befindlichen Gegenstände gerade so wirkt, als wäre ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt, führt unmittelbar zu der am Schlufs von § 29 erwähnten Folgerung, daß ein Pendel in verschiedener Höhe über der Erdoberfläche eine verschiedene Schwingungsdauer haben, oder daß g in verschiedenen Höhen verschieden groß sein muß. In einer Höhe h über der Erdoberfläche muß der Wert von g nach dem Gesetze der Massenattraktion sich ergeben aus der Gleichung

$$g : g_0 = R^2 : (R + h)^2$$

$$g (R + h)^2 = g_0 R^2,$$

wenn g_0 die Beschleunigung an der Erdoberfläche oder im Niveau des Meeres bedeutet; es ist somit

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R + h)^2},$$

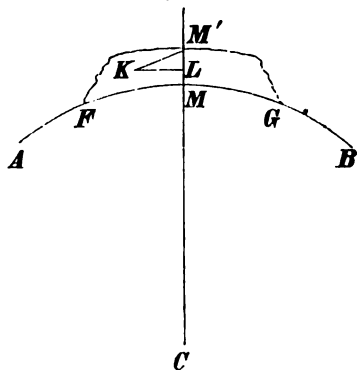
der mit hinreichend großer Annäherung, da h gegen R immer sehr klein ist,

$$g = g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right); \quad g_0 = g \left(1 + 2 \frac{h}{R}\right),$$

in Ausdruck, der uns gestattet, aus den in verschiedenen Höhen über der Erdoberfläche oder dem Meeresniveau beobachteten Werten von g den Wert von g_0 für das Meeresniveau zu berechnen.

Poisson hat darauf aufmerksam gemacht¹⁾, daß diese Korrektur des Wertes g auf das Meeresniveau nur dann zulässig ist, wenn man sich in einem isolierten Punkte in der Höhe h über dem Meeresniveau befindet, nicht aber, wenn der Punkt auf einem ausgedehnten Festlande in der Höhe h gegeben ist. In diesem Falle wird nämlich die Beschleunigung g' gleich der soeben berechneten vermehrt um die Anziehung des Festlandes. Dieselbe läßt sich in folgender Weise berechnen. Sei (Fig. 48a) C der Mittelpunkt der Erde, AMB das Meeresniveau, $FM'G$ ein sich über demselben befindendes Festland und M' ein Punkt auf demselben in der Höhe h über M . Wir betrachten dann das Festland als einen um die Vertikale CM' gelegten Cylinder von der Höhe h und dem Durchmesser $2c$. Aus diesem Cylinder denken wir uns an irgend einer Stelle einen unendlich dünnen Kreisring geschnitten,

Fig. 48a.



¹⁾ Poisson, *Traité de mécanique* Bd. I. § 255.

dessen Mittelpunkt auf der Axe CM' liegt, dessen Radius $KL = y$, dessen Breite gleich dy ist, und dessen Abstand von der Oberfläche $LM' = z$, dessen Dicke dz ist. Das Volumen des Ringes ist dann

$$2\pi y dy dz.$$

Ist σ' die Dichte des Festlandes, also die Masse der Volumeinheit, so wird gerade wie vorhin die gegen C gerichtete Anziehung dieses Ringes auf die in M' befindliche Masse m

$$\int \frac{2\pi \sigma' m y dy dz}{KM'^2} \cos KM'L.$$

Nun ist

$$KM'^2 = y^2 + z^2; \quad \cos KM'L = \frac{LM'}{KM'} = \frac{z}{\sqrt{y^2 + z^2}}.$$

Damit wird die Anziehung des Ringes

$$\int 2\pi \sigma' m \frac{yz dy dz}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Anziehung des Festlandes ist die Summe der Anziehungen aller dasselbe zusammensetzenden Ringe, die wir erhalten, wenn wir in dem letzten Ausdrucke für y und z alle dem Festlande entsprechenden Werte einsetzen. Zur Bildung dieser Summe berechnen wir zunächst die Anziehung einer Platte von der Dicke dz , welche in der Tiefe $LM' = z$ unter M liegt; diese ist die Summe der Anziehungen aller Kreisringe, deren Radius zwischen $y = 0$ und $y = c$ ist, somit das nach y genommene Integral von $y = 0$ bis $y = c$

$$2\pi \int_0^c \sigma' m z dz \int \frac{y dy}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Dasselbe ist, da nach E IV und E 1

$$\frac{y dy}{(y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = d\left(-\frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2}}\right),$$

$$2\pi \int_0^c \sigma' m z dz \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{c^2 + z^2}}\right).$$

Die Anziehung des Festlandes ist dann die Anziehung aller Platten, die zwischen $z = 0$ und $z = h$ liegen, also das Integral des letztern Ausdruckes von $z = 0$ bis $z = h$. Dieses ist auf Grund derselben Regeln

$$\varphi = 2\pi \int_0^h \sigma' m \left(h + c - \sqrt{c^2 + h^2}\right) dz.$$

Ist die horizontale Ausdehnung des Festlandes gegen die Höhe h sehr groß, so können wir unter dem Wurzelzeichen h^2 gegen c^2 vernachlässigen und erhalten

$$\varphi = 2\pi \sigma' m h.$$

Die Beschleunigung, welche die Masse infolge dieser Anziehung erhält, ist

$$\gamma = \frac{\varphi}{m} = 2\pi \sigma' h.$$

Somit wird

$$g' = g + \gamma = g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R}\right) + 2\pi f \sigma' h.$$

Ist nun σ die Masse der Volumeinheit unserer Erde, dieselbe als gleichmäßig dicht vorausgesetzt, so ist die Masse der Erde

$$\frac{4}{3} R^3 \pi \sigma,$$

somit die auf die Masseneinheit an der Oberfläche wirkende Anziehung oder die derselben erteilte Beschleunigung

$$g_0 = f \frac{\frac{4}{3} R^3 \pi \sigma}{R^2} = \frac{4}{3} \pi f \sigma R.$$

Damit wird

$$\frac{\gamma}{g_0} = \frac{2\pi f \sigma' h}{\frac{4}{3} \pi f \sigma R} = \frac{3\sigma' h}{2\sigma R}$$

oder

$$g' = g_0 \left(1 - 2 \frac{h}{R} + \frac{3\sigma' h}{2\sigma R}\right)$$

und mit hinreichender Genauigkeit

$$g_0 = g' \left(1 + \frac{2h}{R} - \frac{3\sigma' h}{2\sigma R}\right).$$

Die in diesem Falle anzubringende Korrektur ist also eine erheblich kleinere, als wenn man sich in einem isolierten Punkte in der Höhe h über der Erde befindet.

Ist ein Punkt in der Höhe h' über dem Festlande gegeben, so erhalten wir die Anziehung des Festlandes auf denselben, indem wir beachten, daß die nächste Scheibe, deren Anziehung auf denselben wirkt, sich nicht im Abstände 0, sondern im Abstände h' von demselben befindet. Wir haben dann nur das zuletzt gebildete Integral nicht von $z = 0$ bis $z = h$, sondern von $z = h'$ bis $z = h + h'$ zu nehmen. Dasselbe wird

$$\varphi' = 2\pi f \sigma' m (h + h' - h' + \sqrt{c^2 + h'^2} - \sqrt{c^2 + (h + h')^2}).$$

Ist nun h' ebenso wie h gegen c klein, so wird auch jetzt

$$\varphi' = 2\pi f \sigma' m h.$$

Die Anziehung des als Cylinder betrachteten Festlandes ist auf Punkte, welche nicht weit über demselben liegen, von dem Abstände dieser Punkte unabhängig. Die Beschleunigung g'' , welche ein Punkt in dieser Höhe erhält, ist dann

$$g'' = g_0 \left(1 - \frac{2(h + h')}{R}\right) + 2\pi f \sigma' h$$

$$g'' = g_0 \left(1 - \frac{2h}{R} + \frac{3\sigma' h}{2\sigma R} - \frac{2h'}{R}\right) = g' - g_0 \frac{2h'}{R}$$

oder

$$\frac{g'}{g''} = \frac{1}{1 - \frac{g_0}{g'} \frac{2h'}{R}} = 1 + \frac{g_0}{g'} \frac{2h'}{R}.$$

Jolly hat diese Zunahme der Anziehung direkt beobachtet¹⁾. In einem Turm zu München, der von drei Seiten frei stand, wurde 25 Meter über dem Boden eine empfindliche Wage aufgestellt, an der man bei einer Belastung von 5 Kilo auf jeder Seite noch 0,01 Milligramm ablesen konnte. Von jeder Wagschale führte ein Draht, geschützt durch eine Röhre von Zinkblech, in den Turm hinab. An den unteren Enden der Drähte waren ebenfalls Wagschalen aufgehängt. Der Abstand der unteren und oberen Schalen ergab sich zu 21,005^m.

Wiegt man einen Körper in dem oberen Schalenpaar ab und bringt ihn dann in die untere Schale, während die ihn äquilibrierenden Gewichte in der oberen Schale beobachtet werden, so nimmt das Gewicht des Körpers in dem Verhältnis der Beschleunigungszunahme $\frac{g'}{g_0}$ zu, während das Gewicht der vorher ihn oben äquilibrierenden Gewichtsstücke un geändert bleibt. Man muß daher in die obere Wagschale, um das Gleichgewicht wieder herzustellen, der Gewichtszunahme des nach unten gebrachten Körpers entsprechend, Gewichte hinzulegen. Ist m die Masse des Körpers, so ist sein Gewicht oben $Q' = mg''$, unten $Q = mg'$, somit

$$\frac{Q'}{Q} - 1 = \frac{g'}{g_0} - \frac{2h'}{R}; \quad Q' - Q'' = \frac{g'}{g_0} - \frac{2h'}{R} Q''.$$

Diese Differenz $Q' - Q''$ ist also oben hinzuzufügen.

Als abzuwägender Körper wurde eine mit Quecksilber gefüllte Glasflasche angewandt. Um den später zu besprechenden Einfluß des Gewichtes der verdrängten Luft auszuschließen, wurden zunächst vier Glaskolben von gleichem Volumen und gleichem Gewicht hergestellt. Zwei der Kolben wurden mit Quecksilber gleichen Gewichtes gefüllt, und alle Kolben an der Glasbläserlampe zugeschmolzen. Dann wurden zunächst die beiden gefüllten Kolben auf die oberen, die beiden leeren auf die unteren Wagschalen gesetzt, und durch Zuliegen der erforderlichen Ausgleichgewichte scharf das Gleichgewicht hergestellt. Dann wurden an der einen Seite der leere Kolben oben, der mit Quecksilber gefüllte unten hingesezt, somit das Quecksilber dem Mittelpunkt der Erde um 21,005^m genähert. Es ergab sich, daß zur Herstellung des Gleichgewichtes oben 31,686^{mg} hinzugefügt werden mußten, oder daß $Q' - Q'' = 31,686^{\text{mg}}$.

Das Gewicht des Quecksilbers oben war

$$Q'' = 5\,009\,450^{\text{mg}}.$$

Der Erdradius R in der Breite von München 48° 8' n. Br. ist

$$R = 6\,365\,722^{\text{m}},$$

somit muß nach der Theorie

$$Q' - Q'' = \frac{g'}{g_0} \cdot 2 \cdot 21,005 \frac{5\,009\,450}{6\,365\,722} = \frac{g'}{g_0} \cdot 33,059^{\text{mg}}$$

sein. München liegt auf einer Hochebene von 515^m Höhe; nehmen wir für die Dichte σ' etwa die Hälfte der mittleren Dichte der Erde, so würde

$$\frac{g'}{g_0} = 0,99989, \text{ somit}$$

$$Q' - Q'' = 33,055.$$

¹⁾ Jolly, Abhandlungen der Münchner Akademie. Bd. XIV. II. Abt.

Der theoretische Wert der Gewichtsdivergenz ist also etwas größer als der beobachtete. Jolly glaubt, daß der Grund dieser Abweichung der ist, daß in der Umgebung des Turmes der Boden etwas höher war als der Boden des Turmes, so daß von der Umgebung ein kleiner nach oben gerichteter Zug ausging.

§ 40.

Verschiedenheit von g in verschiedenen Breiten. Ist die Beschleunigung g eine Folge der Anziehung der Erdmasse auf die an der Oberfläche befindlichen Körper, so muß der Wert derselben an verschiedenen Punkten der Erde verschieden sein. Denn die Erde dreht sich in 24 Stunden um ihre Axe, und jeder Punkt beschreibt in dieser Zeit einen Kreis, dessen Radius gleich ist dem senkrechten Abstand desselben von der Erdaxe. Die bei der drehenden Bewegung auftretende Centrifugalkraft sucht daher alle Punkte von der Erde zu entfernen. Da aber diese Radien und somit die Kreise um so kleiner werden, je mehr wir uns den Polen nähern, so wird auch die Rotationsgeschwindigkeit und mit ihr die Centrifugalbeschleunigung im quadratischen Verhältnisse kleiner. Die Centrifugalkraft wirkt aber auch nur unter dem Äquator der Schwere gerade entgegen, an allen andern Orten bildet ihre Richtung, da sie senkrecht zur Erdaxe ist, mit der Richtung der nach dem Mittelpunkt der Erde gehenden Anziehung einen Winkel, der gleich ist der Breite des Ortes. Nur die in die Richtung der Schwere fallende Komponente, welche gleich dem Produkte aus der Centrifugalkraft in den Cosinus der Breite ist, wirkt an diesen Orten der Schwere entgegen. Es muß deshalb die Beschleunigung der Körper durch die Schwere zunehmen, so wie wir uns vom Äquator zu den Polen entfernen.

Andererseits aber ist, wie uns geodätische Messungen lehren, die Erde nicht eine Kugel, sondern ein an den Polen abgeplattetes Ellipsoid, so zwar, daß die Abplattung, das Verhältnis der Differenz zwischen Äquatorial- und Polarradius zum Äquatorialradius $= \frac{1}{299}$ ist. Daraus folgt aber, daß wir dem Mittelpunkt der Erde näher kommen, wenn wir uns vom Äquator aus zu den Polen hin bewegen. Es muß also auch aus diesem Grunde die Beschleunigung des freien Falles zunehmen, da, wie wir vorhin gezeigt haben, die Erde alle auf ihr befindlichen Körper so anzieht, als wäre die gesamte anziehende Masse in ihrem Mittelpunkte vereinigt.

Mit diesen Forderungen der Theorie ist die Beobachtung im Einklang, sie zeigt uns, daß die Beschleunigung vom Äquator zu den Polen hin zunimmt, und daß sie stärker zunimmt, als sie es allein wegen der Abnahme der Centrifugalbeschleunigung thun müßte. Ja mehr noch, die theoretische Mechanik gibt uns an, in welcher Weise wegen der Abplattung die Beschleunigung wachsen muß, und gibt uns so ein Mittel an die Hand, aus der beobachteten Beschleunigungsänderung die Abplattung theoretisch zu berechnen. Der so erhaltene Wert stimmt sehr nahe mit dem aus geodätischen Messungen abgeleiteten überein.

Die Änderungen der Größe g hat man aus den Änderungen der Länge des Sekundenpendels bestimmt. Man hat

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}};$$

setzen wir $l = 1$, so wird

$$g = \pi^2 \cdot l.$$

Es genügt also, die Länge des Sekundenpendels an verschiedenen Orten zu messen, um daraus den Wert für g zu erhalten.

Nun ist nach den Messungen von Sabine reducirt auf das Meeresniveau

Breite.	Länge des Sekundenpendels.	g .
0^0	$0^m,990938$	$9^m,78009$
45^0	$0^m,993509$	$0^m,80552$
90^0	$0^m,996080$	$9^m,83089$.

Diese Werte für g sowie alle an verschiedenen Orten beobachteten lassen sich wiedergeben durch

$$g = 9^m,78009 + 0,05080 \cdot \sin^2 \varphi,$$

wenn wir mit φ die Breite des Ortes bezeichnen, an welcher die Beschleunigung gleich g ist.

In welcher Weise g sich ändern müßte, wenn nur die Centrifugalbeschleunigung es afficierte, läßt sich leicht berechnen. Die Centrifugalbeschleunigung am Äquator ist

$$\frac{4\pi^2 R}{T^2} = \frac{2\pi \cdot 40000000}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} = 0^m,03368.$$

Der Radius der Kreise, in welchem sich die nicht unter dem Äquator liegenden Punkte bewegen, ist der senkrechte Abstand der Punkte von der Drehungsaxe der Erde. Nennen wir daher die Breite eines Ortes φ , so ist er $R \cos \varphi$. Die Centrifugalbeschleunigung ist also für einen Ort von der Breite φ gleich $0^m,03368 \cos \varphi$. Die in die Richtung der Schwere fallende und ihr entgegenwirkende Komponente ist demnach $0^m,03368 \cos^2 \varphi$. Nennen wir G die Beschleunigung durch die Schwere, wenn die Centrifugalkraft nicht vorhanden wäre, so ist die wirklich stattfindende Beschleunigung g

$$g = G - 0,03368 \cos^2 \varphi.$$

Nun ist für den Äquator, wo $\varphi = 0$ ist, nach Sabine

$$G = 9,78009 + 0,03368.$$

Vorausgesetzt, daß nur die verschiedene Centrifugalkraft die Beschleunigung ändert, muß dies aber auch die Beschleunigung durch die Schwere an allen Orten der Erde sein, demnach allgemein die um die Centrifugalbeschleunigung verminderte und zu beobachtende Beschleunigung g

$$g = 9^m,78009 + 0^m,03368 - 0,03368 \cos^2 \varphi$$

$$g = 9^m,78009 + 0^m,03368 \cdot \sin^2 \varphi.$$

• Nach unserer obigen aus der Beobachtung abgeleiteten Formel ist der Koeffizient von $\sin^2 \varphi$ größer, so daß also die Beschleunigung g in der That stärker zunimmt, als sie es nur der Abnahme der Centrifugalkraft wegen thun würde.

Um aus der Beschleunigungsänderung die Abplattung zu berechnen, dient das Clairautsche Theorem¹⁾, nach welchem die Summe des Quotienten, aus der Beschleunigungsdifferenz am Pol und Äquator und der Beschleunigung am Äquator, und der Abplattung gleich dem Zweiundeinhalbfachen des Quotienten aus der Centrifugalbeschleunigung und der Beschleunigung durch die Schwere am Äquator ist, oder

$$\frac{\Delta g}{g_0} + e = 2,5 \frac{c}{g_0},$$

wenn Δg den Unterschied der Beschleunigung an dem Pole und am Äquator, g_0 die Beschleunigung am Äquator, e die Abplattung und c die an dem Äquator stattfindende Centrifugalbeschleunigung bedeutet. Wir erhalten daraus für die Abplattung

$$e = 2,5 \frac{c}{g_0} - \frac{\Delta g}{g_0}$$

oder, wenn wir die eben erhaltenen Zahlenwerte einsetzen,

$$e = 2,5 \frac{0,03368}{9,78009} - \frac{0,05080}{9,78009} = 0,003415 = \frac{1}{292}.$$

Man sieht, daß dieser aus den Pendelschwingungen unter Annahme, daß die nicht kugelförmige Anordnung der Erdmasse die Beschleunigung andere, berechnete Wert für die Abplattung sehr nahe mit dem durch geodätische Messungen erhaltenen übereinstimmt. Der Unterschied kann nicht auffallen, wenn man einerseits die Schwierigkeit der Messungen erwägt und andererseits bedenkt, daß die besondere Bodenbeschaffenheit eines Ortes auf die Pendelschwingungen von Einfluss ist.

§ 41.

Versuche von Cavendish. Daß die Bodenbeschaffenheit auf die Bewegung des Pendels von Einfluss ist, folgt direkt aus dem experimentellen Nachweis von Cavendish und Maskelyne, daß die einzelnen Körper auf der Erde anziehend auf einander wirken. Cavendish zeigte, daß eine große Bleimasse eine metallene Kugel anzieht, Maskelyne bewies, daß das Pendel in der Nähe großer Gebirge aus der Vertikalen abgelenkt wurde.

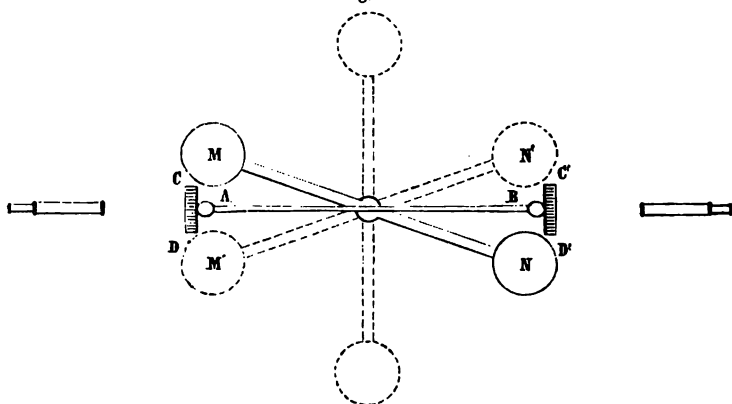
Beide Anziehungen sind gemessen und durch Vergleichung mit der Anziehung der Erde dann die Masse der Erde bestimmt. Beginnen wir mit den Versuchen von Cavendish, welcher dieselben mit folgendem von Michell konstruiertem Apparate anstellte.

Ein leichter und gleichmäßig gearbeiteter Hebel von Tannenholz AB (Fig. 49) ist in seiner Mitte an einem sehr feinen Metalldrahte horizontal aufgehängt, welcher an der Decke eines verschlossenen Zimmers befestigt ist. An seinen Enden trägt er zwei ganz gleiche Kugeln A und B und an diesen zwei mit einer Teilung versehene Elfenbeinblättchen CD und $C'D'$.

¹⁾ Clairaut, *Théorie de la figure de la terre*. Paris 1743. Das Theorem ergibt sich aus der Untersuchung, welche Gestalt die Erde annehmen mußte unter der Voraussetzung, daß die Erde früher eine flüssige Masse gewesen sei, und unter der Voraussetzung, daß nicht die ganze Masse der Erde homogen, sondern daß die Erde aus konzentrischen homogenen Schalen bestehe.

Faden und Hebel sind von einem hölzernen Gehäuse umgeben, um die Luftströmungen abzuhalten. Die Seiten desselben bei A und B sind von Spiegelglas, um die Theilungen CD und $C'D'$ beobachten zu können. Die Beobachtungen der Theilungen geschehen mittels zweier mit Fadenkreuz versehenen Fernrohre, welche den Theilungen gegenüber in der Mauer des Zimmers angebracht sind.

Fig. 49.



Untersuchen wir, ehe wir mit der Beschreibung des Apparates fortfahren, die Bedingungen, unter welchen dieser Hebel im Gleichgewicht ist. Wir werden dazu einige Lehren über die Elasticität der Körper benutzen müssen, welche wir in dem folgenden Abschnitte kennen lernen werden. Deren Richtigkeit wir demnach hier annehmen. Wenn wir den Hebel aus seiner Gleichgewichtslage ablenken, indem wir ihn um den Faden drehen, so erteilen wir dadurch auch dem Faden eine Drehung, die sich selbst, eine Torsion. Der Faden sucht, sich selbst überlassen, wieder aufzudrehen und übt dadurch ein Drehungsmoment auf den Hebel aus, den er wieder in seine Gleichgewichtslage zurückbringen will. Nehmen wir nun f die Kraft, welche wir in dem Abstände 1 von dem Faden an einem Hebel anbringen müssen, um ihn in der abgelenkten Lage zu erhalten, in welcher das Ende des Hebels von der Länge 1 um einen Bogen von der Länge 1 gedreht ist, so zeigt der Versuch, daß man eine Kraft f erhalten muß, um den Hebel um einen Bogen von der Länge A gedreht zu erhalten. Die Torsionskraft des Fadens ist also proportional der Drehung, welche wir dem Faden erteilt haben. In dem Apparate von Cavendish ist also die Kraft, mit welcher die Torsion des Fadens, den um einen mit Radius 1 beschriebenen Bogen von der Länge A gedrehten Hebel zurückführt, gleich einer im Abstände 1 von der Mitte angebrachten Kraft oder gleich einer Kraft $\frac{fA}{1}$ an dem Mittelpunkte der Kugel A angebracht.

Um die Kraft f zu messen, haben wir nur den Hebel in Bewegung setzen. Wir sehen dann, daß er in der Horizontalebene Oscillationen führt, welche alle eine gleiche Zeit dauern. Auf diese Oscillationen ohne weiteres unser Ausdruck für die Schwingungsdauer eines Pendels.

anzuwenden, da wir hier wie dort eine Kraft haben, welche nach den gleichen Gesetzen wirkt, deren Drehungsmoment um so kleiner wird, je näher der Hebel der Gleichgewichtslage kommt. Die das horizontale Pendel bewegende Kraft f greift im Abstände 1 von der Drehungsaxe an; in diesem Abstände ersetzt eine Masse $2ml^2$ die beiden im Abstände l befindlichen Kugeln, deren jede die Masse m hat. Wenn wir die Masse des Stabes als sehr klein vernachlässigen¹⁾, wird somit nach § 32 die Schwingungsdauer t des Pendels:

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{2ml^2}{f}}.$$

Setzen wir anstatt $m = \frac{p}{g}$, worin p das Gewicht jeder Kugel bedeutet, und lösen unsere Gleichung nach f auf, so wird

$$f = \frac{2\pi^2 p \cdot l^2}{g \cdot t^2}.$$

Sind demnach p und l bekannt, so bedarf es, um die Gröfse der Kraft f zu messen, nur den Hebel in Schwingungen zu versetzen und die Schwingungsdauer zu beobachten. Kennt man f , so kann man leicht die Gröfse der Kraft erhalten, die an A anzubringen ist, um den Hebel im Gleichgewicht zu halten, wenn man ihn um irgend einen Bogen aus seiner ursprünglichen Lage, in welcher der Draht ohne Torsion ist, gedreht hat. Sei er z. B. so gedreht, dafs statt des Teilstriches o der Teilung CD oder $C'D'$ der Teilstrich n in der Visierlinie des Fernrohrs einsteht; ist der Abstand zweier Teilstriche gleich α , so ist der Bogen A , welchen der um die Länge 1 von der Axe entfernte Punkt durchlaufen hat,

$$A = \frac{n\alpha}{l}$$

und die an A anzubringende der Torsionskraft gleiche Kraft

$$\frac{f \cdot A}{l} = \frac{fn\alpha}{l^2},$$

oder, indem wir für f den eben gefundenen Wert einsetzen,

$$\frac{fn\alpha}{l^2} = \frac{2\pi^2\alpha}{g} \cdot \frac{pn}{t^2}.$$

Wir können diese Kraft halbieren und die eine Hälfte in A , die andere in B so angreifen lassen, dafs sie der Torsionskraft des Fadens gerade so entgegenwirken wie die eine im Punkte A angebrachte Kraft f ; auch dann ist das System im Gleichgewicht. Bezeichnen wir jede dieser Hälften mit F , so ist

$$F = \frac{\pi^2\alpha}{g} \cdot \frac{pn}{t^2}.$$

In dem Apparate von Cavendish war die Konstante $\frac{\pi^2\alpha}{g} = \frac{1}{818}$, so dafs demnach

$$F = \frac{1}{818} \cdot \frac{pn}{t^2}.$$

¹⁾ Genauer würde man in der § 32 angedeuteten Weise das Trägheitsmoment des ganzen Horizontalpendels bestimmen. Den vollständigen Beweis für die Richtigkeit der oben durchgeführten Rechnung liefert § 51.

Wenn also durch Drehung des Hebels dem Faden eine Torsion erteilt ist, so wird durch die Torsionskraft dem System ein Drehungsmoment erteilt, welches es in die Gleichgewichtslage zurückzudrehen strebt, und welches gleich ist dem Drehungsmomente, welches zwei Kräfte ihm erteilen würden, deren eine an A , deren andere an B angebracht ist, und deren jede die Gröfse $F' = \frac{1}{818} \cdot \frac{p n}{l^2}$ besitzt. Kennt man daher das Gewicht p und hat die Anzahl Teilstriche n , um welche das System gedreht ist, mittels der Fernrohre beobachtet und früher die Schwingungsdauer bestimmt, so kann man diese Kräfte durch Rechnung erhalten.

Es befinden sich an dem Apparate von Cavendish zwei große Bleikugeln M und N , jede 158 Kilogramm schwer. Dieselben sind an den Enden eines drehbaren Stabes befestigt, der von aussen gedreht wird, ohne dafs der Beobachter in das zu den Versuchen bestimmte Zimmer eintritt. Man kann den Stab senkrecht zu AB stellen und ihm die Lage MN und $M'N'$ geben, die symmetrisch sind zu der Gleichgewichtslage von AB , und in denen der Stab festgestellt werden kann. Sind die Kugeln in der ersten Lage, so affizieren sie den Hebel nicht; beide Kugeln ziehen sowohl A als B ganz gleichmäfsig an und können ihnen daher keine Bewegung erteilen. Der Beobachter liest die Stellung der Teilung ab und notiert sie als die Gleichgewichtslage des Hebels. Darauf bringt man die Kugel in die Lage MN . Jetzt zieht M die Kugel A und N die Kugel B an; der Hebel dreht sich und erreicht eine zweite Gleichgewichtslage, wenn die Anziehung von M auf A und N auf B gleich ist den Kräften F' , mit denen die Torsionskraft des Fadens den Hebel zurückzudrehen sucht. Man beobachtet mit Hülfe der Fernrohre die Anzahl n der Teilstriche, um welche die Kugeln A und B abgelenkt sind, und berechnet dann die beiden Kräfte F oder die diesen gleichen Anziehungen der großen Kugeln auf A und B mittels der Formel

$$F = \frac{1}{818} \cdot \frac{p n}{l^2}.$$

Zur Zeit, als man die Kugeln in die Lage MN gebracht hatte, war der Abstand der Mittelpunkte von A und M oder B und N gleich D . Ist in der neuen Lage das Gleichgewicht eingetreten, so ist der Abstand dann $D' = D - n\alpha$. Ist D' bestimmt, so kennen wir die zwischen den Kugeln thätigen anziehenden Kräfte F' und den Abstand D' der Schwerpunkte der Kugeln, in dem diese Kräfte wirksam sind. Darauf macht man noch eine zweite Messung, indem man die Kugeln in die Lage $M'N'$ bringt, und nimmt schliefslich aus den in beiden Fällen berechneten Werten von F' und den beobachteten Abständen D' das Mittel, um dann folgendermafsen aus diesen Daten das Gesamtgewicht P' der Erde und ihre mittlere Dichtigkeit zu berechnen.

Da die Anziehung der Kugel M auf A im Abstände D' gleich F ist, so würde sie in einem der Einheit gleichen Abstände $F \cdot D'^2$ sein; nennen wir andererseits die Anziehung der Gewichtseinheit auf die Kugel A in der Abstandseinheit φ , so ist die dem Gewichte P der Kugel M proportionale Anziehung der ganzen Kugel M gleich $P \cdot \varphi$. Wir haben demnach

$$F \cdot D'^2 = P \cdot \varphi.$$

Die Anziehung der Erde auf die Kugel A ist an der Oberfläche der Erde, also im Abstände R von dem anziehenden Mittelpunkt gleich dem Gewichte p dieser Kugel. Nennen wir P' das Gewicht der Erde und geben φ dieselbe Bedeutung wie vorhin, so haben wir ebenfalls

$$p \cdot R^2 = P' \cdot \varphi$$

und erhalten aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{F}{p} = \frac{P \cdot R^2}{P' \cdot D'^2},$$

und wenn wir den für F' vorhin erhaltenen Wert einsetzen,

$$\frac{F}{p} = \frac{1}{818} \cdot \frac{n}{t^2} = \frac{P \cdot R^2}{P' \cdot D'^2}.$$

In dieser Gleichung sind n , t , D' durch die Beobachtung gegeben, P ist das Gewicht der Kugel $M = 158$ Kilogr., R ist der Radius der Erde, man hat daher in lauter bekannten Größen für das Gewicht P' der Erde

$$P' = \frac{818 \cdot P \cdot R^2 \cdot t^2}{n \cdot D'^2}.$$

Bezeichnen wir die mittlere Dichtigkeit der Erde mit d , so ist P' gleich dem Produkte aus dem Volumen der Erde und der mittlern Dichtigkeit

$$P' = \frac{4}{3} \pi R^3 d$$

und demnach schliesslich

$$d = \frac{613,5 \cdot P t^2}{\pi R n D'^2}.$$

Wir müssen in Bezug auf die Versuche noch einen Umstand hinzufügen, den wir, um den Gang der Entwicklungen nicht zu unterbrechen, übergangen haben. Wir sahen, daß wir, um n zu erhalten, zweimal den Stand der Theilungen CD , $C'D'$ beobachten mußten, einmal in der Gleichgewichtslage des Stabes AB vor der Einwirkung der Kugeln, dann in der durch die Anziehung der Kugeln bedingten Gleichgewichtslage. Cavendish fand nun, daß der Stab AB niemals in Ruhe war, sondern stets um die Gleichgewichtslage, welche er hätte einnehmen müssen, Schwingungen vollführte. Man konnte daher die Stellung des Stabes in der Gleichgewichtslage nicht direkt bestimmen, sondern nur, indem man das Mittel aus den äußersten Lagen nahm, welche er bei diesen Schwingungen zur Rechten und Linken der Gleichgewichtslage erreichte.

Cavendish wandte zu seinen Versuchen zwei Drähte an. Bei Anwendung des ersten, sehr feinen, war die beobachtete Schwingungsdauer $t = 14$ Minuten und die Zahl n der Teilstriche, um welche der Stab nach Einwirkung der Kugeln abgelenkt wurde, $n = 16$. In dem zweiten Falle, bei sehr viel dickerem Drahte, war $t = 7$ Minuten, $n = 5,7$. Mit beiden Drähten erhielt er für d den gleichen Wert

$$d = 5,48.$$

Die mittlere Dichtigkeit der Erde ist demnach $5\frac{1}{2}$ mal größer als die des Wassers.

In späterer Zeit wurden die Versuche zunächst von Reich in Freiberg wiederholt im Jahre 1837. Er fand in der letzten Berechnung dieser Ver-

suche im Jahre 1851 denselben Wert wie Cavendish $d = 5,49$. Später unternahm Baily zu London im Auftrage der königlichen Astronomischen Gesellschaft eine große Reihe von Versuchen und erhielt nach Korrektur einiger Fehler als Mittel aus mehr als 2000 Versuchen $d = 5,67$, also etwas größer wie Cavendish. Darauf bestimmte Reich 1852 nochmals den Wert von d und fand ihn gleich 5,5832. Cornu und Baille erhielten nach derselben Methode bei zwei Versuchsreihen einmal den Wert 5,56, das andere Mal 5,55.

Jolly hat das Verfahren von Cavendish in der Weise modifiziert, daß er direkt die Wage benutzte, um die Anziehung einer großen Masse auf eine andere zu messen. Unter der einen Wagschale der in § 39 beschriebenen Wage, auf dem Boden des Turmes wurde aus passend geformten Bleibarren eine Bleikugel von 1^m Durchmesser aufgebaut, so daß der Mittelpunkt der Kugel vertikal unter dem Aufhängedraht der Wagschale sich befand. Es wurde dann genau wie in § 39 verfahren, es wurde die mit Quecksilber gefüllte Glaskugel oben abgewogen, dann die Kugel nach unten gebracht, so daß sich ihr Mittelpunkt vertikal über dem Mittelpunkte der Bleikugel befand, und nun das Zulagegewicht bestimmt, welches erforderlich war, um die Wage wieder ins Gleichgewicht zu bringen. Dieses Zulagegewicht war größer als in dem § 39 betrachteten Falle, weil jetzt außer der Vermehrung der Schwere die Anziehung der Bleikugel auf das Quecksilber zur Wirksamkeit kam. Ist r der Radius der Bleikugel, δ deren Dichtigkeit, a der Abstand des Mittelpunktes des Quecksilbers von den Mittelpunkte der Bleikugel, so ist die Beschleunigung, welche das Quecksilber gegen den Mittelpunkt der Bleikugel erfährt,

$$\gamma_1 = \frac{4}{3} \pi f r^3 \delta \frac{1}{a^2}.$$

Für die Beschleunigung, welche das Quecksilber von der Erde erhalten wir § 39

$$g' = \frac{4}{3} \pi f d R \left(1 - 2 \frac{h}{R} + \frac{3 \sigma' h}{2 d R} \right),$$

wenn wir jetzt entsprechend der in diesem Paragraphen gewählten Bezeichnung die mittlere Dichtigkeit der Erde mit d bezeichnen. Wie wir sahen ist der in der Klammer stehende Ausdruck, wenn wir $\sigma' = 0,5 d$ setzen gleich 0,99989, wir können dafür ohne weiteres 1 setzen, da in den hier zu berechnenden Decimalen der Unterschied ganz ohne Einfluß ist. Das wird

$$\frac{\gamma_1}{g'} = \frac{r^3 \delta}{R d a^2} = \frac{q}{Q},$$

wenn wir mit q das nach Anbringen der Bleikugel erforderliche Zulagegewicht, mit Q das Gewicht des Quecksilbers bezeichnen. Damit wird

$$d = \delta \frac{r^3 Q}{R a^2 q}.$$

Die Versuche ergaben, daß nach Anbringen der Bleikugel zur Herstellung des Gleichgewichtes 0,589^{mg} mehr erforderlich waren als ohne sie, es ist somit

$$q = 0,589^{\text{mg}}.$$

Wie wir § 39 bereits angaben, war

$$Q = 5009450^m$$

$$R = 6365722^m.$$

Den Durchmesser der Bleikugel ergaben direkte Messungen zu $0,995^m$, somit ist

$$r = 0,4975.$$

Der Abstand a des Mittelpunktes der Quecksilberkugel von dem Mittelpunkte der Bleikugel ist gleich r plus dem Halbmesser der Quecksilberkugel plus dem Abstände der beiden Oberflächen. Ersterer war $0,0445^m$, letzterer $0,0266^m$; es ist somit

$$a = 0,5686^m.$$

Zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit δ der Bleikugel wurde das Gewicht der aus 115 Stücken zusammengesetzten Kugel bestimmt und durch das Volumen der Kugel dividiert. Es ergab sich in dieser Weise

$$\delta = 11,186.$$

Durch Einsetzen dieser Zahlenwerte ergibt sich

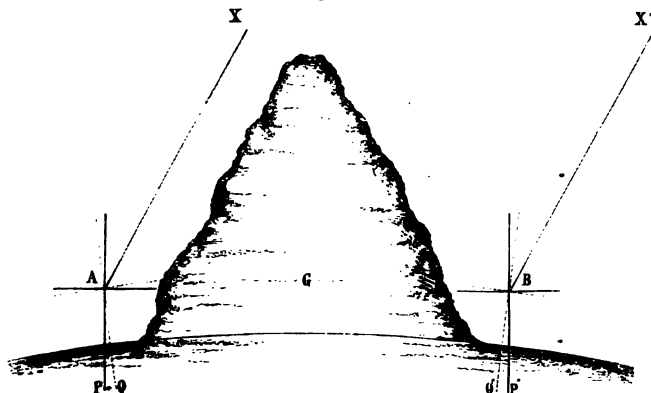
$$d = 5,692$$

mit einer Unsicherheit von $\pm 0,068$, so daß nach diesen Versuchen die mittlere Dichtigkeit der Erde mindestens 5,624 und höchstens 5,760 wäre. Der von Jolly erhaltene Wert ist dem von Baily erhaltenen fast gleich; als Mittel aller Versuche würde sich rund 5,6 ergeben.

§ 42.

Versuche von Maskelyne. Es gibt noch eine zweite Methode, um die Anziehung der einzelnen Teile der Erde auf Körper zu messen und

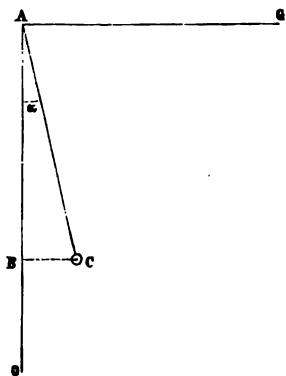
Fig. 50.



aus die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen, nämlich die Beobachtung der Ablenkung des Lotes durch große Gebirgsmassen. Die ersten Versuche derart wurden von Bouguer gemacht; sie wiesen jedoch nach, daß das Lot wirklich abgelenkt wird, ohne daß sie messend ver-

folgt werden konnten. Dieses gelang zuerst Maskelyne, der an der Bergkette Shehallien in Portshire in Schottland mit großer Sorgfalt eine Reihe von Messungen ausführte. Der Shehallien ist ein isolierter von West nach Ost sich erstreckender Gebirgszug, dessen geognostische Zusammensetzung bekannt ist, und der eine einfache Form hat. Man konnte daher sein Volumen, sein Gewicht und die Lage seines Schwerpunktes berechnen. Maskelyne wählte nun zwei Stationen *A* und *B* (Fig. 50), die nördlich und südlich von dem Berge in einer durch den Schwerpunkt desselben gehenden Ebene und auf demselben Meridiane lagen. Zunächst wurde die Polhöhe beider Orte bestimmt. Wenn der Gebirgszug nicht vorhanden gewesen wäre, so hätten die beiden Lote *AP* und *BP* einen Winkel mit einander gebildet, der gleich der Breitendifferenz der beiden Orte ist. Die Anziehung der zwischen beiden Orten liegenden Gebirgsmassen bewirkt nun, daß die Richtung der Lote *AQ* und *BQ'* wird, oder daß die Richtung der Horizontalen gegen den Berg hin sich erhebt und die Polhöhe in *B* vermehrt, in *A* vermindert ist. Man mißt daher die Polhöhe und leitet daraus für jede Station die Ablenkung des Lotes her, indem man von dem Unterschiede der Polhöhen die vorher bestimmte Breitendifferenz abzieht.

Fig. 51.



Wirkt nun an einer der Stationen (Fig. 51)

z. B. *A* die Anziehung der Erde nach *AO* mit einer Kraft gleich $\frac{P'\varphi}{R^2}$, so wirkt daneben die Anziehung des Berges in der Richtung *AG*, die wir als horizontal voraussetzen, mit einer Kraft gleich $\frac{P \cdot \varphi}{D^2}$, wenn wir mit *P* das Gewicht des Berges und mit *D* den Abstand seines Schwerpunktes vom Orte *A* bezeichnen. Das Lot ist demnach von zwei auf einander senkrechten Kräften angegriffen, es wird sich in die Richtung des Resultierenden *AC* stellen und mit *OA* einen Winkel α bilden, der gleich ist der beobachteten Ablenkung des Lotes. Man hat daher

$$\frac{P'\varphi}{R^2} : \frac{P\varphi}{D^2} = AB : CB, \quad \frac{CB}{AB} = \tan \alpha$$

und daher

$$\tan \alpha = \frac{\frac{P}{D^2}}{\frac{P'}{R^2}} = \frac{PR^2}{P'D^2}.$$

Setzen wir wieder

$$P' = \frac{4}{3} R^3 \pi d,$$

so wird

$$d = \frac{0,75 P}{\pi R \cdot D^2} \cdot \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Maskelyne erhielt aus dem von Hutton bestimmten Gewicht *P* des Berges und dem Abstände *D* des Schwerpunktes vom Pendel für *d* eine Zahl, die nahe gleich 5 war, ein Resultat, welches die Versuche von Cavendish und Reich bestätigt, da auf diese Weise nicht die Genauigkeit erreicht werden kann, wie nach der vorigen Methode.

§ 43.

Methode von Airy. Noch eine dritte Methode gibt es, um den Nachweis der Massenanziehung an den einzelnen Teilen der Erde zu liefern und die Dichtigkeit der Erde zu bestimmen, welche der englische Astronom Airy angewandt hat. Dieselbe beruht darauf, daß der Wert der Beschleunigung in anderer wird, wenn man unter die Erdoberfläche hinabsteigt. Um zu übersehen, in welcher Weise diese Veränderung von g stattfindet, denken wir uns die Erde zerlegt in eine Kugelschale von der Dicke x , der Tiefe der durchsunkenen Schicht, und eine Kugel vom Radius $R_1 = R - x$.

Auf einen an der Oberfläche befindlichen Körper wirkt nun sowohl die Anziehung der innern Kugel als auch der Kugelschale gerade so, als wäre die Masse beider im Mittelpunkte vereinigt, also so, als befände sich die Masse M_1 der innern Kugel und die Masse M_2 der Schale im Abstände R von dem angezogenen Körper.

Anders jedoch, wenn wir uns auf die Oberfläche der Kugel mit dem Radius R_1 begeben, also die Schicht x hinabsteigen. Die Kugel mit dem Radius R_1 wirkt nach dem Anziehungsgesetz, da der Körper sich außerhalb derselben befindet, so, als wäre ihre ganze Masse M_1 im Mittelpunkte, also in der Entfernung R_1 vom angezogenen Körper vereinigt. Die Anziehung der Kugelschale x muß aber eine andere sein, da der Körper sich im Innern derselben befindet. Wir können nun leicht nachweisen, daß eine Hohlkugel auf einen in ihrem Innern befindlichen Körper gar keine Anziehung ausübt, wenn die Schale aus homogenen konzentrischen Schichten besteht; und daraus folgt dann, daß in der Tiefe x unter der Erdoberfläche auf den Körper nur die Masse der innern Kugel aus der ihrem Radius gleichen Entfernung R_1 einwirkt.

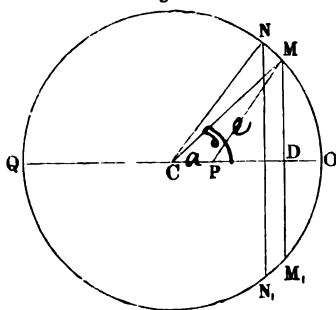
Stelle, um diesen Nachweis zu führen, der Kreis (Fig. 52) einen Durchschnitt durch eine dünne Schicht der Kugelschale vor, und der Punkt P liege im Innern derselben, im Abstände a vom Mittelpunkte. Legen wir nun gerade wie in § 39 durch die Kugelschale zwei zu CP senkrechte unendlich nahe Schnitte MM_1 und NN_1 , so erhalten wir für die Anziehung dieser Kugelzone auf den Punkt P , indem wir genau dieselbe Entwicklung wie in § 39 anwenden, auch identisch denselben Ausdruck, nämlich, unter Benutzung derselben Zeichen,

$$f \cdot \frac{\pi \cdot r \cdot \delta \cdot \sigma m}{a^2} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2} \right) de.$$

Um die Anziehung der ganzen Kugelschale zu erhalten, müssen wir auch in diesem Ausdrucke für e alle möglichen Werte einsetzen und die Summe aller einzelnen Ausdrücke bilden. Die äußersten Werte, welche e annehmen kann, sind aber hier nicht $a - r$ und $a + r$, sondern $PO = r - a$ und $PQ = r + a$. Summieren wir nun genau so wie im § 39, so wird damit die Summe jetzt

$$\int_{r-a}^{r+a} \left(1 + \frac{a^2 - r^2}{e^2} \right) de = (r + a) - (r - a) + \left(\frac{a^2 - r^2}{r - a} - \frac{a^2 - r^2}{r + a} \right) = 0.$$

Fig. 52.



Da diese Summe gleich Null ist, so folgt also, daß eine solche Schicht auf einen in ihrem Innern liegenden Punkt gar keine Anziehung ausübt, und damit, daß überhaupt eine aus konzentrischen homogenen Schichten bestehende Kugelschale einen in ihrem Innern liegenden Punkt gar nicht anzieht.

Es folgt somit, daß der in der Tiefe x unter der Erdoberfläche befindliche Körper nur von der innern Kugel, deren Radius $R_1 = R - x$ ist, angezogen wird. Suchen wir nun zunächst, wie sich die Beschleunigungen in der Tiefe und an der Erdoberfläche verhalten müssen.

Die Beschleunigung, welche die innere Kugel an ihrer Oberfläche erteilt, sei g_1 . Die Beschleunigung an der Erdoberfläche ist dann gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die innere Kugel an der Erdoberfläche, also im Abstände R von dem anziehenden Mittelpunkte erteilt, und welche die Kugelschale von der Dicke $x = R - R_1$ an ihrer Oberfläche erteilt.

Die Beschleunigung g'_1 , welche die innere Kugel an der Erdoberfläche erteilt, ist nach dem Anziehungsgesetz

$$g'_1 = g_1 \cdot \frac{R_1^2}{R^2}.$$

Bezeichnen wir die Beschleunigung an der Erdoberfläche wie immer mit g , so gibt uns die Differenz

$$g - g'_1$$

die Anziehung, welche die äußere Schale allein auf einen an ihrer äußern Oberfläche befindlichen Körper ausübt.

Die Anziehungen der äußern Schale sowohl als des innern Kernes geschehen so, als wären die ganzen Massen in ihrem Mittelpunkte vereinigt; sie sind daher proportional diesen Massen selbst oder den Produkten aus deren Volumen V und V_1 und ihren Dichtigkeiten D und D_1 . Wir haben demnach

$$g - g'_1 : g'_1 = VD : V_1 D_1$$

und, indem wir für g'_1 seinen Wert einsetzen,

$$\frac{g - g_1 \frac{R_1^2}{R^2}}{g_1 \frac{R_1^2}{R^2}} = \frac{VD}{V_1 D_1} = \frac{\frac{4}{3}(R^3 - R_1^3)\pi D}{\frac{4}{3}R_1^3\pi D_1} = \frac{R^3 - R_1^3}{R_1^3} \cdot \frac{D}{D_1}$$

$$g \frac{R^2 - g_1 R_1^2}{g_1 R_1^2} = \frac{R^3 - R_1^3}{R_1^3} \cdot \frac{D}{D_1},$$

ein Ausdruck, den man leicht auf die Form

$$\frac{g}{g_1} = \frac{R_1^2}{R^2} + \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 R_1} \cdot \frac{D}{D_1} = \frac{R_1^2}{R^2} \left\{ 1 + \left(\frac{R^3}{R_1^3} - 1 \right) \frac{D}{D_1} \right\}$$

bringen kann, und der zu erkennen gibt, daß das Verhältnis der Beschleunigung an der Oberfläche und in der Tiefe abhängig ist von dem Verhältnis der Dichten der äußern Schale und in der Tiefe. Derselbe zeigt aber gleichzeitig, daß wenn man g_1 , R_1 und D beobachtet, D_1 sich berechnen läßt.

Hierauf gestützt, stellte Airy zwei Pendel auf, eines an der Erdoberfläche, eines auf dem Boden des Bergwerkes von Harton in einer Tiefe von 383 Meter. Jedes war, wie bei den Bordaschen Versuchen, vor einer

astronomischen Uhr aufgehängt. Man beobachtete die Oscillationen mittels der Methode der Koincidenzen und bestimmte ihre Dauer durch die Angaben der Uhr. Wenn nun aber die Veränderung der Schwere die Dauer einer Oscillation des Pendels verändert, so ist klar, daß sie auch den Gang der Uhr ändert. Es war deshalb notwendig, den Gang der untern Uhr mit dem der obern zu vergleichen; das geschah mittels elektrischer Signale, welche sich augenblicklich fortpflanzten, und durch die man die Zeitangabe der untern Uhr korrigierte.

Die Beobachtung ergab, daß die Beschleunigung durch die Schwere auf dem Boden des Bergwerkes $\frac{1}{19190}$ größer war, oder daß

$$\frac{g_1}{g} = 1,000052$$

war, ein Resultat, aus welchem sich ergibt, daß D_1 bedeutend größer sein muß als D . Denn wäre das nicht der Fall, so müßte die Schwere in der Tiefe kleiner werden, wäre etwa $D = D_1$, so ergibt sich

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R_1}{R};$$

die Schwere müßte in demselben Verhältnisse abnehmen, als der Radius der innern Kugel kleiner ist wie der Radius der Erde.

Indem man den Inhalt des Bodens über dem Schachte untersucht, erhält man die mittlere Dichtigkeit der Schale in der Nähe des Ortes, wo die Versuche angestellt wurden. Dieselbe ergab sich zu 2,75. Airy setzt nun diese Dichtigkeit als die mittlere Dichtigkeit der Kugelschale ein, was man ohne merklichen Fehler thun darf, wenn auch die Kugelschale nicht vollständig homogen ist, da die nähern Massen vorwiegend einwirken. Die Bestimmungen Airys ergaben ferner, daß, die Tiefe des Hartoner Schachtes gleich 1 gesetzt,

$$R = 16621,7 \text{ und deshalb } R_1 = 16620,7.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung für D_1 ein, so erhält man

$$D_1 = 6,566,$$

so daß also die Dichtigkeit des innern Kernes, oder da die Masse der obern Schale gegen die des innern Kernes verschwindend klein ist, die mittlere Dichtigkeit der Erde ungefähr 6,5 mal so groß als die des Wassers wäre.

Gegen die Berechnung Airys hat Haughton den Einwurf gemacht, daß Airy die Dichtigkeit der Erdrinde erheblich zu hoch genommen habe, da der größere Teil des Harton-Schachtes unter dem Niveau des Meeres liege, er leitet deshalb als mittlere zur Berechnung in Betracht zu ziehende Dichtigkeit der Erdrinde die Zahl 2,059 ab. Mit dieser Zahl ergibt sich

$$D_1 = 5,480,$$

also dem mit der Drehwage und dem von Jolly gefundenen Werte sehr nahe gleich.

Nehmen wir für die Dichtigkeit der Erde das Mittel aus den gefundenen Zahlen oder rund 5,6, so sind wir dadurch schließlich imstande, die Anziehungen zu berechnen, welche zwei der Einheit gleiche Massen auf einander aus der Einheit der Entfernung ausüben. Bezeichnen wir die

Masse der Erde mit M , so gibt uns das Anziehungsgesetz für die Zahl g die Gleichung

$$g = f \cdot \frac{M}{R^2},$$

worin f wie früher die Anziehung der beiden Masseneinheiten aus der Entfernungseinheit bedeutet; demnach ist

$$f = g \cdot \frac{R^2}{M},$$

oder, indem wir für M seinen Wert setzen,

$$f = g \cdot \frac{R^2}{\frac{4}{3} R^3 \pi \cdot d} = 0,75 \cdot g \cdot \frac{1}{R \pi d}.$$

Hierin ist d die Masse der Volumeinheit, somit wenn wir die Länge in Metern einführen, die Masse eines Kubikmeters. Da das Kubikmeter 1000 Kubikdecimeter hat und wir die Dichtigkeit der Erde gleich 5,6 setzen, so wird $d = \frac{5600}{g}$; $R \pi$ ist der halbe Umfang der Erde, somit gleich 20 000 000. Für g setzen wir den der Breite 45° entsprechenden Wert unter der Voraussetzung, daß die Erde nicht rotiert, dann wird mit $g = 9,82236$

$$f = \frac{0,75 \cdot g^2}{R \pi \cdot 5600} = 0,000\,000\,000\,646 = 6,46 \cdot 10^{-10}.$$

Die Zahl gibt uns in Metern die Beschleunigung, welche zwei Massen von je g Kilogramm im Abstände von 1 Meter einander erteilen, oder in Kilogrammen den Zug, den diese Massen auf einander ausüben.

§ 44.

Ebbe und Flut. Eine wichtige Erscheinung an unserer Erdoberfläche, hervorgehend aus der allgemeinen Massenanziehung und zwar aus der Anziehung des Mondes und der Sonne, ist das täglich zweimalige Steigen und Fallen des Wassers in den großen Meeren. Wir müssen uns hier begnügen, die Erscheinung in ihren Grundzügen zu erklären.

Die Anziehung, welche der Mond auf die verschiedenen Punkte der Erde ausübt, ist verschieden, da dieselben von dem Monde verschieden entfernt sind. Ziehen wir z. B. durch den Mittelpunkt der Erde eine gerade Linie gegen den Mond, so ist der Mittelpunkt der Erde von dem des Mondes um 60, der Punkt, in welchem die dem Monde zugewandte Erdhälfte von der Geraden getroffen wird, um 59, der entsprechende Punkt auf der abgewandten Erdhälfte 61 Erdradien entfernt. Nennen wir die Anziehung des Mondes auf die Masseneinheit in der Entfernungseinheit f , den Abstand des Erdmittelpunktes vom Monde d und den Radius der Erde R , so erhalten wir für die Anziehung auf jene drei Punkte respektive

$$\frac{f}{d^2} \cdot \cdot \cdot \frac{f}{(d-R)^2} \cdot \cdot \cdot \frac{f}{(d+R)^2}$$

und als die Differenzen zwischen den beiden letzten und der ersten Größe

$$\pm \frac{2f \cdot R}{d^3},$$

wenn wir die Glieder der Differenzen, in denen höhere Potenzen von d als die dritte vorkommen, vernachlässigen. Um diese GröÙe wird also der dem Monde zugewandte Punkt der Erdoberfläche stärker, der vom Monde abgewandte Punkt schwächer angezogen als der Mittelpunkt der Erde.

Wäre die ganze Erde fest, kein Punkt derselben gegen die anderen verschiebbar, so würden diese Differenzen durch die festen Verbindungen so übertragen werden, daß dadurch nur ein Zug auf den Mittelpunkt der Erde entstände. Nun ist aber ein großer Teil der Erde mit Wasser bedeckt, dessen einzelne Teile gegen einander und gegen die festen Teile der Erde frei beweglich sind. Das Wasser wird daher infolge dieser verschiedenen Anziehungen eine Bewegung annehmen müssen, und zwar wird es, wenn jene Linie zum Beispiel die Erdoberfläche an beiden Punkten im Meere schneidet, sich an beiden Punkten erheben und dafür an den zwischenliegenden fallen müssen. Da nämlich an der dem Monde zugewandten Seite das Wasser stärker, an der vom Monde abgewandten Seite schwächer angezogen wird als der Mittelpunkt der Erde, so ist das gerade so, als wenn an beiden Punkten eine der Schwere entgegengesetzte Kraft von der GröÙe jener Differenz angebracht wäre, wie sich leicht durch folgende Betrachtung anschaulich machen läßt

Man habe drei Punkte A, C, B ; die Punkte A und B werden jeder durch eine Kraft gleich 10, um ein Zahlenbeispiel zu wählen, gegen C hingezogen. Nun seien ferner an den drei Punkten nach gleicher Richtung, z. B. nach rechts hin, folgende Kräfte angebracht: an B die Kraft 3, an C die Kraft 2 und an A die Kraft 1. Diese Punkte befinden sich gewissermaßen in denselben Verhältnissen wie unsere vorhin betrachteten Punkte auf der Erde. In dem Verhältnis der drei Punkte zu einander wird nun nichts geändert, wenn wir von jedem derselben die nach rechts hin ziehende Kraft 2 fortnehmen. Dadurch ist der Punkt C wieder wie anfangs von keiner Kraft afficiert. Am Punkte B bleibt aber die Kraft 1 nach rechts hin, also vom Punkt C fortziehend übrig. An A zog ursprünglich die Kraft 10 gegen C nach rechts, es trat dann noch die Kraft 1 hinzu, später aber nahmen wir die Kraft 2 wieder fort; es bleibt also nur die Kraft 9 nach C hinziehend übrig, oder da wir uns statt der Kraft 9 die Kraft 10 nach C hin und die Kraft 1 von C fortziehend denken können, so folgt, daß durch Anbringen jener Kräfte auch bei A gleichsam eine von C fortziehende Kraft entsteht, welche gleich ist der Differenz der von C und A nach rechts hin wirkenden Kräfte.

So also auch bei der Erde. Durch Anziehung des Mondes entsteht an den unter dem Monde und den ihm gegenüber an der andern Seite der Erde liegenden Punkten gleichsam eine das Wasser vom Mittelpunkte der Erde fortziehende Kraft.

Das Wasser muß also dort steigen und dafür an den mitten zwischen beiden liegenden Punkten der Erde fallen. Dadurch müssen also zwei, an diametral gegenüberliegenden Stellen der Erde sich bildende Flutwellen entstehen, deren jede, da die Erde sich in 24 Stunden von Westen nach Osten um ihre Axe dreht, die Erde in 24 Stunden von Osten nach Westen umkreisen muß.

In den Meeren muß also täglich zweimal Flut und Ebbe entstehen, so daß sie jeden Tag den Mond einmal im Zenith, einmal im Nadir haben.

Wegen der Eigenbewegung des Mondes in seiner Bahn jedoch, wodurch der Durchgang durch einen bestimmten Meridian täglich um 50 Minuten verzögert wird, verzögert sich auch der Eintritt von Ebbe und Flut jeden Tag um ebensoviel.

Ebenso wie der Mond erzeugt auch die Sonne Ebbe und Flut, jedoch viel schwächer, wie man sofort erkennt, wenn man in unsern Ausdruck $\frac{2fR}{d^3}$, der uns die von dem Mittelpunkte fortziehende Kraft angibt, die der Sonne entsprechenden Größen einsetzt. Bezeichnet M die Masse der Sonne und m die Masse des Mondes, so haben wir statt f der Anziehung des Mondes in der Abstandseinheit $f \cdot \frac{M}{m}$ zu setzen, und anstatt d die Entfernung der Sonne von der Erde $d = 400 d$, da die Sonne 400mal weiter von uns entfernt ist als der Mond. Die Masse der Sonne M ist 355 000mal größer als die Erde und die der Erde gleich 88 m , also 88mal größer als die des Mondes. Wir haben demnach für die Differenz der Sonnenanziehung

$$\frac{2fR \cdot 355\,000 \cdot 88}{d^3 \cdot 400^3},$$

also ungefähr die Hälfte des Unterschiedes der Mondanziehung auf die entsprechenden Punkte der Erde. Die Sonnenflut wird daher auch nur die halbe Höhe der Mondflut haben. Durch die vereinte Wirkung von Sonne und Mond wird nun die Fluthöhe entweder vergrößert oder verkleinert. Stehen Sonne und Mond an der gleichen Seite der Erde, zur Zeit des Neumondes, oder an der entgegengesetzten, zur Zeit des Vollmondes, so verstärken sie die Fluten, es treten die sogenannten Springfluten ein. Zur Zeit der Quadraturen, also des ersten und letzten Viertels tritt Sonnenflut und Mondebbe an der gleichen Stelle auf und umgekehrt; die Fluten sind dann als Nippfluten die kleinsten.

Durch die verschiedenen Tiefen des Meeres und die Konfiguration des Festlandes wird der Verlauf der Fluten sowie das Gesetz ihrer Änderung ein äußerst verwickeltes, welches jedoch La Place in grosser Vollständigkeit gelöst hat. Wir müssen uns hier begnügen, darauf hingewiesen zu haben.

Litteratur des ersten Abschnittes.

Die bisher vorgetragenen Lehren sind grösstenteils so vielfach behandelt und in vortrefflichen Werken zusammengestellt, dass eine Angabe der Originalquellen teils zu weit führen würde, teils nur ein geschichtliches Interesse hat. Wir verweisen daher in Betreff der genauern Kenntnis der einzelnen Lehren auf die vielen vorzüglichen Lehrbücher der Mechanik, von denen wir folgende namhaft machen.

1. *Briz, A. F.*, Lehrbuch der Statik fester Körper. Berlin, 1849.
2. *Broch, O. J.*, Lehrbuch der Mechanik. Berlin und Christiania, 1854.
3. *Burg, A.*, Kompendium der populären Mechanik und Maschinenlehre. 2. A. Wien, 1849.
4. *Delannay, Ch.*, Cours de Mécanique rationelle. 2. éd. Paris, 1857.
5. *Duhamel*, Lehrbuch der analytischen Mechanik. Deutsch v. Dr. O. Schömilch. 2. A. Leipzig, 1858.

6. *C. G. J. Jacobi*, Vorlesungen über Dynamik. Herausgegeben von *Clebsch*. Berlin, 1866.

7. *Jolly, Ph.*, Principien der Mechanik. Stuttgart, 1852.

8. *Möbius, A. F.*, Lehrbuch der Statik. Leipzig, 1837.

9. *Poisson, L.*, Éléments de statique. 9. éd. Paris, 1848.

10. *Poisson, S. D.*, Traité de Mécanique. 2. éd. Paris, 1833.

11. *Redtenbacher*, Principien der Mechanik und des Maschinenbaues. Mannheim, 1852.

12. *Jullien, M.*, Problèmes de Mécanique rationnelle. Paris, 1855.

13. *Schell*, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig, 1870.

Des geschichtlichen Interesses wegen sei es jedoch gestattet, die Autoren und Quellen vorzuführen, von denen die verschiedenen wichtigsten Lehren zuerst vorgetragen sind. Daran schließen wir dann eine Angabe der Litteratur der neueren Gegenstände, besonders der Lehren über Erhaltung der Rotations- und Schwingungsebene, die in neuerer Zeit durch den *Foucault'schen* Versuch die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben, sowie über die Bestimmungen von g und der Dichtigkeit der Erde.

Zum ersten Kapitel bemerken wir, daß die Fallgesetze von *Galilei* erkannt und in seinen:

„Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla mecanica ed i movimenti locali. Leiden, 1638.“

vollständig vorgetragen sind.

Die allgemeinen Folgerungen aus diesen Gesetzen zog zuerst *Isaak Newton*. Er legte sie in seinem Werke:

„Philosophiae naturalis principia mathematica. Lond., 1687.“

der Behandlung der Lehre von den Bewegungen und Kräften zu Grunde. Die drei Principien, welche er anwandte, sind

1) das Princip der Trägheit, nur äußere Kräfte ändern den Bewegungszustand eines Körpers,

2) daß die Änderung der Bewegung proportional sei der wirkenden Kraft,

3) das von uns § 11 erläuterte Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung.

Unsere im § 11 aus der Gleichung für die Bewegung einer konstant wirkenden Kraft abgeleiteten Gleichungen $Mv = Pt$ und $\frac{1}{2} Mv^2 = Ps$, wurden die ersten von *Cartesius* in seinen *Principiis philosophiae* abgeleitet und dabei das Produkt Mv als das Maß der bewegenden Kraft aufgestellt; die zweite entwickelte *Leibnitz* und glaubte seinerseits das Produkt Mv^2 als Maß der bewegenden Kraft dem *Cartesischen* gegenüberstellen zu müssen:

„Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii et aliorum. Acta eruditorum. Leipzig, 1686, März.“

Daran knüpfte sich ein langer Streit, der vorzugsweise in den *Actis eruditorum* geführt wurde.

D'Alembert wies dann 1743 in seinem *Traité de dynamique* nach, wie der ganze Streit nur ein Wortstreit sei und durch eine präzisere Begriffsfassung erledigt werde.

Die im zweiten Kapitel vorgetragenen Sätze über die statischen Momente und den Schwerpunkt rühren ursprünglich schon von *Archimedes* her:

„*Archimedes* von *Syracus* vorhandene Werke aus dem Griechischen übersetzt und mit erläuternden und kritischen Anmerkungen versehen von *Ernst Nisse*. Stralsund, 1824.“

Theoretische Beweise für das Hebelgesetz gaben zuerst *Cartesius* und *Newton*, letzterer im *Tractatus de mechanica* in den *opusculis postumis* Amstellod. 1701. Letzterer in den *Principiis* liber I. *Leges motus*, lex III.

Die Theorie der Wage wurde zuerst vollständig entwickelt von *Leonhard Euler* in den *Kommentarien* der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu *Petersburg*. Tom. X.

Die Pendelgesetze wurden zum Teil schon von *Galilei* entwickelt, nämlich, als Pendel von gleicher Länge in gleichen Zeiten ihre Schwingungen vollführen, auch wenn die Gewichte ungleich sind, und daß bei ungleich langen Pendellängen sich die Zeiten wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen verhalten.

Huyghens baute dann in seinem Werke:

„*Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae.* Paris, 1673.“

die Theorie weiter aus und fügte die Sätze hinzu, daß nur unendlich kleine Schwingungen genau isochron sind, und daß die Dauer eines Hin- und Herganges des Pendels sich zur Dauer des freien Falles durch die doppelte Pendellänge verhalte wie die Peripherien eines Kreises zu seinem Durchmesser, also

$$t : 2 \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi : 1,$$

woraus dann die Zeitdauer einer Schwingung, wie wir sie gefaßt haben, die einmalige Zurücklegung des Bogens hervorgeht.

Von *Huyghens* rührt die Unterscheidung des einfachen und zusammengesetzten Pendels und die Zurückführung des letztern auf das erstere her, wie wir sie vorgetragen haben.

Die erste Bestimmung von g mittels des Pendels machte *Huyghens*, er fand $g = 15$ Fuß und 1 Zoll.

Die von uns mitgeteilte Methode von *Borda* befindet sich in

„*Base du Système Métrique etc. redigée par M. Delambre.* Tome III. pag. 337. Paris, 1810.“

und mit Berücksichtigung des Gewichtes des Fadens

„*Biot et Arago: Recueil d'observations géodésiques astronomiques et physiques exécutées par Ordre du Bureau des Longitudes.* Paris, 1831.“

Die zweite Methode wurde vorgeschlagen von *Bohnenberger* in seiner *Astronomie*. Tübingen, 1811.

Die Ausführung von Kapt. *Kater* ist beschrieben

„*Philosophical transactions of the Royal Society of London for the year 1818.* p. 33 ff.“

Die Gesetze der Centrifugalkraft entwickelte *Huyghens* zuerst a. a. O., und ausführlicher finden sie sich mit Beweisen in den *opusculis postumis*, Leyden, 1703, in einer Abhandlung de vi centrifuga, p. 401 sq.

Auf die Erhaltung der Rotationsebene machte *Bohnenberger* bei Bekanntmachung seines Apparates aufmerksam. *Gilbert*, Annalen, Bd. 60, p. 60.

In neuerer Zeit ist die Litteratur über diesen Gegenstand sehr bedeutend angeschwollen, seit *Foucault* diese Eigenschaft der rotierenden Körper zum Beweise der Axendrehung der Erde vorschlug. Man sehe unter andern außer in den Werken über Mechanik, über die freien Axen

Poinsot, Théorie nouvelle de la rotation des corps. *Liouville Journal de mathématiques* 1851. (*Poinsot*, neue Theorie der Drehung der Körper, übersetzt von *Schellbach*. Berlin, 1851.)

L. *Foucault*, Sur une nouvelle démonstration expérimentale du mouvement de la terre fondée sur la fixeté du plan de rotation. *Comptes Rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences.* XXXV, p. 421. Paris, 1852. Ferner C. R. XXXV. p. 424, p. 602.

Person, L'appareil de *Bohnenberger* peut servir à constater la rotation de la terre. C. R. XXXV. p. 417, 549 und 753.

J. *Plücker*, Über die Fesselsche Rotationsmaschine, *Poggendorffs Ann.* Bd. 90.

J. C. *Poggendorff*, Noch ein Wort über die Fesselsche Rotationsmaschine. *Poggend. Ann.* Bd. 90, p. 348. (Die von uns mitgeteilte Erklärung.)

G. *Magnus*, Verbesserte Konstruktion eines Apparates zur Erläuterung verschiedener Erscheinungen bei rotierenden Körpern. *Poggend. Ann.* Bd. 92.

Der *Foucaultsche* Pendelversuch wurde zuerst mitgeteilt in der Abhandlung von *Foucault*:

L. *Foucault*, Démonstration physique du mouvement de rotation de la terre au moyen du pendule. C. R. XXXII. p. 135, auch *Poggend. Ann.* 81.

Seitdem sind eine Menge von Mitteilungen erschienen, welche theils Wiederholungen des Versuches darstellen, theils dazu dienen, das Gesetz, nach welchem sich die Dauer der Drehung unter verschiedenen Breiten ändert, zu bestimmen.

Eine vollständige Zusammenstellung der Litteratur über diesen und vorigen Gegenstand findet sich in den Berichten über die Fortschritte der Physik dargestellt von der physikalischen Gesellschaft zu Berlin in den Jah

1850, 1851, Berlin 1855, 1852, Berlin 1855, 1853, Berlin 1856 u. s. f., in dem Abschnitt über Mechanik, Foucaultsche Versuche.

Die im dritten Kapitel vorgetragenen Lehren über die allgemeine Attraktion hat *Newton* in dem bereits erwähnten Werke *Principia* etc. entwickelt.

Die drei *Keplerschen* Gesetze, auf welche *Newton* seine Entwicklungen stützte, theilte *Kepler* mit, die beiden ersten 1609 in seiner *Astronomia nova synoloygicis, sive physica coelestis tradita commentariis de motu stellae Martis*, Pragae 1609; das dritte, welches er am 15. Mai 1618 auffand, in *Epitome astronomiae Copernicanae*, Lincii 1618.

Die Verschiedenheit von *g* an verschiedenen Orten der Erde behauptete *Newton* zuerst, und der französische Astronom *Richer* zeigte 1670, daß das Sekundenpendel in Cayenne unter 5° *N. B.* 1,25 Linien kürzer sei als in Paris.

Die genauern Messungen von *g* sind zusammengestellt in *Gehlers* *Physikalischem Wörterbuch* 2. Auflage von *Brandes*, *Munk*, *Pfaff*, *Littrow*, *Gmelin*, *Horner*. Bd. III. Artikel Erde p. 891 ff. Neuere Messungen unter andern von *Peters* findet man in den astronomischen Nachrichten Jahrgang 1880, von *Bruhns* in den Publikationen des königl. Preussischen geodätischen Instituts, Arbeiten im Jahre 1870, Leipzig bei Engelmann 1871. Man sehe auch die Besprechung der neuern Pendelmessungen von *Helmert* in der Vierteljahresschrift der Astronomischen Gesellschaft Bd. XI, Heft 1.

Cavendish, Versuche über die Dichtigkeit der Erde sind mitgeteilt in den *Philosophical Transactions* LXXXVIII, auch *Gilbert Annalen* Bd. II.

Reich, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mit der Drehwage. Freiberg, 1838.

Baily, Experiments with the Torsion Rod for determining the mean density of the Earth. Vol. XIV. of the Mem. of the Royal Astron. Society. London, 1843. Unter demselben Titel auch besonders erschienen.

Reich, Abhandlungen der mathematisch-physik. Klasse der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1. Bd. 1852.

Cornu und *Baille* C. R. LXXVI. p. 954.

Jolly, Abhandl. der Münchener Akad. Bd. XIV. II. Abtl.

Maskelyne und *Hutton*, *Philosoph. Transact.* 1775 und 1778.

Airy, *Philosoph. Transact.* 1856.

Die Erklärung von Ebbe und Flut gab zuerst *Newton* in seinen *Principiis phil. nat. lib. I. prop. 66* und *lib. III. prop. 24. 36. 37.*

Vollständig ausgeführt ist sie von *Laplace*, *Mécanique céleste* livre IV. u. XIII.

Man sehe *Gehlers* *Physik. Wörterbuch* 2. Auflage Bd. III. Artikel „Ebbe und Flut“.

Zweiter Abschnitt.

Von dem Gleichgewichte und der Bewegung der Körper in ihren einzelnen Teilen.

Erstes Kapitel.

Von den festen Körpern.

§ 45.

Beschaffenheit der Materie. Bei unsern bisherigen Untersuchungen über die Wirkung von Kräften auf die Körper haben wir die letztern als absolut starr angesehen, indem wir nur die Bewegungen ins Auge gefaßt haben, welche die Körper als solche unter der Wirkung der Kräfte annehmen. Untersuchen wir die Einwirkung der Kräfte auf die Körper abgenauer, so finden wir auch dann, wenn die Körper keine Bewegung annehmen, daß dieselben durch die auf sie einwirkenden Kräfte Veränderungen erfahren. Wir sehen, daß die festen Körper verlängert oder verkürzt und gebogen werden können, wir sehen Bewegungen in einer Flüssigkeit eintreten, kurz wir sehen, daß die einzelnen Teile eines Körpers gegen einander verschiebbar sind.

Die Erscheinungen dieser Art, das übersieht man unmittelbar, werden außer von den äußern wirksamen Kräften wesentlich bedingt sein von der innern Struktur der Körper, oder was dasselbe ist, von der innern Struktur dessen, was die Körper bildet, der Materie. Ehe wir deshalb zur Untersuchung dieser Erscheinungen übergehen, wird es vorteilhaft sein zu untersuchen, ob wir nicht schon von anderer Seite her über diese Struktur der Materie einigen Aufschluß erhalten können, der uns die Untersuchung der an den Körpern beobachteten physikalischen Erscheinungen erleichtert.

Die erste Erfahrung, welche wir in Betreff der Struktur der Körper machen, ist die Teilbarkeit derselben; es gibt keinen Körper, der nicht in Teile zerlegt, der nicht zerstückt werden kann. Diese Teilbarkeit geht so weit, daß es nicht möglich ist, eine Grenze derselben zu erreichen oder zu bestimmen. Um sich davon zu überzeugen, genügt es an ein Beispiel zu erinnern; ein wenig Moschus verbreitet in dem Raume, in dem es aufbewahrt wird, einen sehr starken Geruch, weil es fortdauernd in demselben einen Teil seiner Substanz zerstreut; dennoch kann es lange Zeit in dem Raume gelassen werden, ohne daß sich sein Gewicht vermindert, denn die Teilchen, welche es ausstößt, sind so klein, daß sie sich jeder Messung entziehen. Bei dieser großen Teilbarkeit kann man zwei Annahmen über die Konstitution der Materie machen; man kann annehmen, die Materie sei bis ins Unendliche teilbar, oder man komme bei fortgesetzter Teilung

chließlich auf Teilchen, welche nicht weiter geteilt werden können, auf Atome. Macht man die letztere Annahme, so muß die Materie aus diesen kleinsten Teilchen aufgebaut sein, die im Innern als solche existieren, sie muß ein Aggregat dieser einzelnen Teile, dieser Atome sein, die in mehr oder weniger großen Abständen neben einander gelagert sind, ohne sich zu berühren, die sich anziehen oder abstoßen können, welche sich einander festhalten, wie in den festen Körpern, oder gegen einander beweglich bleiben, wie in den flüssigen oder gasförmigen Körpern.

Macht man dagegen die erstere Annahme, ist die Materie, wenn auch nur ideell, bis ins Unendliche teilbar, so können in der Materie keine discreten Teilchen als solche existieren, sondern jedes Teilchen ist nur ein Teil des Ganzen. Daraus folgt dann, daß nach dieser Anschauungsweise die Materie den Raum eines Körpers kontinuierlich erfüllen muß, natürlich Spalten und Poren in demselben ausgenommen. Denn sobald man innerhalb der Materie eine Diskontinuität zugibt, hat eben das für sich bestehende Teilchen eine selbständige Existenz, es ist der Baustein, aus welchem die Materie zusammengesetzt ist.

Schon die hierin gegebene Fragestellung beweist, daß es sich hier um die Wahl einer von zwei möglichen Hypothesen über die Struktur der Materie handelt, somit auch, daß wir bei der Entscheidung der Frage mit aller der Vorsicht verfahren müssen, welche bei der Bildung von Hypothesen angewandt werden muß. Wir haben nach den in der Einleitung aufgestellten Principien die Hypothese zu wählen, welche die von der Struktur der Materie abhängigen Erscheinungen am einfachsten und ohne weitere Hülfs-hypothesen verständlich macht; die Erfahrungen der Chemie sind es, welche wir zunächst ins Auge zu fassen haben.

Wir können diese Erfahrungen in folgenden wenigen Sätzen zusammenfassen.

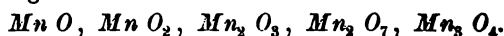
1. Zwei verschiedene Materien können sich zu einer dritten neuen, deren Eigenschaften von denen ihrer Bestandteile wesentlich verschieden sind, verbinden; so der brennbare Wasserstoff und der die Verbrennung unterhaltende Sauerstoff zu dem nicht brennbaren Wasser; das magnetische Metall Eisen und der brennbare Schwefel zu dem nicht magnetischen, nicht metallischen Schwefeleisen.
 2. Bei dem Übergange des Gemenges zweier Materien in die Verbindung findet stets eine Änderung des Wärmezustandes, in den meisten Fällen eine Wärmeentwicklung statt. Wasserstoff und Sauerstoff verbinden sich in passenden Verhältnissen gemischt unter heftiger Explosion, und die Flamme des so mit Sauerstoff gemischten Wasserstoffs, des Knallgases, erzeugt eine der höchsten erreichbaren Temperaturen. Bei der Herstellung des Schwefeleisens kommt die ganze Masse in ein lebhaftes Glühen.
 3. Die Mengenverhältnisse der einzelnen Materien, welche in eine Verbindung eingehen, sind immer dieselben. Wasserstoff und Sauerstoff treten zu Wasser immer nur in dem Verhältnis zusammen, daß auf je ein Gewichtsteil Wasserstoff acht Gewichtsteile Sauerstoff kommen, Schwefel und Eisen zu Schwefeleisen nur so, daß zu je einem Gewichtsteil Schwefel 1,75 Gewichtsteil Eisen treten, und so in allen Fällen.
- Zwei Materien können sich in verschiedenen Verhältnissen zu neuen Materien verbinden; so kann Wasserstoff mit Sauerstoff außer zu Wasser

noch zu einem zweiten Körper zusammentreten, zu Wasserstoffdioxyd; die Menge des Sauerstoffs, die dann zum Wasserstoff tritt, ist gerade die doppelte der im Wasser vorhandenen, auf je ein Gewichtsteil Wasserstoff kommen 16 Gewichtsteile Sauerstoff. Eine zahlreiche Reihe von Verbindungen bildet z. B. der Stickstoff mit dem Sauerstoff, die Verbindungen sind Stickoxydul, Stickoxyd, Salpetrigsäureanhydrid, Stickstoftetroxyd und Salpetersäureanhydrid. Die Gewichtsmengen Sauerstoff, welche zu je einem Gewicht Stickstoff getreten, verhalten sich in diesen Verbindungen der Reihe nach wie $1 : 2 : 3 : 4 : 5$. Im Stickoxydul tritt zur Gewichtseinheit Stickstoff $\frac{8}{14}$ Gewicht Sauerstoff, in den folgenden das Doppelte, Dreifache und so fort. Ähnlich ist es bei anderen Körpern; so liefert das Metall Mangan eine Reihe von Verbindungen, dieselben enthalten:

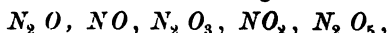
- 1) Manganoxydul . . auf 1 Gewichtsteil Mangan $\frac{8}{27,5}$ · Sauerstoff
- 2) Mangansuperoxyd „ 1 „ „ $2 \cdot \frac{8}{27,5}$ „
- 3) Mangansesquioxyd „ 2 „ „ $3 \cdot \frac{8}{27,5}$ „
- 4) Übermangansäure „ 2 „ „ $7 \cdot \frac{8}{27,5}$ „
- 5) Manganoxyduloxyd „ 3 „ „ $4 \cdot \frac{8}{27,5}$ „

Diese und eine Menge ähnlicher Erfahrungen faßt die Chemie unter dem Gesetze der multiplen Proportionen zusammen, wonach verschiedene Verbindungen je zweier Materien dadurch entstehen, daß die einzelnen Bestandteile nach bestimmten Gewichtsmengen oder nach einfachen Vielfachen dieser Gewichtsmengen zusammentreten.

Bezeichnen wir, um die Sauerstoffmengen und die Mangangen, welche in den verschiedenen Verbindungen zusammentreten, durch die kleinsten ganzen Zahlen auszudrücken, 55 Gewichtseinheiten Mangan mit M , und 16 Gewichtseinheiten Sauerstoff mit O , so können wir die sämtlichen Manganverbindungen darstellen durch



Ebenso können wir auch die Verbindungen des Stickstoffs mit dem Sauerstoff darstellen; bezeichnen wir die Gewichtsmenge 14 des Stickstoffs mit N , so sind die fünf Stickstoffverbindungen



worin auch hier das Zeichen O die Gewichtsmenge 16 Sauerstoff bezeichnet. Schließlich lassen sich ebenso die Wasserstoffverbindungen als $H_2 O$ und $H_2 O_2$ bezeichnen, wenn die Gewichtsmenge 1 Wasserstoff mit H bezeichnet wird.

Bezeichnen wir ganz allgemein jene Gewichtsmenge irgend einer Materie, welche selbst oder von der ein Vielfaches mit 16 Gewichtsteilen Sauerstoff oder mit einem Vielfachen derselben zusammentritt, mit A , so können wir jede Sauerstoffverbindung darstellen durch die Formel

$$mA + n \cdot O,$$

worin m und n stets ganze und zwar nicht große Zahlen sind.

Diese Gewichtsmengen A sind die Mischungsgewichte der einzelnen Materialien in Bezug auf Sauerstoff; die Chemie bezeichnet dieselben durch die Anfangsbuchstaben der lateinischen Namen der Elemente.

3. Die so bestimmten Mischungsgewichte haben aber noch eine weitere Bedeutung. Die verschiedenen Materialien verbinden sich nicht nur mit dem Sauerstoff, sondern auch unter einander nach den beiden angegebenen Gesetzen, dem Gesetze der festen Verhältnisse und dem der multiplen Proportionen. Die Untersuchung der Gewichtsmengen, nach welchen die verschiedenen Materialien zusammentreten, zeigt dann, daß dieselben Zahlen, welche die Mischungsgewichte für die Sauerstoffverbindungen angeben, auch gelten für die Verbindung der Körper unter einander. Bedeutet S die Gewichtsmenge 32 Schwefel, so sind die Verbindungen des Schwefels mit Sauerstoff wieder $mS + nO$. Die Verbindungen des Schwefels mit Wasserstoff sind dann $mS + nH$, mit Mangan $mS + nMn$. Bedeutet das Zeichen Cl die Gewichtsmenge 35,5 Chlor, so sind die Sauerstoffverbindungen des Chlor gegeben durch $mCl + nO$. Die Verbindung des Chlors mit dem Wasserstoff ist dann HCl , die Verbindungen des Chlors mit Schwefel wieder $mCl + nS$, die des Chlors mit Mangan $mCl + nMn$, wo immer m und n ganze nicht große Zahlen sind. Kurz sind A und B die Mischungsgewichte irgend zweier Materialien für die Sauerstoffverbindungen, so sind immer mit derselben Bedeutung von m und n , $mA + nB$ die Verbindungen dieser beiden Körper. Auch dann, wenn 3, 4 und mehrere Elemente zusammentreten, bleibt immer dieselbe Beziehung bestehen, sind A, B, C, D die Mischungsgewichte von vier Materialien, so sind alle ihre Verbindungen dargestellt durch

$$m \cdot A + nB + pC + qD,$$

worin m, n, p, q ganze nicht große Zahlen sind.

Gehen wir dazu über, diese Erfahrungen der Chemie mit den beiden möglichen Hypothesen über die Struktur der Materie zusammenzustellen. Jene derselben haben wir als die für uns wahrscheinliche zu wählen, welche die oben experimentell gefundenen Gesetze am ungezwungensten aus sich entwickeln läßt, welche, einmal aufgestellt, dieselben als notwendige Folgerungen erkennen läßt.

Die Wahl kann uns in diesem Falle nicht schwer fallen. Ist die Materie etwas den Raum stetig Erfüllendes und nicht ein Aggregat selbständig existierender in gewissen Abständen neben einander gelagerter Atome, so ist der Vorgang der Verbindung selbst ein höchst dunkler. Die einzige Möglichkeit ist dann, daß die Materialien sich gegenseitig durchdringen; nehmen wir das aber an, warum durchdringen sich die Materialien nur in ganz bestimmten, unveränderlichen Verhältnissen? Wir sehen z. B., daß die Gewichtsmenge 14 Stickstoff mit 8, 16, 24 . . Sauerstoff sich verbinden kann, daß also diese Menge Stickstoff mehr wie 8 Sauerstoff aufnehmen kann, warum nun gerade nur die doppelte, dreifache etc. Menge? Besonders aber warum durchdringen sich die verschiedenen Materialien gerade in dem Verhältnis, in welchem sie mit dem Sauerstoff zusammentreten? Alle diese Gesetze folgen aus dieser Hypothese über die Konstitution der Materie nicht, jedes derselben verlangt, um mit derselben in Einklang gebracht zu werden, eine neue der Materie beizulegende Eigenschaft; so die Eigenschaft,

dafs eine Materie in die andere eindringen kann, die Eigenschaft, eine ganz bestimmte Menge eingedrungener Materie, aber auch durch doppelte, dreifache Menge gesättigt zu werden u. s. f.; kurz man sieht dieser Thatsachen bedarf zu ihrem Verständnis eine besondere Eigenschaft der Materie, die wir ihr aber lediglich infolge der beobachteten Thatsachen beilegen. Das aber ist gerade das Charakteristische einer schlechten Hypothese, dafs sie allein nicht hinreicht, die mit ihr in Verbindung stehenden Thatsachen zu erklären, dafs jede neue Thatsache eine neue Hypothese verlangt.

Wie anders zeigt sich dagegen die zweite Hypothese; nehmen wir an, dafs die Materie aus Atomen bestehe, so ergeben sich die beobachteten Thatsachen und die aus ihnen abgeleiteten Sätze als so unmittelbare Folgen, dafs man sofort diese Erscheinungen als im Wesen der Materie begründet erkennt.

Zunächst ergibt sich unmittelbar, worin die Verbindung zweier Materien besteht, und worin sie sich von dem Gemenge unterscheidet. In dem Gemenge sind die einzelnen Materien ungeändert, jede mit ihren charakteristischen Eigenschaften enthalten, die atomistische Hypothese sagt, dafs der Grund der ist, dafs in einem solchen Gemenge die Atome der einzelnen Materien neben einander, jedes für sich existierend, bestehen. Wandelt sich das Gemenge in eine Verbindung, so treten die Atome der einzelnen Materien zusammen, sie lagern sich fest an einander und existieren nunmehr als verbundene Moleküle. Im Wasser existiert nicht mehr das Wasserstoffatom oder das Sauerstoffatom, sondern jedes Sauerstoffatom ist mit zwei Wasserstoffatomen unauflöslich verbunden, und die Verbindung dieser Atome bildet das Atom Wasser.

1) Im Augenblicke, wo diese Atome zusammentreten, mufs jede eine sehr lebhaft bewegte Materie derselben eintreten, indem ein Atom an ein anderes anprallt und nun die Atome als Atomgruppen oder Moleküle weiter existieren; wir sehen die lebhaft bewegte Materie in den Wärmeerscheinungen, welche chemische Verbindung begleitet.

2) Da in der Verbindung die Atome der einzelnen Materien nicht als solche existieren, so müssen die Eigenschaften der Verbindungen andere sein als diejenigen der Materien, aus welchen sie sich bilden. Da die Materie aus den Atomen aufgebaut ist, sind auch die Atome Träger der Eigenschaften, die wir an der Materie wahrnehmen; die Atome der Verbindung sind aber ganz andere als jene der getrennten Materien, müssen deshalb auch ihre Eigenschaften und somit auch die der Verbindung ganz andere sein als die der Bestandteile.

3) Die Atome der einzelnen Materien haben eine unveränderliche Masse und ein festbestimmtes Gewicht, welches für die verschiedenen Materien verschieden ist. Wenn nun in einer Verbindung je ein Atom der einen Materie sich an je ein Atom der andern anlegt, oder wenn sich je m Atome der einen an je n Atome der andern anlegen, so ist damit auch das Verhältnis der Gewichte, in welchem die Materien in eine Verbindung gehen, ein ganz festes und bestimmtes; es mufs entweder das Verhältnis der Gewichte der einzelnen Atome selbst, oder das Verhältnis der Gewichte von m Atomen der einen zu n Atomen der andern Materie sein. Dieses experimentell bewiesene Gesetz der Verbindung nach festen Verhältnissen

der tatsächliche Ausdruck dieser aus der Struktur der Materie gezogenen Folgerungen.

4) Ebenso folgt unmittelbar das Gesetz der multiplen Proportionen. In einer Verbindung können die Materien Atom für Atom zusammentreten, es können aber auch mit je einem Atom der einen 2, 3, 4 . . . n Atome der andern zusammentreten oder auch 2, 3 . . . m Atome der einen mit n Atomen der andern, wo aber m und n , da die Atome nicht teilbar sind, immer ganze Zahlen sein müssen. Das ist aber das Gesetz der multiplen Proportionen, nach dem jede Verbindung zweier Materien nach Vielfachen der Mischungsgewichte derselben erfolgt.

5) Sind aber die Mengenverhältnisse, in welchen die Materien zusammentreten, die Gewichtsverhältnisse ihrer Atome, so folgt schliesslich auch, dass dieselben Verhältniszahlen, die für die Verbindungen einer Gruppe massgebend sind, es für alle sein müssen. Denn sind A und B die Gewichtsmengen zweier Materien, welche sich mit der Menge C einer dritten zu den Verbindungen AC und BC verbinden, so können, da A und B uns die Gewichte der Atome dieser beiden Materien repräsentieren, sie selbst auch nur in den Verhältnissen mA und nB zusammentreten. Das fünfte der vorhin abgeleiteten Gesetze zeigt, dass es in der That sich so verhält.

Schon diese Erfahrungen zeigen also die bedeutende Überlegenheit der atomistischen Hypothese; sie zeigen, dass dieselbe jene Eigenschaften besitzt, welche wir von einer Hypothese fordern, wenn wir sie in den Naturwissenschaften zulassen, nämlich dass sie einen einfachen obersten Grundsatz bilde, aus welchem die mit ihr verknüpften Thatsachen unmittelbar folgen.

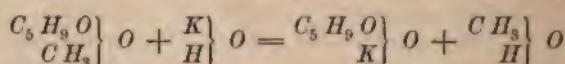
Die Erscheinungen der chemischen Verbindungen sind indes immer noch ein einseitiges Gebiet, und es genügt nicht, um eine Hypothese zuzulassen, welche eine so allgemeine Bedeutung hat, dass sie sich auf einem solchen bewähre, sie muss sich auch auf anderen Gebieten, die von der Beschaffenheit der Materie bedingt sind, als ebenso stichhaltig bewähren. Wenden wir uns zu solchen, und zwar zunächst zu den Erscheinungen der chemischen Zersetzung.

Wenn wir einen zusammengesetzten Körper, z. B. Wasser, chemisch zerlegen, so erhalten wir aus ihm immer die Bestandteile, welche wir zu seiner Zusammensetzung verwandten, also immer Sauerstoff und Wasserstoff genau in den zur Zusammensetzung des Wassers erforderlichen Gewichtsverhältnissen, immer auf einen Gewichtsteil Wasserstoff acht Gewichtsteile Sauerstoff. Diese Thatsache ist nur verständlich, wenn wir das Wasser nicht als einen Körper betrachten, aus welchem unter gewissen Umständen Wasserstoff und Sauerstoff entstehen kann, sondern wenn wir annehmen, dass diese Bestandteile wirklich als solche und zwar in den angegebenen Gewichtsverhältnissen im Wasser vorhanden sind. Dann aber müssen diese beiden Stoffe, wenn auch noch so innig verbunden, so doch räumlich getrennt sein. Wenn wir nun die Teilung des Wassers immer weiter fortgesetzt denken, so müssen wir schliesslich auf Wasserteilchen kommen, deren nochmalige Teilung die Bestandteile des Wassers von einander trennt, deren nochmalige Zerlegung also bewirkt, dass die geteilte Substanz aufhört, als solche, wie sie war, zu existieren. Diese letzten Teilchen sind es, was wir Atome nennen.

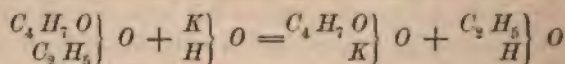
Man sieht, daß wir den Gesetzen der chemischen Zerlegung zufolge auf das Dasein der Atome geführt wurden, durch den aus jenen Gesetzen gezogenen Schluss, daß in den Verbindungen die Bestandteile, wenn auch nicht mehr isoliert, so doch noch als solche existieren. Dieser Schluss, der vielleicht auf den ersten Blick nicht ganz exakt erscheinen mag, wird durch einige andere chemische Thatsachen zur unabweisbaren Notwendigkeit.

Die organische Chemie lehrt uns verschiedene Körper kennen, welche bei genau gleicher Zusammensetzung sich doch ganz verschieden verhalten, es sind die sogenannten isomeren Körper im weitesten Sinne des Wortes. Unter diesen isomeren Körpern gibt es eine Gruppe, die metameren, welche bei ganz identischer elementarer Zusammensetzung unter ganz gleicher Behandlungsweise dennoch ganz verschiedene Zersetzungsprodukte liefern.

So gibt es z. B. zwei Verbindungen, welche nach der Formel $C_6H_{12}O_2$ zusammengesetzt sind, das valeriansaure Methyl, welches aus der Einwirkung von Valeriansäure auf Holzgeist entsteht, und das buttersaure Äthyl, entstanden aus der Einwirkung von Buttersäure auf Weingeist; in beiden sind mit 72 Gewichtsteilen Kohlenstoff 12 Gewichtsteile Wasserstoff und 32 Gewichtsteile Sauerstoff verbunden. Beim Einwirken von Ätzkali auf diese beiden, genau aus den gleichen Elementen bestehenden Substanzen ist das Resultat aber sehr verschieden; die eine liefert nach dem Schema



valeriansaures Kali und Methylalkohol, die andere nach dem Schema



buttersaures Kali und Äthylalkohol.

Aus einem Körper von genau gleicher Zusammensetzung treten also bei genau gleicher Behandlung ganz verschiedene Körper hervor. Diese Thatsache ist unbegreiflich, wenn wir nicht annehmen, daß in der auf verschiedenen Wegen dargestellten Verbindung $C_6H_{12}O_2$ bereits die Bestandteile der Körper, in die sie zerfallen können, also einmal die Atomgruppen C_5H_9O und C_2H_3 , das andere Mal die Atomgruppen C_4H_7O und C_2H_5 , wirklich als solche vorhanden sind. Dann aber müssen sie räumlich getrennt sein; und eine fortgesetzte Teilung muß auf Elemente führen, deren weitere Zerteilung die Substanz in ihre Bestandteile auflöst, auf Atome.

Diese Deduktion¹⁾ aus den Gesetzen der Zerlegung der Körper bezieht sich allerdings zunächst nur auf die zusammengesetzten Körper, wir werden sie aber auf die sogenannten einfachen Körper ausdehnen müssen. Denn zunächst sind wir nicht berechtigt, diese Körper, welche uns zu zerlegen noch nicht gelungen ist, wirklich als einfache Körper zu betrachten, dann aber besteht zwischen ihnen und den nachweisbar zusammengesetzten Substanzen nicht ein solcher Unterschied, daß wir annehmen dürfen, sie seien von wesentlich verschiedener Natur. Zudem aber lehrt uns auch über diese die Chemie Thatsachen kennen, welche nicht zu verstehen sind ohne die Annahme von Atomen.

¹⁾ Kopp, Lehrbuch der physikalischen u. theoretischen Chemie als 1. Bd. des Lehrb. d. Chemie v. Graham-Otto. 2. Aufl.

Die Chemie zeigt uns nämlich eine Reihe von einfachen Körpern in verschiedenen, den sogenannten allotropen Modifikationen, in denen dieselben Körper ganz verschiedene Eigenschaften haben, ohne daß zu ihnen etwas hinzuge treten oder etwas von ihnen fortgenommen wäre. So kommt die Kohle krystallinisch in zwei ganz verschiedenen Formen vor, als Diamant und als Graphit; beide Formen sind reiner Kohlenstoff, denn die Verbrennung gleicher Gewichtsmengen beider liefert genau die gleiche Menge Kohlensäure. Trotzdem sind die beiden Körper ganz und gar verschieden. Der Diamant ist ein klarer durchsichtiger Körper, härter wie irgend ein anderer, der Graphit schwarz undurchsichtig und so weich, daß er auf dem Papiere abfräht; er ist das Material unserer Bleistifte. Der Schwefel ist in einer ganzen Reihe verschiedener Formen bekannt¹⁾, er kommt vor als Rhombenoktaeder krystallisiert, und in klinorhombischen Prismen, bald ist er hart, bald weich wie Kautschuk, bald ist er in Schwefelkohlenstoff löslich, bald unlöslich, der eine ist hellgelb, der andere durchsichtig und braun. Es ist in allen Formen nichts als Schwefel, denn verbrennen wir ihn, in welcher Form es sei, wir bekommen aus allen Formen nichts als schweflige Säure, und bei Verbrennung gleicher Gewichte immer dieselbe Menge.

Ähnliches gilt vom Selen, welches als metallisches und als glasartiges, vom Arsen, welches als metallisches und graphitartiges vorkommt, vom Phosphor u. s. f.

In der Natur findet sich der Schwefel in Rhombenoktaedern krystallisiert, und in diese Form lassen sich alle übrigen durch gewisse Manipulationen zurückführen. Bei dieser Überführung zeigt sich aber dann im Augenblicke der Verwandlung eine plötzliche spontane Erwärmung, wie Regnault gezeigt hat²⁾. Aus dem metallischen Selen erhält man das amorphe glasartige, indem man es schmilzt und dann tropfenweise in kaltes Wasser fallen läßt oder auf einem kalten Bleche ausgießt, überhaupt es rasch erkalten. Erwärmt man dann das amorphe Selen auf 94°C., so geht es plötzlich in metallisches über. Dabei zeigt es dann eine sehr beträchtliche Wärmeentwicklung, die, wie Hittorf³⁾ zuerst gezeigt hat, das Selen auf eine Temperatur von über 200° erwärmt. Gleichzeitig tritt dabei eine ganz beträchtliche Verdichtung ein, indem das spezifische Gewicht von 4,28 auf 4,80 steigt.

Diese Thatsachen führen uns unabweislich darauf, auch für die einfachen Körper die atomistische Hypothese zu wählen; denn ist die Materie ein Continuum, so können wir es absolut nicht verstehen, wie ein und dieselbe Materie sich verschieden verhalten kann; besteht sie aber aus Atomen, so sind die verschiedenen Zustände leicht erklärlich. Die Atome müssen in den Körpern eine gewisse Gruppierung haben, und die physikalischen Eigenschaften, Durchsichtigkeit, Härte, Dichtigkeit werden nicht nur von der Beschaffenheit, sondern auch von der Gruppierung der Atome abhängen. Die allotropen Zustände sind dann nichts als verschiedene Lagerung der Atome.

Werden die Substanzen aus einer Modifikation in die andere übergeführt, so muß eine Bewegung der Atome eintreten, wir haben sie wahr-

¹⁾ Man sehe über diese verschiedenen Modifikationen: *Graham-Otto*, Lehrb. der Chemie. Bd. II.

²⁾ *Regnault*, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. I.

³⁾ *Hittorf*, Poggend. Ann. Bd. 84.

genommen in den Wärmeerscheinungen, welche bei dieser Überführung sich zeigen.

Wir erhalten somit von der Chemie eine ganze Reihe von Thatsachen, welche von den beiden möglichen Hypothesen über die Struktur der Materie die eine als durchaus unzulässig erkennen lassen. Wir sind dadurch jedenfalls berechtigt, unseren Untersuchungen über die an der Materie beobachteten physikalischen Erscheinungen die atomistische Hypothese zu Grunde zu legen. Dabei wird die Fruchtbarkeit dieser Hypothese erst recht hervortreten, wenn wir sehen, daß die verwickeltsten Erscheinungen im Lichte dieser Hypothese sich einfach und ungezwungen erklären lassen. Ja wir werden eine ganze Reihe von Erscheinungen finden, die sich ebenso wie die Isomerie und die Allotropie überhaupt nur verstehen lassen unter der Annahme, daß die Materie ein Aggregat diskreter Teilchen ist, welche sich in Abständen von einander befinden, die mit gewissen genau messbaren Größen, der Länge der Lichtwellen vergleichbar sind.

Ehe wir nun zur Besprechung der einzelnen Erscheinungen übergehen, werden wir noch die Frage zu beantworten haben, wie wir uns die Atome denn eigentlich zu denken haben. Die Erfahrung gibt uns dartüber direkt nichts an; bei der Besprechung dieser Frage begeben wir uns ganz auf das Gebiet der Spekulation, welche nur den Zweck haben kann, den scheinbaren Widerspruch, daß eine gegebene Menge Materie, das Atom unteilbar sein soll, zurückzuweisen.

Für die zusammengesetzten Körper konnten wir vorhin bereits den Begriff des Atomes feststellen, wir nannten die Atome solcher Körper jene Teilchen, welche als die letzten dieser Substanz anzusehen sind, deren weitere Teilung die Substanz in ihre Elemente zerfallen läßt. Für diese ist somit das Atom nicht etwas absolut Unteilbares, sondern nur etwas relativ Unteilbares, es ist also noch ein Teilchen, das eine, wenn auch äußerst kleine, so doch immerhin noch ideell meßbare Ausdehnung hat, da in demselben die Atome der Bestandteile räumlich getrennt sind.

Für die einfachen Körper, für jene, die wir chemisch nicht zerlegen können, liegt der Begriff des Atoms nicht so unmittelbar vor; indes dürfen wir auf Grund der Erfahrungen über Isomerie und Allotropie ihn doch wohl ähnlich fassen. Wir werden nämlich vermuten dürfen, daß die chemisch verschiedenen Elemente in der That nicht ebenso viele verschiedene Materien sind, daß es vielmehr überhaupt nur eine Materie gibt, und daß die verschiedenen Stoffe nur Modifikationen dieser Materie sind. Das physische Atom, mit dem wir es überhaupt zu thun haben, ist dann auch für die einfachen Körper nicht etwas absolut Unteilbares, sondern es ist auch noch der Teilung fähig, es ist indes das letzte Teilchen, auf welches wir bei der Teilung eines Stoffes gelangen, dessen weitere Teilung diesen Stoff nicht mehr existieren läßt. Aus solchen einzelnen Teilchen müssen wir die unserer Untersuchung unterworfenen Stoffe aufgebaut annehmen, zwischen diesen sind die Kräfte thätig, deren Wirkungen wir beobachten. Das hier nach definierte kleinste Teilchen der Materie ist also das letzte, welches wir eine selbständige Existenz zuschreiben; die Chemie bezeichnet dasselbe als Molekül, um anzudeuten, daß sie diese Teilchen noch wohl für teilbar hält. Eine solche Teilung nimmt die Chemie für die Moleküle der einfachen Stoffe noch an, wenn dieselben mit anderen Stoffen in Verbindun-

treten. So besteht nach den jetzigen Anschauungen das Molekül freien Wasserstoffs aus zwei Atomen, ebenso das Molekül Chlor. Verbinden sich die beiden, so spalten sich ihre Moleküle, und die Elemente treten Atom für Atom aneinander. Treten wir dieser Auffassung des Atoms bei, so gilt natürlich auch für dieses unsere vorige Definition des Atoms ganz ebenso, nur daß damit dem einzelnen Atom als solchem nicht immer mehr eine selbständige Existenz zukommt, daß auch bei einfachen Stoffen dieselben ebenso zu zwei oder mehr verbunden sein können, wie bei zusammengesetzten.

Von den so definierten Atomen und chemischen Molekülen können wir noch das physikalische Molekül unterscheiden, welches aus einer Zusammenlagerung mehrerer chemischer Moleküle bestehen kann, welches sich also zum chemischen Molekül verhält, wie dieses zum Atom. Diese physikalischen Moleküle würden dann die näheren Bestandteile der einzelnen Körper bilden. Zu dieser Annahme führen uns hauptsächlich die allotropen Modifikationen der einfachen Körper; denn auf diese Weise können wir uns am besten die vorhin erwähnte verschiedene Lagerung der Atome denken, welche die Verschiedenheit in den Eigenschaften der allotropen Modifikationen bedingt. Das Atom und das chemische Molekül des Graphits muß dasselbe sein wie des Diamants, da wir in beiden chemisch denselben Körper haben; das physikalische Molekül des Graphits unterscheidet sich aber von dem des Diamanten, indem bei der einen dieser Formen der Kohle eine größere oder geringere Zahl von Atomen zu einem Molekül vereinigt und in diesem Molekül dann verschieden gelagert sind.

Physikalisch sind wir hiermit an der Grenze angelangt, zu der wir durch induktorische Schlüsse kommen können, philosophisch ist der Begriff des Atoms und somit derjenige der Materie noch nicht erfaßt. Denn dazu wäre die Frage noch zu erledigen: Wie ist denn nun das physikalische Atom weiter beschaffen, was entsteht, wenn wir es weiter zerlegen? Daß das Atom nach dem Vorigen selbst wieder, wenn ich so sagen darf, atomistisch zerfaßt werden muß, leuchtet ein; denn nur dann ist die Verschiedenheit der physikalischen Atome faßbar, wenn wir sie als Modifikationen einer Materie ansehen. Ob aber dann die Grundlage der physikalischen Atome, das philosophische Atom, als etwas Ausgedehntes, oder ob es als einfacher, materieller Punkt aufzufassen ist, das ist eine Frage, welche lediglich der Spekulation angehört, die zu besprechen deshalb hier nicht der Ort ist¹⁾.

Da das physikalische Atom eine bestimmte Quantität Materie enthält, so besitzt es ein bestimmtes Gewicht; es ist nicht möglich, das Gewicht desselben für die verschiedenen Stoffe in Grammen anzugeben, sein relatives Gewicht, das heißt das Verhältnis zwischen den Gewichten der einzelnen Atome läßt sich bestimmen. Nennen wir das Gewicht des Atoms Wasser-

¹⁾ Man sehe über die Frage nach der Beschaffenheit der Atome: *Fechner, Mengenlehre*, 2. Aufl. Leipzig, 1864. Fechner entscheidet sich dort für die Einfachheit des philosophischen Atoms; seine Deduktion scheint mir indes nicht gegen allen Widerspruch sicher zu sein. Außerdem sehe man die philosophische Ableitung in die *Encyclopädie der Physik* (herausgegeben von *G. Karsten*) von *Harnack*, in welcher man die verschiedenen Anschauungen von dem Wesen der Materie zusammengestellt findet. So interessant es auch wäre, so verbieten doch die Grenzen dieses Werkes, auf die verschiedenen Theorien einzugehen; ich habe deshalb oben die dynamische Anschauung nicht einmal erwähnt.

stoff eins, so werden wir nach dieser Einheit das des Chlors, das des stoffs etc. messen können. Eine Verbindung des Chlors und Wasser wird sich dann, wenn wir das Gewicht der beiden Atome mit cl und zeichnen, darstellen lassen durch $m \cdot h + n \cdot cl$ oder, da wir h gleich setzen, durch $m + n \cdot cl$, wo m und n ganze Zahlen sind und die l der Atome geben, die bei dieser Verbindung zusammentreten. Das Verhältniß der Atomgewichte des Wasserstoffs und Chlors wird dann sein $m : n$ oder $1 : \frac{n}{m} \cdot cl$. Die chemische Analyse, welche uns das Mischungsverhältniß des Chlors, jene Menge, welche sich mit einem Gewichtsteil Wasser verbindet, liefert, bestimmt somit die GröÙe $\frac{n}{m} \cdot cl$ oder das Atomgewicht multipliziert mit dem Quotienten $\frac{n}{m}$.

Wären uns daher die Zahlen m und n bekannt, so lieferte uns dieselbe Analyse, welche das Mischungsverhältniß des Chlors ergibt, auch das Atomgewicht desselben. Man hat aber kein direktes Mittel, diese Zahlen zu bestimmen; denn man weiß niemals, wieviel Atome bei einer Verbindung zu einem zusammentreten. In welcher Weise die Chemie, durch allgemeine Erscheinungen geführt die Atomgewichte aus den Äquivalenten ableiten kann, das zu besprechen würde hier zuviel Raum einnehmen; wir verweisen halb auf die Lehrbücher der Chemie¹⁾ und begnügen uns hier die von der Chemie jetzt angenommenen Atomgewichte mitzuteilen, da wir die in mehreren Stellen benutzen müssen.

Tabelle der Atomgewichte der einfachen Körper,
bezogen auf $H = 1$.

Aluminium <i>Al</i> = 27,4	Jod <i>J</i> =
Antimon <i>Sb</i> = 122,0	Kalium <i>Ka</i> =
Arsen <i>As</i> = 75,0	Kobalt <i>Co</i> =
Barium <i>Ba</i> = 137,0	Kohlenstoff <i>C</i> =
Beryllium <i>Be</i> = 9,3	Kupfer <i>Cu</i> =
Blei <i>Pb</i> = 207,0	Lanthan <i>La</i> =
Bor <i>B</i> = 11,0	Lithium <i>Li</i> =
Brom <i>Br</i> = 80,0	Magnesium <i>Mg</i> =
Cadmium <i>Cd</i> = 112,0	Mangan <i>Mn</i> =
Caesium <i>Cae</i> = 133,0	Molybdän <i>Mo</i> =
Calcium <i>Ca</i> = 40,0	Natrium <i>Na</i> =
Cerium <i>Ce</i> = 92,0	Nickel <i>Ni</i> =
Chlor <i>Cl</i> = 35,5	Niobium <i>Nb</i> =
Chrom <i>Cr</i> = 52,2	Osmium <i>Os</i> =
Didym <i>Di</i> = 95,0	Palladium <i>Pa</i> =
Eisen <i>Fe</i> = 56,0	Phosphor <i>P</i> =
Erbium <i>Er</i> = 112,6	Platin <i>Pt</i> =
Fluor <i>Fl</i> = 19,0	Quecksilber <i>Hg</i> =
Gold <i>Au</i> = 197,0	Rhodium <i>Rh</i> =
Indium <i>In</i> = 37,8	Rubidium <i>Rb</i> =
Iridium <i>Ir</i> = 198,0	Ruthenium <i>Ru</i> =

¹⁾ Man sehe: *Lothar Meyer*, Die modernen Theorien der Chemie. Breslau *Kekulé*, Lehrbuch der Chemie. 1. Bd. 1859.

stoff	<i>O</i> = 16,0	Titan	<i>Ti</i> = 50,0
sfel	<i>S</i> = 32,0	Uran	<i>U</i> = 120,0
.	<i>Se</i> = 79,5	Vanadium	<i>Va</i> = 51,3
.	<i>Ag</i> = 108,0	Wasserstoff	<i>H</i> = 1
um	<i>Si</i> = 28,0	Wismuth	<i>Bi</i> = 210,0
stoff	<i>N</i> = 14,0	Wolfram	<i>W</i> = 184,0
tium	<i>Sr</i> = 87,5	Yttrium	<i>Y</i> = 61,7
l	<i>Ta</i> = 182,0	Zink	<i>Zn</i> = 65,2
r	<i>Te</i> = 128,0	Zinn	<i>Sn</i> = 118,0
ium	<i>Tl</i> = 204,0	Zirconium	<i>Zi</i> = 89,6
um	<i>Th</i> = 231,5		

§ 46.

Die **Aggregatzustände**. Die in dem letzten Paragraphen mitgetheilten **Ergebnisse** berechtigen uns, jeden Körper als ein Aggregat neben einander **angeordnete** Moleküle zu betrachten, welche einen äußerst kleinen Raum einnehmen, so daß wir sie als mit ihrem Schwerpunkt zusammenfallend andeuten dürfen. In welcher Weise diese Moleküle gruppiert sind, das wissen wir nicht; das aber mußten wir annehmen, daß sich die einzelnen Moleküle nicht berühren, daß sie in gewissen, wenn auch sehr kleinen, aber mit andern in der Physik vorkommenden Größen vergleichbaren Entfernungen von einander abstehen, welche sich bei einer Ausdehnung des Körpers vergrößern, bei einer Volumverminderung verkleinern.

Da alle materiellen Körper einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft unterworfen sind, welche sie einander zu nähern wie auch ihr Abstand und innere Beschaffenheit sein mag, so müssen wir annehmen, daß auch die Moleküle einer jeden Substanz mit einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft gegen einander benachbart werden, welche wegen der sehr kleinen Abstände der Moleküle groß sein muß. Wir bezeichnen diese Kraft als eine Anziehung der Moleküle gerade so, wie wir die zwischen den Weltkörpern thätigen Kräfte als eine Anziehung der Massen bezeichnet haben. Diese anziehende Kraft hat das Bestreben, die Moleküle einander zu nähern, und zwar um so mehr, je kleiner die Abstände derselben sind. Daraus würde nun aber folgen, daß die Körper in ihrem Innern nur dann im Gleichgewicht sein könnten, wenn die einzelnen Teile sich berühren, daß also die Körper porös sein könnten. Dem widerspricht indessen die unmittelbare Erfahrung; denn es gibt Körper, in denen wir die Poren direkt sehen können. Es muß deshalb zwischen den Molekülen noch eine andere Kraft thätig sein, welche verhindert, daß sie sich bis zur Berührung annähern, welche also als eine die Moleküle gegenseitig abstossende bezeichnen müssen, welche zunimmt, wenn der Abstand der einzelnen Teile abnimmt, so daß unter Wirkung dieser beiden einander entgegengesetzten Kräfte die Moleküle bereits in einem gewissen Abstände von einander in den Zustand des stabilen Gleichgewichts eintreten.

Wir haben zunächst aus der allgemeinen Massenanziehung den Schluß gezogen, daß die Moleküle sich anziehen müssen, und aus der Porosität, welche zwischen denselben auch abstossende Kräfte thätig sein müssen. Würden wir letztern analog den ersten betrachten, so müßten wir schließen,

dafs die Gröfse dieser abstofsenden wie die der anziehenden nur von dem Abstände der Moleküle und ihrer Masse, nicht von der Natur derselben abhängig sei. Dieser Ansicht von der Natur der zwischen den Molekülen thätigen Kräfte widerspricht aber eine Reihe bekannter Erfahrungen. Die Masse eines Körpers ist nämlich seinem Gewichte proportional, diejenige eines gegebenen Volumens demnach um so gröfser, je gröfser das Gewicht desselben ist. Da die Körper nun aus Molekülen bestehen, so müssen in einem gegebenen Volumen um so mehr Moleküle oder Moleküle von um so gröfserer Masse sein, je dichter der Körper ist. Unter beiden Annahmen müfste aber der dichtere Körper zugleich der festere sein, das heifst, er müfste seine Moleküle um so stärker zusammenhalten, da sowohl mit der gröfseren Annäherung der Moleküle als auch mit ihrer gröfseren Masse die anziehenden Kräfte gröfser werden. Man weifs aber, dafs das nicht der Fall ist; die Teile aller flüssigen Körper stellen einem Versuche, sie zu trennen, einen weit geringern Widerstand entgegen als die der festen Körper; viele feste Körper sind aber weniger dicht als flüssige, wie z. B. das Wasser dichter ist als die meisten Holzarten, das Quecksilber dichter als die meisten Metalle. Man könnte dagegen behaupten, dafs mit der gröfseren Annäherung der Moleküle auch die abstofsenden Kräfte wachsen müssen, dafs somit je nach dem Gesetze, nach welchem diese Kräfte sich mit der Entfernung oder der Masse ändern, die dichteren Körper nicht gerade die festeren sein müfsten. Würde aber die Gröfse der Molekularkräfte nur von der Entfernung und Masse der Moleküle abhängig sein, so müfsten alle Körper gleicher Dichtigkeit auch dieselbe Festigkeit zeigen, da in diesen die einzelnen Moleküle wenigstens nicht sehr verschiedene Masse und Abstände haben können. Aber auch dem widerspricht die Erfahrung, da wir feste Körper herstellen können, welche genau dieselbe Dichtigkeit haben wie Flüssigkeiten.

Wir müssen deshalb schliessen, dafs die zwischen den Molekülen thätigen Kräfte nicht lediglich von der Masse und den Abständen der Moleküle, sondern auch von der Natur derselben abhängig sind. Ob diese Abhängigkeit von der Beschaffenheit der Moleküle den anziehenden Kräften zukommt, die dann nicht mit denen der allgemeinen Gravitation zusammenfallen würden, oder den abstofsenden Kräften, oder beiden, das läfst sich nicht entscheiden. Indem man das unentschieden läfst, spricht man nur die in der Natur sich zeigenden Thatfachen aus, wenn man den einzelnen Teilen der Körper je nach ihrer Natur eine verschiedene Kohäsion beilegt, indem man ganz unbestimmt jene Kräfte, welche den Zusammenhalt der Körper bedingen, unter dem Namen der Kohäsion oder der Kohäsionskräfte zusammenfafst.

Je nach der verschiedenen Kohäsion der einzelnen Körperteilchen unterscheidet man drei Aggregatzustände und zwar

- 1) Die festen Körper. Dieselben haben ein selbständiges Volumen und eine selbständige Gestalt; ihre einzelnen Teilehen verschieben sich nicht leicht gegen einander, sondern es bedarf einer mehr oder weniger bedeutenden Kraft, diese zu verschieben oder zu trennen; einmal getrennt, lassen sie sich nicht wieder durch Zusammenlegen vereinigen.
- 2) Die flüssigen Körper. Sie haben ein vollständiges Volumen ohne selbständige Gestalt. Die geringste äufsere auf sie einwirkende Kraft ka-

Sauerstoff	<i>O</i> = 16,0	Titan	<i>Ti</i> = 50,0
Schwefel	<i>S</i> = 32,0	Uran	<i>U</i> = 120,0
Selen	<i>Se</i> = 79,5	Vanadium	<i>Va</i> = 51,3
Silber	<i>Ag</i> = 108,0	Wasserstoff	<i>H</i> = 1
Silicium	<i>Si</i> = 28,0	Wismuth	<i>Bi</i> = 210,0
Stickstoff	<i>N</i> = 14,0	Wolfram	<i>W</i> = 184,0
Strontium	<i>Sr</i> = 87,5	Yttrium	<i>Y</i> = 61,7
Tantal	<i>Ta</i> = 182,0	Zink	<i>Zn</i> = 65,2
Tellur	<i>Te</i> = 128,0	Zinn	<i>Sn</i> = 118,0
Thallium	<i>Tl</i> = 204,0	Zirkonium	<i>Zi</i> = 89,6
Thorium	<i>Th</i> = 231,5		

§ 46.

Die Aggregatzustände. Die in dem letzten Paragraphen mitgetheilten Erfahrungen berechtigen uns, jeden Körper als ein Aggregat neben einander liegender Moleküle zu betrachten, welche einen äußerst kleinen Raum einnehmen, so daß wir sie als mit ihrem Schwerpunkt zusammenfallend annehmen dürfen. In welcher Weise diese Moleküle gruppiert sind, das wissen wir nicht; das aber mußten wir annehmen, daß sich die einzelnen Moleküle nicht berühren, daß sie in gewissen, wenn auch sehr kleinen, aber doch mit andern in der Physik vorkommenden Größen vergleichbaren Entfernungen von einander abstehen, welche sich bei einer Ausdehnung des Körpers vergrößern, bei einer Volumverminderung verkleinern.

Da alle materiellen Körper einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft unterworfen sind, welche sie einander zu nähern sucht, wie auch ihr Abstand und innere Beschaffenheit sein mag, so müssen wir annehmen, daß auch die Moleküle einer jeden Substanz mit einer in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte wirkenden Kraft gegen einander getrieben werden, welche wegen der sehr kleinen Abstände der Moleküle sehr groß sein muß. Wir bezeichnen diese Kraft als eine Anziehung der Moleküle gerade so, wie wir die zwischen den Weltkörpern thätigen Kräfte als eine Anziehung der Massen bezeichnet haben. Diese anziehende Kraft muß das Bestreben haben, die Moleküle einander zu nähern, und zwar um so mehr, je kleiner die Abstände derselben sind. Daraus würde nun aber folgen, daß die Körper in ihrem Innern nur dann im Gleichgewicht sein könnten, wenn die einzelnen Teile sich berühren, daß also die Körper nicht porös sein könnten. Dem widerspricht indessen die unmittelbare Anschauung; denn es gibt Körper, in denen wir die Poren direkt sehen können. Es muß deshalb zwischen den Molekülen noch eine andere Kraft thätig sein, welche verhindert, daß sie sich bis zur Berührung annähern, welche wir also als eine die Moleküle gegenseitig abstossende bezeichnen müssen, und welche zunimmt, wenn der Abstand der einzelnen Teile abnimmt, so zwar, daß unter Wirkung dieser beiden einander entgegengesetzten Kräfte die Moleküle bereits in einem gewissen Abstände von einander in den Zustand des stabilen Gleichgewichts eintreten.

Wir haben zunächst aus der allgemeinen Massenanziehung den Schluss gezogen, daß die Moleküle sich anziehen müssen, und aus der Porosität, daß zwischen denselben auch abstossende Kräfte thätig sein müssen. Würden wir die letztern analog den ersten betrachten, so müßten wir schließen,

Dafs in der That in den beiden eben besprochenen Fällen zwischen den genäherten oder entfernten Molekülschichten abstofsende oder anziehende Kräfte wirksam sind, das läfst sich sofort erkennen, wenn wir die äußeren Kräfte aufhören lassen zu wirken, denn wir nehmen sofort eine Bewegung der Molekülschichten gegen ihre ursprüngliche Gleichgewichtslage wahr, der komprimierte Cylinder dehnt sich wieder aus, der ausgedehnte zieht sich wieder zusammen. Diese Eigenschaft der Körper, das Bestreben, ihre ursprüngliche Gestalt und das ursprüngliche Volumen wieder anzunehmen, wenn die Kraft, welche kleine Formänderungen an ihnen hervorgebracht hat, aufhört zu wirken, bezeichnet man mit dem Namen der Elasticität.

Die Existenz dieser Eigenschaft gibt uns einen weitem Aufschluß über die Natur der zwischen den Molekülen thätigen Kräfte; sie zeigt, dafs die abstofsenden Kräfte mit zunehmender Entfernung der Moleküle weit rascher abnehmen als die anziehenden Kräfte. Denn wenn die Moleküle in der Gleichgewichtslage sind, sind die anziehenden und abstofsenden Kräfte auf einander gleich. Mit Änderung der Abstände müssen sich nun sowohl die anziehenden als auch die abstofsenden Kräfte in demselben Sinne ändern. Da nun aber eine gröfsere Annäherung Abstofsung, eine gröfsere Entfernung Anziehung hervortreten läfst, so folgt, dafs bei Verringerung des Abstandes die abstofsenden Kräfte rascher wachsen, bei Vergröfserung des Abstandes rascher abnehmen als die anziehenden Kräfte.

Die besprochenen beiden Fälle sind nicht die einzigen, bei denen sich die Elasticität der festen Körper zeigt, sie zeigt sich ebenso, wenn wir einen Stab biegen oder ihn um eine in ihm befindliche Axe zu drehen suchen, während sein eines Ende festgehalten wird, wenn wir ihn tordieren. Wir werden indes sehen, dafs wir die elastischen Kräfte in diesen Fällen auf die zuerst besprochenen zurückführen können.

Die Untersuchung der Elasticität fester Körper ist eine der schwierigsten auf dem ganzen Gebiete der Physik; um die Gesetze derselben vollständig zu übersehen, bedarf es der kompliziertesten mathematischen Entwicklungen und der feinsten Versuche. Wir müssen uns deshalb hier darauf beschränken, die Resultate der Untersuchungen vorzuführen, indem wir gleichzeitig, so weit es möglich ist, den innern Zusammenhang derselben darlegen¹⁾.

§ 48.

Elasticität beim Zuge. Der einfachste Fall aller Probleme über Elasticität ist der, dafs man einen dünnen soliden Stab, der an seinem einen Ende befestigt ist, durch einen Zug oder Druck in seiner Längsrichtung ausdehnt oder zusammendrückt. So lange die Veränderungen, welche die wirksame Kraft hervorbringt, klein genug sind, mufs die durch

¹⁾ Die wichtigsten allgemeinen Untersuchungen über Elasticität finden sich in Poisson, Mémoire sur les mouvements des corps élastiques. Mémoires de l'Académie des sciences. Paris. T. VIII.

Cauchy, Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre d'un corps solide. Exercices des Mathématiques T. II und III.

Lamé, ausser einer Reihe von Abhandlungen besonders in seinen Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. II. édit. Paris 1852. Kirchhoff, Abhandlungen über Elasticität. Crelles Journal Band 40 und Bd. 41. Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. Leipzig 1862.

geobenes Gewicht beim Zusammendrücken hervorgebrachte Verkürzung sein der durch die Ausdehnung bewirkten Verlängerung; es genügt den Fall der Ausdehnung zu betrachten und die Beziehungen aufzu-
 welche zwischen der Belastung und der eintretenden Verlängerung
 den. Die einfachste Methode der Untersuchung ist die von Wertheim
 andte. Derselbe befestigte an einer festen Mauer ein Kniestück von
 arkem Eisen *B* (Fig. 54). Dasselbe endigt in einer ebenen vertikalen
 von gehärtetem Stahl, gestreift wie
 eile, gegen welche eine Platte, eben-
 en Stahl und an der einen Seite ebenso
 ft, paßt und mittels Schrauben *C* an-
 kt werden kann. Diese beiden Stücke
 als Backen eines starken Schraub-
 und zwischen ihnen wird der Draht,
 Elasticität man untersuchen will, durch
 sehr starken Druck befestigt.

an dem untern Ende des Drahtes wird
 einer gleichen schraubstockartigen
 atung ein Haken befestigt und an diesen
 Wagschale *E* angehängt, welche die
 len Gewichte aufnimmt. Sind die Ge-
 hinreichend schwer, so dehnt sich der
 merklich aus, verkürzt sich aber wieder
 der früheren Länge, wenn man die Ge-
 fortnimmt. Zur Messung der Ver-
 ang bedarf es gewisser Vorsichtsmaßs-

Venn man die Gewichte in die Wag-
 sehr rasch einsetzt, so erteilt man
 apparat Stöße, durch welche man den
 zerreißen kann. Um diese zu ver-
 ist die Wagschale mit drei langen
 allschrauben *HH* versehen, welche man
 egnn des Versuches so weit hinab-
 bt, dafs sie den Boden berühren und
 die Wagschale tragen; dann wird die
 belastet, und dann erst hebt man die
 eben sehr langsam, um allmählich das
 at seine ziehende Wirkung ausüben zu

Dabei hat man keine Stöße zu be-
 en. Bei der Beobachtung hat man sich
 noch vor einem leicht zu begehenden

zu schützen. Wählt man nämlich feine Drähte, so sind diese stets
 len Stellen gebogen und gekrümmt. Ein Anhängen der Gewichte
 t nun zunächst ein Geradestrecken und dadurch scheinbar ein Ver-
 des Drahtes. Um diese Täuschungen zu vermeiden, ist es not-
 anfänglich ein kleines Gewicht in die Schale zu legen, welches hin-
 den Draht gerade zu machen und dann erst allmählich die Schale
 zu belasten. Von da an zählt man dann auch erst die Gewichte.

Fig. 54.



Die Verlängerungen des Drahtes, welche immer sehr klein sind, mißt man mit dem Kathetometer; man stellt dasselbe dem Drahte ein für allemal fest gegenüber und visiert mit dem Fernrohr desselben auf zwei feine an den Enden des Drahtes angebrachte Marken T und T' . Der Unterschied der Fernrohrstellungen des Kathetometers liefert dann in allen Fällen die Länge des Drahtes, sowohl vor als nach der Belastung; die Differenz zwischen den beobachteten Längen vor und nach der Belastung gibt dann die infolge der Belastung eintretende Verlängerung. Mit Hilfe dieser Methode hat Wertheim¹⁾ zunächst die schon früher von Hooke²⁾, S'Gravesande³⁾, Th. Young⁴⁾ u. a. aufgestellten Gesetze der Elasticität bestätigt. Dieselben sind:

1) Die Verlängerungen eines Drahtes sind bei demselben angehängtem Gewicht der Länge des Drahtes proportional. Um das Gesetz nachzuweisen, hat man auf dem Drahte nur mehrere Marken in gleicher Distanz zu ziehen; man findet dann nach der Belastung, daß der Abstand der verschiedenen Marken sich gleich viel vergrößert hat. Da nun die Verlängerung des ganzen Drahtes gleich der Summe der Ausdehnungen seiner einzelnen Teile ist, so folgt, daß dieselbe der Länge des Drahtes proportional ist.

2) Die Verlängerung eines gegebenen Drahtes ist der Größe des spannenden Gewichtes direkt proportional. Aus diesem Satze folgt, daß die durch kleine Verschiebungen der Moleküle hervorgerufenen elastischen Kräfte den Verschiebungen selbst proportional sind. Denn wenn unter Wirkung des spannenden Gewichtes Gleichgewicht eingetreten ist, so beweist das, daß die von einander entfernten Molekülschichten sich mit der dem spannenden Gewichte gleichen Kraft anziehen. Da nun die Verschiebungen der Moleküle dem spannenden Gewichte proportional sind, so folgt auch, daß die elastischen Kräfte den Verschiebungen proportional sind.

3) Die Verlängerung verschieden dicker Drähte ist bei gleichen spannenden Gewichten dem Querschnitt der Drähte umgekehrt proportional, von der Gestalt des Querschnittes aber unabhängig. Dieser Satz folgt auch schon unmittelbar aus der Überlegung, daß wir einen Stab n facher Dicke als aus n Stäben einfacher Dicke bestehend ansehen können; damit deshalb ein solcher Stab dieselbe Verlängerung erhalte, bedarf er ein n mal so großes Gewicht als der einfache Stab.

4) Schließlich ist die Verlängerung abhängig von der Natur des Drahtes, den wir belasten.

Fassen wir diese vier Sätze in einen Ausdruck zusammen, so können wir die Verlängerung v , welche ein Draht von der Länge l und dem Querschnitte q durch ein Gewicht p erhält, darstellen durch die Gleichung

$$v = c \cdot \frac{p \cdot l}{q},$$

worin c eine für jede Substanz besondere Konstante ist, welche die Verlänge-

¹⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. t. 12. Poggend. Annal. Ergänzungsband II.

²⁾ Hooke, Philosophical tracts and Collections. London 1679.

³⁾ S'Gravesande, Physicae elementa mathematica. T. I.

⁴⁾ Th. Young, Course of lectures on natural Philosophy. London 1807.

g bedeutet, welche ein aus ihr verfertigter Stab durch die Gewichtseinheit erhält, wenn seine Länge und sein Querschnitt der Einheit gleich

Als Einheit des Gewichtes nimmt man das Kilogramm, als Einheit der Länge das Meter, als Einheit des Querschnittes das Quadratmillimeter.

Die Grösse p gibt uns nach 2) gleichzeitig die bei einer Verlängerung zwischen den Molekülschichten auftretende elastische Kraft; lösen wir die Gleichung nach p auf, so erhalten wir

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{c} \cdot \frac{v}{l}.$$

Der Quotient $\frac{p}{q}$ gibt uns die in der Querschnittseinheit auftretende elastische Kraft, der Quotient $\frac{v}{l}$ die Verlängerung des Stabes, gemessen in Theilen seiner ursprünglichen Länge, oder die Verlängerung der Längeneinheit. Setzen wir diese Quotienten gleich p_0 und δ , so erhalten wir

$$p_0 = \frac{1}{c} \cdot \delta.$$

Den reciproken Wert des Koefficienten c bezeichnet man als den Elasticitätskoefficienten oder den Elasticitätsmodulus; setzen wir denselben gleich E , so wird schliesslich

$$p_0 = E \cdot \delta,$$

die in der Querschnittseinheit bei kleinen Veränderungen auftretende elastische Kraft ist gleich dem Produkte aus dem Elasticitätsmodul und der Bruchtheilen der ursprünglichen Länge gemessenen Verlängerung.

Der soeben eingeführte Elasticitätsmodul einer Substanz ist der reciproke Theil der Verlängerung, welche die Längeneinheit eines Stabes der betreffenden Substanz durch die auf die Querschnittseinheit beim Zuge wirkende Gewichtseinheit erhält. In dieser Weise wird derselbe auch bestimmt; kann denselben indes auch anders definieren. In der Gleichung

$$p_0 = E \cdot \delta$$

ist $p_0 = E$, wenn δ gleich eins wird. Der Elasticitätskoefficient ist also das Gewicht, welches einem Stab der betreffenden Substanz vom Querschnitt eins eine der Einheit gleiche Verlängerung gibt, welche also die Länge des Stabes oder den Abstand der Molekülschichten in demselben vergrößern würde, vorausgesetzt, daß die für kleine Änderungen geltenden Gesetze soweit gültig wären. Dieser Definition entsprechend drückt man den Elasticitätsmodul einer Substanz auch gewöhnlich durch Gewichte aus.

Wertheim hat nach der angegebenen Methode eine Anzahl Elasticitätskoefficienten bestimmt¹⁾, wir lassen dieselben hier folgen.

¹⁾ Wertheim, Poggend. Annal. Ergänzungsband II.

Tabelle der Elasticitätskoefficienten verschiedener Metalle bei verschiedenen Temperaturen.

Metalle	Koefficienten bei			Koefficienten aus Longitudinalen bestimmt
	15°—20°C.	100°C.	200°C.	
Blei gezogen	1883			2278
„ angelassen	1727	1630	—	2146
Gold gezogen	8131			8599
„ angelassen	5584	5408	5482	6372
Silber gezogen	7357			7576
„ angelassen	7140	7274	6374	7242
Zink gezogen	8734			9555
Kupfer gezogen	12449			12536
„ angelassen	10519	9827	7862	12540
Platin gezogen	17044			17165
„ angelassen	15518	14178	12964	15611
Eisen gezogen	20869			19903
„ angelassen	20794	21877	17700	19925
Gußstahl gezogen	19549			19823
„ angelassen	19561	19014	17926	19828
Engl. Stahl gezogen	18809			19445
„ angelassen	17278	21292	19278	19200

Die Zahlen der letzten Kolumne gelten ebenfalls für die Temperatur 15°—20°C., die Methode, nach welcher sie erhalten wurden, werden später besprechen¹⁾).

Obige Zahlen zeigen, daß die Elasticitätskoefficienten nicht nur für verschiedene Metalle, sondern auch für ein und dasselbe Metall verschieden können, je nachdem dasselbe als gezogener Draht oder nach vorhergegangener Erhitzen untersucht wird.

Die in obiger Tabelle erhaltenen Zahlen liefern uns nicht nur elastische Kraft bei Verlängerung eines Stabes, sondern auch bei einer Verkürzung durch auf die Endflächen des Stabes angebrachte Drucke, da der im Anfange dieses Paragraphen gemachten Bemerkung die Gesetze bei solchem Drucke stattfindenden Verkürzungen mit denen der Verlängerung zusammenfallen, so lange wir nur kleine Veränderungen in Betracht ziehen.

§ 49.

Volumveränderung während des Zuges. Wir haben bisher die Veränderungen in der Länge eines Stabes betrachtet, welche auftreten wenn man einen Stab ausdehnt oder zusammendrückt; man sieht aber leicht, daß auch der Querschnitt eines solchen Stabes bei der Ausdehnung oder Zusammendrückung nach der Längsaxe sich ändern muß. Es ist ferner wahrscheinlich, daß der Querschnitt kleiner werden muß, wenn man den Stab verlängert. Man kann dieses auch sehr leicht mittels eines einfachen Versuches nachweisen, den Wertheim²⁾ angestellt hat. Er nahm sehr sorgfältig gearbeitete

¹⁾ Man sehe § 161 dieses Bandes.

²⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII. Page Annal. LXXVIII.

Kautschukstreifen (Fig. 55) von ungefähr 300 Millimeter Länge. Dieselben hatten die Gestalt von Prismen mit quadratischer Grundfläche. Die Länge einer Seite war zwischen 9 und 47 Millimeter. An ihren beiden Enden vermah er sie mit eisernen Ansätzen *A* und *B*, in denen die Kautschukstreifen fest angebracht waren. Die Ansätze hatten Haken; mittels des einen wurde der Kautschukstreifen vertikal aufgehängt; an dem andern, *B*, wurde das ziehende Gewicht *P* angebracht. Da der Kautschuk sich äußerst leicht ausdehnt, so verlängerte sich der Streifen sehr bedeutend; die Verlängerung wurde gemessen. Da der Querschnitt des Streifens ferner sehr groß war, so konnte man ihn mittels eines Zirkels messen und so die Veränderungen des Querschnittes bestimmen, welche durch die Verlängerung der Streifen entstanden. Man beobachtete, was vorausgesehen war, daß der Querschnitt des Kautschukstreifens kleiner wurde.

Fig. 55.



Bezeichnen wir nun die ursprüngliche Länge eines Drahtes mit *L*, so wird durch die Einwirkung irgend eines Gewichtes diese Länge in $L(1 + \delta)$ übergehen, wo δ wieder die Verlängerung der Längeneinheit darstellt und gleich $\frac{p_0}{E}$ ist. Der Querschnitt des Stabes, dessen Breite *B*, dessen Dicke *D* war, wird nach der Belastung dann sein $B \cdot D(1 - \mu \cdot \delta)^2$, wenn wir die Verkürzung des Querdurchmessers des Stabes, die jedenfalls der Verlängerung des Stabes proportional sein muß, mit $\mu\delta$ bezeichnen. Entwickeln wir den Ausdruck für den Querschnitt nach der Belastung, so können wir, da δ immer nur sehr klein ist, $\mu^2 \delta^2$ vernachlässigen und erhalten dann für den Querschnitt des Stabes

$$BD(1 - 2\mu\delta)$$

und für das Volumen desselben nach dem Zuge

$$LBD(1 + \delta)(1 - 2\mu\delta),$$

oder auch, wenn wir das sehr kleine Glied $2\mu\delta^2$ wieder außer Acht lassen

$$LBD(1 + \delta - 2\mu\delta).$$

Je nach dem Werte von μ kann deshalb eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Volumens eintreten. Es hat sich nun aus sämtlichen in der Richtung angestellten Versuchen ergeben, daß in der That eine Vergrößerung des Volumens eintritt, somit daß $2\mu\delta < \delta$ oder daß $\mu < 0,5$, aber größer als Null ist.

Welches indes der wirkliche Wert von μ innerhalb dieser Grenzen ist, darüber herrscht wegen der großen Schwierigkeit, diese Größe zu bestimmen, noch einige Unsicherheit. Navier¹⁾, Poisson²⁾, Lamé und Clapeyron³⁾ gelangen in ihren theoretischen Untersuchungen über Elasticität zu dem Resultate, daß $\mu = \frac{1}{2}$ sei, ein Resultat, welches Poisson⁴⁾ durch Versuche von Cagniard de Latour bestätigt fand. Derselbe befestigte auf

¹⁾ Navier, Mémoires de l'Académie des sciences. T. VII.

²⁾ Poisson, Mémoires de l'Académie des sciences. T. VIII.

³⁾ Lamé und Clapeyron, Crelles Journal für Mathematik. Bd. VII.

⁴⁾ Poisson teilt diesen Versuch mit Annales de chim. et de phys. T. XXXVI. Legend. Annal. Bd. XII.

einem festen Fußbrett (Fig. 56) einen Metalldraht, so daß derselbe recht aufstieg; das obere Ende des Drahtes wurde an einem Arm ungleicharmigen Hebels L befestigt, dessen anderer Arm mit einer

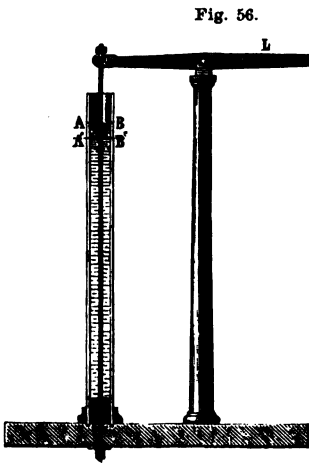


Fig. 56.

wichte P beschwert wurde. Die Länge des unbelasteten Drahtes betrug 2^m , war genau bemessen und es wurde dann die Dehnung beobachtet, welche die Belastung des Hebels bewirkte. Die letztere wurde so bemessen, daß die Verlängerung des Drahtes 6^{mm} betrug. Der Draht war, wie die Fig. 56 zeigt, in einer engen, unten mit Wasser gefüllten Röhre umgeben, deren Durchmesser und die Länge genau gemessen. In der Fig. 56 sieht man, in dem sich der Draht durch den Zug zu verlängern begann, sah man das Niveau

des Wassers in der Röhre von AB bis $A'B'$ sinken; ein Beweis, daß bei der Verlängerung des Drahtes eine Verminderung des Querschnitts eintritt. Die Niveaudifferenz vor und nach dem Zuge wurde genau gemessen. Darauf wurde der Draht unten am Fußbrett gelöst, in die mit Wasser gefüllte Röhre eingesetzt, so daß sein unteres Ende den Boden der Röhre berührte, und das Niveau des Wassers wieder beobachtet. Darauf wurde der Draht so weit emporgezogen, daß das obere Ende 6^{mm} aus der Röhre emporragte, daß also ein ebenso großes Stück des Drahtes aus der Röhre emporragte als bei dem vorigen Versuche. Da dann das Volumen des in das Wasser tauchenden Drahtes um das herausgezogene Stück kleiner wurde, mußte das Niveau des Wassers wieder sinken, und es ergab sich jetzt doppelt so tief sank als bei dem vorigen Versuch, somit war die Volumverminderung des jetzt noch in das Wasser tauchenden Drahtes doppelt so groß als bei der Verlängerung des Drahtes. Daraus ergibt sich folgendes: bezeichnen wir die Länge des cylindrischen Drahtes mit l , so nimmt, wenn wir die Verlängerung pro Längeneinheit mit δ bezeichnen, bei der Ausdehnung des Drahtes in das Wasser tauchende Stück des Drahtes das Volumen

$$l \cdot r^3 \pi (1 - 2\mu\delta)$$

ein, da wir, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, voraussetzen, daß die Länge des eintauchenden Stückes nicht geändert ist. Das Volumen des Stückes ist dann nur kleiner geworden, weil der Querschnitt des Drahtes im Verhältnis $1 : 1 - 2\mu\delta$ verkleinert ist.

Das Volumen des in das Wasser eintauchenden Drahtes ist in beiden Versuchen dasselbe, wenn der Draht ohne Dehnung um die Länge der Verlängerung aus dem Wasser hervorgezogen wird. Das Volumen

dann noch im Wasser befindlichen Drahtstückes ist

$$l \cdot r^2 \pi (1 - \tfrac{1}{2} \delta);$$

somit erhalten wir

$$l r^2 \pi (1 - 2\mu \delta) = l r^2 \pi (1 - \tfrac{1}{2} \delta),$$

oder

$$2\mu \delta = \tfrac{1}{2} \delta,$$

$$\mu = \tfrac{1}{4}.$$

Dieser Versuch gibt also für die Verminderung des zur Zugrichtung senkrechten Durchmessers eines Drahtes ein Viertel der Verlängerung, entsprechend der Theorie von Navier und Poisson.

Weder die theoretischen Entwicklungen, aus welchen der Wert $\mu = 0,25$ geschlossen wurde, noch auch der denselben bestätigende Versuch sind einwurfsfrei. Was zunächst den Versuch von Cagniard de Latour angeht, so kann man aus demselben mit Sicherheit kaum mehr schließen, als daß bei der Verlängerung eine Querkontraktion eintritt; genaue Messungen sind bei der angewandten Methode nicht möglich. Denn zunächst ist die Änderung des Wasserniveaus in der Röhre, welche einen den Durchmesser des Drahtes weit übertreffenden Durchmesser hat, bei der an dem Draht überhaupt stattfindenden äußerst kleinen Änderung des Volumens so unbedeutend, daß die geringste Ungenauigkeit beim Ablesen das Resultat wesentlich beeinträchtigen muß, und eine solche Ungenauigkeit ist um so weniger zu vermeiden, da das Wasser die Innenwand der Röhre niemals ganz gleichmäßig benetzt. Dazu kommt ferner, daß der Draht beim Emporziehen aus der Flüssigkeit immer Flüssigkeit mit sich heraushebt, deren Menge zudem bei den verschiedenen Versuchen verschieden ist, schon aus dem Grunde, weil der Umfang des herausgezogenen Drahtes verschieden ist. So klein auch die Fehler sind, bei der Kleinheit der zu messenden Größen wird die Sicherheit des Resultates dadurch wesentlich beeinträchtigt.

Spätere theoretische Untersuchungen haben dann auch gezeigt, daß das aus den Untersuchungen von Navier und Poisson sich ergebende Resultat durch specielle nicht notwendige Annahmen erhalten ist; die Untersuchungen von Cauchy¹⁾, Lamé²⁾ und Kirchhoff³⁾ haben vielmehr gezeigt, daß die Theorie der Elasticität nur zu dem vorhin bereits angedeuteten Resultate führt, daß der Wert von μ zwischen 0 und $\tfrac{1}{2}$ liegt, daß der Versuch in jedem Falle über den Wert von μ innerhalb dieser Grenzen entscheiden muß.

Cauchy und in ganz ähnlicher Weise Lamé gehen von folgender Annahme aus. Denken wir uns ein rechteckiges Parallelepiped, welches nach allen Richtungen gleiche Elasticität besitzt; dasselbe erhalte auf zwei gegenüberliegenden Flächen, und zwar senkrecht zu denselben solche Ziehungen, daß die Flächeneinheit den Zug p_1 erhält. Dieser Zug hat dann eine Verlängerung des Parallelepipeds in der Zugrichtung zur Folge, welche für die Längeneinheit des Parallelepipeds gleich δ_1 sei; in den zur Zugrichtung senkrechten Richtungen findet dann ebenfalls eine Veränderung der Seiten des

¹⁾ Cauchy, Exercices de Mathématiques. T. III. p. 182 und p. 205 ff.

²⁾ Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. II. éd. p. 65 ff.

³⁾ Kirchhoff, Crelles Journal. Bd. XL und LVI.

Parallelepipeds statt, so daß die Breite desselben $B(1 + \mu\delta_1)$ und die Dicke $(1 + \mu\delta_1)$ wird. Ob diese letztere Veränderung eine Verlängerung oder Verkürzung sein wird, hängt dann von dem Vorzeichen von μ ab; ist μ positiv, so ist die seitliche Veränderung von derselben Art wie δ , ist es negativ, so ist die seitliche Veränderung jener in der Zugrichtung stattfindenden entgegengesetzt. Das Volumen des Parallelepipeds ist dadurch geworden

$$V(1 + \delta_1 + 2\mu\delta_1).$$

Die Volumeinheit hat sich somit um $\delta_1 + 2\mu\delta_1$ verändert. Setzen wir diese die Volumeinheit treffende Änderung gleich v , so nehmen Cauchy und Lamé an, daß

$$p_1 = k\delta_1 + Kv,$$

worin k und K zwei von der Natur der Substanz des Parallelepipeds abhängige Konstante sind; sie machen also die Annahme, daß man die durch den Zug p_1 im Innern hervorgebrachte der Zugrichtung parallele Spannung der parallel der Zugrichtung eintretenden Veränderung und der infolge dieses Zuges stattfindenden Volumänderung proportional setzen könne.

Werden nun die drei Flächenpaare des Parallelepipeds gleichzeitig durch Ziehungen p_1, p_2, p_3 angegriffen, so werden die jeder Zugrichtung parallelen Veränderungen $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ sein, und das Volumen des Parallelepipeds V wird übergehen in

$$V(1 + (\delta_1 + \delta_2 + \delta_3)),$$

so daß also die Veränderung der Volumeinheit v wird

$$v = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3.$$

Diese drei Drucke p_1, p_2, p_3 oder die ihnen gleichen elastischen Spannungen sind in dem Falle nach obiger Annahme gegeben durch die drei Gleichungen:

$$p_1 = k\delta_1 + Kv; \quad p_2 = k\delta_2 + Kv; \quad p_3 = k\delta_3 + Kv.$$

Diese drei Gleichungen behalten ihre Gültigkeit, welches auch die Drucke p_1, p_2, p_3 sein mögen; also auch für den Fall, daß zwei derselben, p_2 und p_3 gleich Null werden, daß also das betrachtete Parallelepiped nur nach einer Richtung einen Druck oder einen Zug erfährt, sie behalten ihre Gültigkeit für den Fall, den wir untersuchen. In dem Falle sind

$$k\delta_2 + Kv = k\delta_3 + Kv = 0 \dots\dots\dots (a)$$

$$\delta_2 = \delta_3 = \mu\delta_1,$$

und die Volumveränderung wird dann

$$v = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = \delta_1(1 + 2\mu).$$

Eine der beiden Gleichungen (a) liefert nun

$$v = -\frac{k}{K} \cdot \delta_2,$$

$$\begin{aligned}\delta_1(1 + 2\mu) &= -\frac{k}{K} \cdot \mu \delta_1; \\ K + 2K\mu &= -k\mu; \\ \mu &= -\frac{K}{2K + k} = -\frac{1}{2 + \frac{k}{K}}.\end{aligned}$$

ergibt sich somit zunächst, da das Vorzeichen von μ negativ ist, eitleiche Veränderung immer derjenigen in der Druckrichtung entztt ist, dafs also beim Zuge eine Querkontraktion, beim ne Querdilatation eintritt. Ferner ergibt sich, dafs der μ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist; welcher Wert dem Koeffizienten ommt, das hängt von dem Verhältnis der beiden Kon- und K ab. Der von Navier und Poisson gegebene Wert gibt sich, wenn $k = 2K$ ist, eine Beziehung, die sich retisch nicht folgern läfst. Überhaupt gibt die Theorie icität über die Beziehung zwischen diesen beiden Kon- einen weitem Aufschluß, sie läfst es selbst unentschieden, Beziehung für alle Substanzen dieselbe ist, oder ob sie hiedene Substanzen verschieden sein könne. theim¹⁾ schliefst aus seinen Versuchen das erstere, er seinen Versuchen mit Kautschuk, Glas und Messing dafs

$$\mu = -\frac{1}{2},$$

s $k = K$ ist, und glaubt deshalb, dafs diese Beziehung emein das Verhältnis der beiden Konstanten wiedergebe. iche mit Kautschuk haben wir vorhin bereits erwähnt; δ nur etwa $\frac{1}{2}$ beträgt, findet sich in der That μ ziemlich ich $\frac{1}{2}$.

len anderen Versuchen wandte er auf einen Vorschlag von ohne Naht gezogene Röhren von Messing oder Glasröhren 57) an, welche mit ihren Enden an andere kurze, aber löhren $B'B'$ befestigt waren. Die untere war unten ver-, die obere an beiden Seiten offen, und an ihrem obern einer Fassung versehen, durch welche eine sehr enge F mit dem Innern der Röhre kommunizierte. Diese so teten Röhren wurden mit Wasser bis zur Marke F der gefüllt. Man befestigte die Röhre an ihrem obern dafs sie vertikal herabhing, und belastete sie an ihrem nde mit einem Gewichte p . Sie dehnte sich dann gerade ie ein solider Metallstab von derselben Substanz.

mafs einerseits die Verlängerungen dieser Vorrichtung, its das Herabsinken der Flüssigkeit in der Glasröhre F' . such ergab somit sowohl die Verlängerung δ für die heit als auch andererseits die Vergrößerung $\delta(1 - 2\mu)$ nens für die Volumeinheit, und man hatte diese nur zu vergleichen. nun in Übereinstimmung mit den Versuchen am Kautschuk, dafs

Fig. 57.



¹⁾ Vertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII. Poggend. L XXXVIII.

$\delta(1 - 2\mu) = \frac{1}{3}\delta$, also $\mu = \frac{1}{3}$ war, daß also die Änderung des Durchmessers für die Längeneinheit $\frac{1}{3}\delta$ war.

Die nach dieser Methode von Wertheim erhaltenen Zahlen, zusammengestellt mit den nach dem Poissonschen und dem Wertheimschen Werte von μ aus der beobachteten Verlängerung berechneten Werte der Volumvermehrung enthält folgende kleine Tabelle.

No. der Röhren	$V \cdot \delta(1 - 2\mu)$		
	berechnet mit $\mu = \frac{1}{3}$	beobachtet	berechnet mit $\mu = \frac{1}{3}$
Messing I	0,81047	0,52017	0,54032
II	0,87866	0,54363	0,58578
III	0,88949	0,56104	0,59299
Glas I	5,3650	3,8613	3,5767
II	4,0639	2,4217	2,7093
III	1,5282	1,1472	1,0188
IV	1,1938	0,7786	0,7959

Für Glas ergeben diese Versuche ziemlich genau den Wert $\mu = \frac{1}{3}$, da die damit berechneten Werte der Volumveränderung bald größer bald kleiner als die beobachteten, und die Abweichungen nicht zu groß sind; für Messing ist dagegen trotz der ziemlich guten Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung dieser Wert zweifelhaft, da mit $\mu = \frac{1}{3}$ alle berechneten Zahlen zu groß werden; für Messing würde man aus diesen Beobachtungen $\mu = 0,315$ ableiten.

Man würde deshalb schon aus Wertheims Resultaten eher den Schluß ziehen, daß μ für verschiedene Substanzen verschieden sein kann, als daß es stets denselben Wert $\frac{1}{3}$ hat, ein Schluß, den auch die Versuche von Kirchhoff zu bestätigen scheinen. Kirchhoff¹⁾ bestimmte den Wert von μ , indem er an verschiedenen Stäben durch bestimmte Gewichte gleichzeitig Biegung und Torsion hervorbrachte; gerade wie nämlich der Elastizitätskoeffizient, wenn man ihn durch k und K ausdrücken will, den Wert von μ enthält, so ist auch auf Torsion und Biegung die Querkontraktion von Einfluß, so daß, wenn man beide beobachtet hat, sich daraus μ berechnen läßt. Die Versuche sind gemacht an drei Stäben von glashartem Stahl und an einem Stabe von hartgezogenem Messing. Für die ersten drei Stäbe fand er im Mittel $\mu = -0,294$, nämlich

für den ersten Stab $\mu = -0,293$,

„ „ zweiten „ $\mu = -0,295$,

„ „ dritten „ $\mu = -0,294$.

Für den Messingstab erhielt er dagegen $\mu = -0,387$, einen Wert also, der den für Stahl gefundenen und auch den von Wertheim allgemein angenommenen nicht unbeträchtlich übersteigt. Kirchhoff glaubt dem für das Messing gefundenen Werte μ nicht dieselbe Bedeutung beilegen zu können,

¹⁾ Kirchhoff, Poggend. Annal. Bd. CVIII. p. 369 ff.

da das gezogene Messing parallel der Zugrichtung eine andere Elasticität haben könne als senkrecht dazu; indes wird man wohl kaum den großen Unterschied zwischen Messing und Stahl lediglich dieser Verschiedenheit im Messing zuschreiben können.

Dieselbe Methode, welche Kirchhoff anwandte, hat später Okatow¹⁾ benutzt, um die Querkontraktion einer Anzahl verschiedener Stahlstäbe zu untersuchen; es ergab sich dabei, daß der Wert von μ sowohl für verschiedene Stahlarten von demselben Zustande als auch für dieselbe Stahlart in verschiedenen Zuständen verschieden ist. Er erhielt z. B. folgende Werte für μ

Stricknadelstäbchen.	Glatte runder engl. Stahl
a) ursprünglicher Zustand $\mu = - 0,2750$	$\mu = - 0,2989$
b) in Öl gehärtet $\mu = - 0,2969$	$\mu = - 0,3280$
c) ausgeglüht und langsam abgekühlt $\mu = - 0,3037$	$\mu = - 0,3281.$

Die für den glatten runden englischen Draht angegebenen Werte wurden fast ganz übereinstimmend an Drähten verschiedener Dimensionen gefunden, die Dicken waren etwa 4, 5 und 6^{mm}. Okatow glaubt, daß der ganz weiche Stahl der vollen Gleichheit nach allen Richtungen am nächsten kommt; deshalb spricht die Verschiedenheit von μ für die verschiedenen Stahlarten auch in diesem Zustande dafür, daß der Wert des Verhältnisses von Querkontraktion und Verlängerung nicht für alle Körper derselbe ist.

Für eine Anzahl von Stäben aus glattem runden Stahl, deren Länge bis zu 1 Meter, deren Durchmesser bis zu 2^{cm} betrug, erhielt Schneebeli²⁾ nach einer Methode, welche wir im dritten Abschnitt § 144 besprechen werden, als Wert von $\mu = - 0,296$, als die Stäbe federhart, und $\mu = - 0,303$, als die Stäbe ganz weich waren; Werte, welche mit denen von Kirchhoff und von Okatow für die erste Stahlart erhaltenen vortrefflich übereinstimmen.

Gegenüber der hier ausgesprochenen Ansicht, daß der Wert von μ für die verschiedenen Körper verschieden sei, hat kürzlich Cornu³⁾ wieder die Ansicht verteidigt, daß für wirklich nach allen Richtungen gleichmäßig elastische Körper der Wert von $\mu = - 0,25$ sein müsse. Er glaubt, daß Glas diesem gleichmäßig elastischen Zustand am nächsten kommt, und findet für dieses nach einer Methode, deren Princip wir im § 53 andeuten können, in der That Werte, welche nur wenig von 0,25 abweichen; sie liegen bei 6 Glasprismen zwischen $\mu = - 0,224$ und $- 0,257$.

Es ist indes wohl anzunehmen, daß, wie Okatow hervorhob, ein durch langsame Abkühlung ganz weich gewordener Stahl ebenso vollkommen nach allen Richtungen gleich elastisch ist als Glas, und dann würden die Versuche Cornus eher für die eben ausgesprochene Ansicht, daß μ nicht für alle Körper denselben Wert hat, ein Beleg sein.

¹⁾ Okatow, Poggend. Ann. Bd. CXIX.

²⁾ Schneebeli, Poggend. Ann. Bd. CXL.

³⁾ Cornu, Comptes Rendus. Bd. LXIX. pag. 333.

§ 50.

Kubische Zusammendrückbarkeit der festen Körper. Die in den beiden letzten Paragraphen besprochenen Konstanten, der Elasticitätskoeffizient und die Querkontraktion bedingen alle Erscheinungen, welche durch die Elasticität der festen Körper hervorgerufen werden; sind diese beiden Größen bekannt, so kann man alle Veränderungen, welche durch äußere Kräfte an dem Körper hervorgebracht werden, berechnen. Umgekehrt kann man aber auch aus derartigen Beobachtungen die eine oder die andere Konstante ableiten. Da wir nun aus den longitudinalen Änderungen, sei es durch direkte Beobachtung, sei es durch die im dritten Abschnitt ausführlicher zu besprechenden longitudinalen Schwingungen, den Elasticitätskoeffizienten mit großer Sicherheit ableiten können, so können wir die meisten elastischen Veränderungen gleichzeitig benutzen, um den Wert von μ zu bestimmen.

Wir betrachten zunächst die kubische Zusammendrückbarkeit der Körper, das heißt die Volumverminderung eines festen Körpers, wenn er von allen Seiten ganz gleichmäßig durch Kräfte, welche an jedem Punkte der Oberfläche normal zu derselben wirken, zusammengedrückt wird. Bei derartigen wirkenden Kräften verändern sich die Dimensionen des Körpers alle in demselben Verhältnisse, seine Gestalt bleibt sich immer ähnlich, und es tritt eine Verminderung seines Volumens ein. In welcher Weise diese Volumverminderung von den beiden Konstanten, dem Elasticitätskoeffizienten und dem Querkontraktionskoeffizienten abhängt, ergibt sich auf folgende Weise.

Für ein rechteckiges Parallelepiped hatten wir nach Cauchy ganz allgemein

$$p = k\delta + Kv \dots \dots \dots (1),$$

wenn p den auf die Flächeneinheit ausgeübten normalen Druck, δ die diesem Druck entsprechende lineare der Druckrichtung parallele Änderung, v die dabei stattfindende Änderung des Volumens, und k und K zwei Konstanten bezeichnen.

Für den Fall nun, daß die Kraft p nur an den Endflächen des Stabes wirkt, wird, wie wir sahen,

$$v = \delta (1 - 2\mu)$$

und μ gleich

$$\mu = \frac{K}{2K + k},$$

wenn wir jetzt mit μ den Zahlenwert der Querkontraktion bezeichnen.

Hieraus folgt dann für v , die Volumänderung, die bei dem Zutritt,

$$v = \delta (1 - 2\mu) = \delta \left(1 - \frac{2K}{2K + k} \right) = \delta \frac{k}{2K + k}.$$

Setzen wir diesen Wert für v in die Gleichung (1) ein, so wird

$$p = k \cdot \delta \left(1 + \frac{K}{2K + k} \right)$$

$$p = \frac{3K + k}{2 \frac{K}{k} + 1} \cdot \delta \dots \dots \dots (2).$$

Wir haben vorhin als Elasticitätskoefficienten jene Kraft definiert, welche an den Enden eines Parallelepipeds wirkend die Länge desselben in der Zugrichtung verdoppeln würde, welche somit $\delta = 1$ macht. Die Gleichung (2) liefert uns deshalb den Elasticitätskoefficienten in den beiden Konstanten K und k

$$E = \frac{3K + k}{2\frac{K}{k} + 1} \dots (3).$$

Der reciproke Wert des Elasticitätskoefficienten gibt uns die lineare Ausdehnung des Parallelepipeds oder seine Verkürzung, wenn die an den Endflächen wirkende Kraft der Einheit gleich ist, oder den linearen Ausdehnungskoefficienten, mit dem wir in jedem Falle die wirksame Kraft multiplicieren müssen, um die Verlängerung oder Verkürzung des ausgedehnten Parallelepipeds oder Cylinders zu erhalten. Bezeichnen wir diesen Quotienten mit C , so ist derselbe

$$C = \frac{2\frac{K}{k} + 1}{3K + k}.$$

Wird nun das Parallelepiped von allen Seiten ganz gleichmäßig zusammengedrückt oder ausgedehnt, so ist δ nach allen drei Richtungen dieselbe, und damit wird die Volumsveränderung $v = 3\delta$ oder die dann in einer Richtung stattfindende Linearänderung gleich $\frac{1}{3}v$. Damit erhalten wir aus der Gleichung (1), indem wir δ durch v ausdrücken,

$$p = \frac{1}{3}kv + Kv = \frac{3K + k}{3} \cdot \frac{1}{3}v,$$

$$v = \frac{3}{3K + k} \cdot p.$$

Der Koefficient der kubischen Kompressibilität, der Koefficient, mit dem wir den auf der Flächeneinheit normal zu derselben wirkenden Druck multiplicieren müssen, um für das Parallelepiped die Änderung der Volumeneinheit zu erhalten, ist somit

$$C_1 = \frac{3}{3K + k} \dots (4);$$

man sieht, hängt derselbe wesentlich ab von dem Verhältnis der beiden Konstanten K und k .

Kennt man für eine Substanz den Wert von E oder C , und beobachtet man den kubischen Kompressionskoefficienten C_1 , so kann man aus beiden den Wert des Verhältnisses K und k ableiten. Dividieren wir nämlich beide durch einander, so wird

$$\frac{C_1}{C} = \frac{3}{2\frac{K}{k} + 1},$$

$$\frac{K}{k} = \frac{3C - C_1}{2C_1}.$$

Wir können aber auch direkt C_1 sowie K und k durch C oder E und μ ausdrücken.

Die Gleichung (3) liefert

$$E \left(2\frac{K}{k} + 1 \right) = 3K + k \dots (3a),$$

oder da

$$1 - 2\mu = \frac{k}{2K + k} \dots (3b),$$

in Verbindung mit Gleichung (4)

$$\frac{E}{1 - 2\mu} = \frac{3}{C_1}$$

$$C_1 = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} = 3C(1 - 2\mu).$$

Die Gleichungen (3a) und (3b) liefern ferner

$$K = E \frac{\mu}{(1 - 2\mu)(1 + \mu)}; \quad k = \frac{E}{1 + \mu}.$$

Ebenso wie man hiernach aus den bekannten Werten von E den Wert von C_1 erhalten kann, läßt sich auch der Wert von μ aus Beobachtungen von C_1 und E ableiten.

Über die Kompression fester Körper hat Regnault bei Gelegenheit seiner Untersuchung über die Kompression der Flüssigkeiten einige Versuche angestellt¹⁾. Er benutzte zu diesen Versuchen Gefäße, deren Form und Substanz genau bestimmt waren, entweder Kugeln von Kupfer oder Messing, deren innerer und äußerer Durchmesser mit größter Genauigkeit

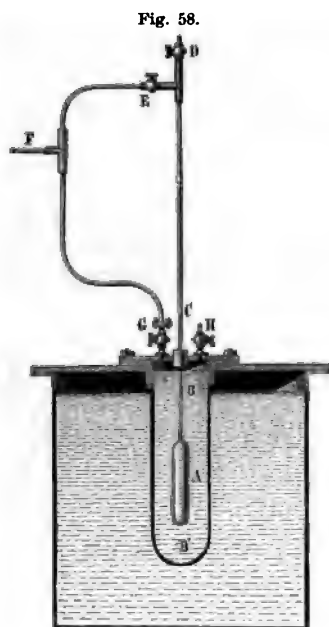


Fig. 58.

gemessen war, und mit deren Innendurchmesser eine lange Glasröhre in Verbindung stand. Er nahm ein Glasgefäß A (Fig. 58), dessen innere Kapazität und dessen äußeres Volumen mit größter Sorgfalt bestimmt waren. Das Gefäß füllte er bis zu einer Marke mit Wasser, welche sich auf der Glasröhre befand. Er senkte das Gefäß in einen ringsum mit Wasser gefüllten Behälter B und übte auf das Wasser in B einen Druck P aus, indem er aus einem Hahn E durch die Röhrenleitung FG in das Gefäß A komprimierte Luft wirkte. Auf diese Weise drückte er das Gefäß A von allen Seiten ganz gleichmäßig zusammen. Das Volumen desselben verminderte sich um eine dem Druck proportionale GröÙe, und das Wasser in der Röhre über C stieg; die Steighöhe mißt man auf dem Rohre angebrachten Teilstrichen ab. Die durch den äußeren Druck gebrachte Volumverminderung aus der

Steighöhe des Wassers ableiten, wenn man die Kapazität der Röhre zum Volumen des ganzen Gefäßes kennt. Dieses Verhältnis durch Wägung genau bestimmt.

¹⁾ Regnault, Relation des expériences etc. Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. T. XXI.

Aus den Beobachtungen der Volumverminderung von Hohlräumen läßt sich nicht unmittelbar auf den kubischen Kompressionskoeffizienten des Materials schließen, aus welchem die Wandung des Hohlraumes gefertigt ist, da die Volumverminderung des Hohlraumes eine andere sein muß als jene eines massiven Körpers, welche den Hohlraum ausfüllen würde. Dafs das der Fall sein muß, ergibt sich aus der einfachen Überlegung, dafs, wenn der Hohlraum mit demselben Material angefüllt ist, durch die Kompression im Innern desselben eine Spannung entstehen muß, welche den komprimierenden Kräften entgegenwirkt, welche Spannung fortfällt, wenn der innere Raum leer ist oder eine Flüssigkeit enthält, welche, wie bei den Versuchen von Regnault, aus dem Hohlraum infolge der Verminderung des Volumens austritt. Die Theorie der Elasticität gestattet aber auch in diesem Falle, die durch die Kompression eintretende Volumverminderung zu berechnen.

Durch den auf die äufere Kugelfläche wirkenden Druck werden die Radien der Kugel verkleinert; bezeichnen wir den Radius der innern Kugelfläche vor der Kompression mit R_0 , so wird derselbe nach der Kompression $R_0(1 - \varphi_0)$, wenn wir mit φ_0 einen sehr kleinen gleich zu bestimmenden Bruch bezeichnen. Der Hohlraum der Kugel, welcher vor der Kompression $\frac{4}{3}R_0^3\pi$ war, wird deshalb nach der Kompression $\frac{4}{3}R_0^3(1 - \varphi_0)^3\pi$ oder, da φ_0 nur sehr klein ist, $\frac{4}{3}R_0^3(1 - 3\varphi_0)\pi$. Die stattgefundene Volumverminderung ist deshalb

$$\Delta V = \frac{4}{3}R_0^3\pi - \frac{4}{3}R_0^3\pi(1 - 3\varphi_0) = \frac{4}{3}R_0^3\pi \cdot 3\varphi_0$$

oder in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens V

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\varphi_0.$$

Die Theorie der Elasticität ergibt nun¹⁾, dafs bei einer Hohlkugel, welche auf ihrer äufsern Fläche gleichmäfsig zusammengepreßt wird, die Verkürzung φ der Radien einer in der Kugelschale liegenden Kugelfläche vom Radius r gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = c + \frac{b}{r^3},$$

worin c und b zwei Konstante sind, welche abhängig sind von dem Drucke, den die Kugel erfährt, und den Radien der äufsern und innern Fläche der Hohlkugel. Sind diese beiden Radien R_1 und R_0 , und ist der Druck, der auf die Flächeneinheit der äufsern Fläche wirksam ist, gleich P_1 , der auf die Flächeneinheit der innern Fläche wirkende gleich P_0 , so erhält man für diese beiden Konstanten den Wert

$$c = \frac{1}{3K + k} \cdot \frac{P_1 R_1^3 - P_0 R_0^3}{R_1^3 - R_0^3}; \quad b = \frac{1}{2k} \cdot \frac{R_0^3 R_1^3 (P_1 - P_0)}{R_1^3 - R_0^3}$$

oder, wenn, wie bei den Versuchen von Regnault P_0 , der Druck auf die innere Fläche der Hohlkugel gleich 0 ist,

$$c = \frac{1}{3K + k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1; \quad b = \frac{1}{2k} \cdot \frac{R_0^3 \cdot R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

¹⁾ Man sehe Lamé, théorie mathématique de l'élasticité des corps solides p. 211 ff. Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper § 18. p. 50 ff.

Daraus folgt dann für φ

$$\varphi = P_1 \left\{ \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{1}{2k} \cdot \frac{R_0^3 \cdot R_1^3}{r^3 (R_1^3 - R_0^3)} \right\}.$$

Es folgt somit, daß in diesem Falle die Radien der verschiedenen der Hohlkugel liegenden Kugelflächen nicht in demselben Verhältnisse verkürzt werden, daß die Verkürzung vielmehr eine relativ kleinere ist näher die Kugelfläche der äußeren Grenzfläche der Hohlkugel liegt. relativ größte Verkürzung erhält der Radius der die Hohlkugel nach i begrenzenden Kugelfläche, für welche r den kleinsten Wert, nämlich hat. Setzen wir diesen Wert von r in die Gleichung für φ ein, so erhält wir φ_0 , dessen dreifacher Wert die Volumverminderung des Hohlraumes ist, oder

$$3\varphi_0 = \frac{\Delta v}{V} = 3 \left\{ \frac{1}{3K+k} + \frac{1}{2k} \right\} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Drücken wir hierin K und k durch E und μ aus, so wird

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Die Kompression einer massiven Kugel erhalten wir aus den obigen Ausdrücken, indem wir den Radius der inneren Hohlkugel, also R_0 gleich 0 setzen. Damit wird b gleich 0, und wir bekommen

$$\varphi = \frac{1}{3K+k} \cdot P_1$$

und die Volumverminderung einer in der massiven Kugel gedachten Hohlkugel von gleichem Volum wie die Hohlkugel

$$\frac{\Delta V_1}{V} = 3 \frac{1}{3K+k} \cdot P_1 = 3 \frac{1-2\mu}{E} \cdot P_1 = C_1 \cdot P_1.$$

Es ergibt sich also auch auf diesem Wege, daß die Kompression einer massiven Kugel gerade wie die eines massiven Parallelepipeds gleich dem Produkte aus dem Kompressionskoeffizienten und dem auf die Flächeneinheit der Kugel wirkenden normalen Drucke, daß dagegen die Volumverminderung der Hohlkugel eine stärkere ist; das Verhältnis beider

$$\frac{\Delta V}{\Delta V_1} = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{1-2\mu} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Der Ausdruck für ΔV läßt aber erkennen, daß wir aus der beobachteten Volumverminderung des Hohlraumes, wenn E bekannt ist, μ berechnen können. Bezeichnen wir den direkt aus der Beobachtung der Volumverminderung der Kugel sich ergebenden Kompressionskoeffizienten mit C_2 ,

$$\frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} = C_2,$$

so wird

$$\mu = 1 - \frac{2}{3} C_2 \cdot E.$$

Folgende Tabelle enthält die von Regnault an einer Hohlkugel aus Kupfer ausgeführten Versuche. Bei dieser Kugel waren

$$R_1 = 29^{\text{mm}},9; \quad R_0 = 29^{\text{mm}},105; \quad V = 109^{\text{cm}^3},11.$$

$\frac{\Delta V}{V}$	P_1	C_2
0,000112556	2,8017	0,000003123
0,000177533	4,3687	0,000003156
0,000233944	5,6753	0,000003140
0,000265950	6,4502	0,000003224
0,000329544	7,8202	0,000003273

Die Drucke P_1 sind in Atmosphären angegeben; die Einheit des Druckes abei, wie wir später nachweisen werden, 0,010333 Kilogramm auf das Quadratmillimeter; um den Wert C_2 für ein Kilogramm zu erhalten, müssen daher die oben angeführten Werte mit 0,010333 dividieren.

Die beiden letzten Beobachtungsreihen weichen von den drei ersten bedeutend ab, daß wir annehmen müssen, es habe dort bereits eine endige Deformation der Kugel stattgefunden. Nehmen wir das Mittel der drei ersten Zahlen, so wird

$$C_2 = 0,000003139 \text{ oder für 1 Kilogramm} = 0,0003039.$$

Für weiches Kupfer erhielt Wertheim (§ 48)

$$E = 10519$$

der direkten Beobachtung der Verlängerung. Damit wird

$$\mu = 1 - 0,7103 = 0,2897$$

$$C_1 = 1,2618 \cdot C = 0,0001199.$$

Der kubische Kompressionskoeffizient ist hiernach etwa $\frac{1}{4}$ des linearen, der Wert von μ würde etwa dem des harten Stahles gleich sein.

Die Versuche mit der Messingkugel finden sich in der folgenden Tabelle zusammengestellt; für diese Kugel war

$$R_1 = 29^{\text{mm}},45; R_0 = 28^{\text{mm}},73; V = 102^{\text{cc}},71.$$

$\frac{\Delta V}{V}$	P_1	C_2
0,000074569	1,5834	0,000003370
0,000112723	2,4282	0,000003325
0,000150909	3,2233	0,000003350
0,000190904	4,0254	0,000003392
0,000222921	4,7319	0,000003371
0,000262613	5,5724	0,000003372
0,000299431	6,3860	0,000003355
0,000335997	7,1860	0,000003345
0,000396031	8,4119	0,000003369
0,000433301	9,1515	0,000003387

Die Konstanz der Werte von C_2 beweist, daß hier auch bei den höchsten Drucken die Elasticitätsgrenze noch nicht überschritten ist; als

Mittel ergibt sich aus den zehn Beobachtungen

$$C_2 = 0,000\,003\,363 \text{ oder für ein Kilogramm } 0,000\,325\,6.$$

Der Wert von E für Messing ist nach Wertheims Bestimmungen¹⁾

$$E = 9271 \text{ und daraus } C = 0,000\,107\,8.$$

Somit wird

$$\mu = 1 - 0,6708 = 0,3292$$

$$C_1 = 1,025 \cdot C = 0,000\,110\,6.$$

Der Wert von μ entspricht somit hier ziemlich genau dem von Wertheim angenommenen, der kubische Kompressionskoeffizient ist demzufolge fast genau gleich dem linearen.

Außer diesen Versuchen hat Regnault auch die Kompression einer Glasröhre bestimmt, welche die Form eines Cylinders mit halbkugelförmigen Endflächen besaß. Um die Kompression eines solchen Gefäßes zu berechnen, hat man dasselbe in zwei Teile zerlegt zu denken, in den Cylinder mit geraden Endflächen und in die aus den beiden Halbkugeln zusammengesetzte Kugel. Wird jeder dieser Teile unter denselben Umständen für sich zusammengedrückt, so ist die Summe der Kompressionen gleich der Kompression des zu diesen Versuchen benutzten Gefäßes. Es folgt das aus der Überlegung, daß der Druck auf die zur Längsaxe senkrechten Endflächen desselben durch Vermittlung der Halbkugeln gerade so wirkt, wie wenn er direkt auf die Endflächen wirken würde, da diese Endflächen größte Kreise der aus den Halbkugeln gebildeten Kugel sind.

Bezeichnen wir die Radien der Halbkugeln wie vorhin mit R_0 und R_1 , den auf der Flächeneinheit der äußern Fläche wirkenden Druck mit P_1 , so erhalten wir zunächst für die Volumverminderung der Kugel wie vorhin

$$\Delta V = 3 \left\{ \frac{1}{3K+k} + \frac{1}{2k} \right\} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1 V,$$

oder, wenn wir K und k durch μ und E ausdrücken,

$$\Delta V = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} P_1 V,$$

wenn V das Volumen der Kugel bezeichnet.

Die Volumverminderung des Cylinders erhalten wir auf folgende Weise. Ist H die Höhe des Cylinders, R_0 der Radius desselben, so ist das Volumen desselben vor der Kompression

$$V_1 = R_0^2 \pi \cdot H.$$

Geht nun durch die Kompression die Höhe desselben über in $H(1-\delta)$, der Radius in $R_0(1-\varphi_0)$, so wird

$$V_1 - \Delta V_1 = R_0^2 \pi H (1-\delta) (1-\varphi_0)^2 = R_0^2 \pi H (1-\delta-2\varphi_0)$$

und daraus

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \delta + 2\varphi_0.$$

¹⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XII. p. 598.

Für die Verkürzung δ der Längsaxe liefert die Theorie der Elasticität (den Wert¹⁾)

$$\delta = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^3 P_1 - R_0^3 P_0}{R_1^3 - R_0^3},$$

wo R_1 , R_0 die Radien der innern und äußern Cylinderfläche, welche bei den Versuchen von Regnault denen der Halbkugel gleich sind, und P_1 , P_0 die auf die Flächeneinheiten der äußern und innern Fläche wirkenden Drucke sind. Da auch bei diesen Versuchen $P_0 = 0$ ist, so wird

$$\delta = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^3 P_1}{R_1^3 - R_0^3}.$$

Für die Verkürzung φ eines Radius der Cylinderschale erhält man ganz analog wie bei der Kugel

$$\varphi = c + \frac{b}{r^2},$$

so für die Verkürzung des Radius der innern Cylinderfläche, für welche $= R_0$ ist,

$$\varphi_0 = c + \frac{b}{R_0^2}.$$

Die beiden Konstanten c und b erhalten hier folgende Werte

$$c = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^3 P_1 - R_0^3 P_0}{R_1^3 - R_0^3}; \quad b = \frac{1}{k} \cdot \frac{R_0^3 R_1^3 (P_1 - P_0)}{R_1^3 - R_0^3},$$

oder, wenn wie bei den Versuchen von Regnault $P_0 = 0$,

$$c = \frac{1}{3K+k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1; \quad b = \frac{1}{k} \cdot \frac{R_0^3 R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Daraus folgt

$$\varphi_0 = \left\{ \frac{1}{3K+k} + \frac{1}{k} \right\} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1,$$

und schließlich

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \delta + 2\varphi_0 = \left\{ \frac{3}{3K+k} + \frac{2}{k} \right\} \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Ersetzen wir auch hier K und k durch μ und E , so wird

$$\frac{\Delta V_1}{V_1} = \frac{5-4\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1.$$

Für die Volumverminderung des ganzen Hohlraumes erhalten wir nach

$$V + \Delta V_1 = \frac{1}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1 V + \frac{5-4\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P_1 V_1$$

oder

$$\frac{V + \Delta V_1}{V + V_1} = \left\{ \frac{1}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot V + \frac{5-4\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot V_1 \right\} \frac{1}{V + V_1}.$$

Wäre das der Kompression ausgesetzte Gefäß massiv, also $R_0 = 0$, würde, da die Konstante b für Kugel und Cylinder dann gleich Null wird,

¹⁾ Man sehe Lamé a. a. O. p. 188 ff.

die Kompression des dem Hohlraum gleichen Volumens auch jetzt wird

$$\frac{\Delta V + \Delta V_1}{V + V_1} = 3 \frac{1 - 2\mu}{E} \cdot P_1 = C_1 P_1.$$

Man sieht somit, daß auch jetzt gemäß unserer vorigen Bemerkung die Kompression eine stärkere ist.

Um aus dieser Beobachtung μ zu berechnen, haben wir nur die Gleichung nach μ aufzulösen. Setzen wir, um abzukürzen,

$$\frac{\Delta V + \Delta V_1}{(V + V_1) \cdot P_1} = a; \quad \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = M; \quad \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} = N,$$

so erhält man leicht

$$\frac{\frac{3}{2} N \cdot V + 5 M V_1 - a (V + V_1) \cdot E}{\frac{3}{2} N V + 4 M V_1} = \mu.$$

Bei den Versuchen von Regnault waren

$$R_1 = 12^{\text{mm}}, 128; \quad R_0 = 10^{\text{mm}}, 728; \quad H = 208^{\text{mm}}, 7; \\ V_1 = 75^{\text{cc}}, 499; \quad V = 5^{\text{cc}}, 167; \quad V + V_1 = 80^{\text{cc}}, 666.$$

Als Mittel aus 10 Versuchsreihen, in denen P_1 von 2,5 bis 1 Atmosphäre zunahm, ergab sich für $P_1 = 1$ Atmosphäre

$$a = 0,000\,028\,289,$$

somit für $P_1 = 1$ Kilogramm

$$a = 0,002\,739.$$

Ferner gibt Wertheim als Resultat der Ausdehnungsversuche für

$$E = 6040; \quad C = \frac{1}{E} = 0,000\,165\,5.$$

Damit wird

$$\mu = 0,319; \quad C_1 = \frac{1,086}{E} = 0,000\,179.$$

Die Versuche von Regnault bestätigen die am Schlusse des vorigen Paragraphen ausgesprochene Ansicht, daß der Wert von μ für die verschiedenen Stoffe verschieden ist.

§ 51.

Torsionselasticität. Bisher haben wir vorausgesetzt, daß die auf einen festen Körper wirkenden Kräfte stets normal gegen die Oberfläche gerichtet waren, so daß nur Verlängerungen oder Verkürzungen der Dimensionen des Körpers eintraten. Wir können aber die Kräfte auch in anderen Richtungen wirken lassen, so daß neben den Veränderungen der Dimensionen des Körpers auch Verschiebungen der Moleküle gegen einander vorkommen. Bei der Untersuchung der dann eintretenden Änderungen schränken wir uns auf die Betrachtung der einfachsten Fälle, wir beginnen mit der experimentellen Untersuchung der elastischen Kräfte, welche auftreten, wenn wir die einzelnen Schichten eines Stabes dadurch gegen einander verschieben, daß wir alle, die einen mehr, die andern weniger um ein bestimmtes Innere des Stabes liegende Achse drehen.

¹⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XIX. p. 11

Wir erreichen das auf die einfachste Weise, wenn wir einen Stab oder einen Draht an seinem einen Ende befestigen, an seinem andern Ende einen in Längsrichtung des Stabes senkrechten Hebelarm anbringen und an dem Hebel eine Kraft wirken lassen, welche den Stab um seine Längsaxe dreht. Es entwickelt sich dann in dem Stabe, durch die Verschiebung der dem oberen Ende näher liegenden Schichten gegen die entfernteren eine der Drehung entgegenwirkende Kraft, welche wächst mit dem Winkel, um welchen man das untere Ende des Stabes gedreht hat.

Fig. 59.



Nennen wir das Drehungsmoment des Gewichtes P , welches wir anbracht haben, p , so dreht sich der Stab so lange, bis zu einem solchen Winkel ω , daß das Drehungsmoment, welches die Gegenwirkung des Stabes leistet, um ihn zurückzudrehen, gleich ist dem Drehungsmoment p . Es treten demnach bei der Torsion eines Stabes oder Drahtes immer zwei Drehungsmomente auf, welche, unter sich gleich, sich das Gleichgewicht halten. Das rückwirkende Drehungsmoment des Drahtes bezeichnet man mit dem Namen der Torsionskraft; es ist unsere Aufgabe, zu untersuchen, welche Beziehung zwischen dieser und dem Drehungswinkel besteht.

Die ausgedehntesten Versuche zur Beantwortung dieser Frage hat Wertheim¹⁾ angestellt; er bediente sich dazu des Apparates Fig. 59.

¹⁾ Wertheim, *Annales de chim. et de phys.* III. Sér. t. 50. p. 202 ff.

Derselbe besteht aus einer schweren eisernen Bank, auf welcher sich zwei Aufsätze befinden, ähnlich denen einer Drehbank. Der erstere, B ist beweglich, er dient dazu, das eine Ende des Stabes U , den man untersuchen will, festzuhalten. Zu dem Ende trägt er ein durchbohrtes Stück, durch welches der Stab hindurchgesteckt wird, und in welchem er mittels einer Druckschraube N festgeklemt wird.

Es ist notwendig, daß dieses Ende U des Stabes während der Versuche ganz fest ist; um sich davon zu überzeugen, ist an ihm ein Zeiger G angebracht, dessen Ende immerfort auf eine am Apparat angebrachte Marke hinzeigen muß.

Das vordere Ende T des Stabes ist in gleicher Weise in die hohle Axe M eingesteckt und dort festgeklemt. Diese Axe kann sich in zwei horizontalen Lagern drehen; sie trägt eine Rolle E , um welche zwei Schnüre gelegt sind. Die erste ist an dem Haken bei E befestigt und trägt das Gewicht P , die zweite ist an der andern Seite der Rolle befestigt, steigt von dort zur Rolle R auf, ist um diese herumgelegt und trägt an ihrem andern Ende ein Gewicht S , welches gleich P ist. Es ist klar, daß diese beiden Gewichte die Rolle E in gleichem Sinne zu drehen und somit dem Stabe eine Torsion zu erteilen streben.

Um die erteilte Drehung zu messen, ist die eine Seite der Rolle E mit einem getheilten Kreise zu versehen, auf den ein unbeweglicher Zeiger D eingestellt ist. Man bemerkt die Stellung des Kreises vor der Drehung und neuerdings, wenn die Gewichte wirken; die gemessene Drehung des Kreises ist gleich dem Torsionswinkel ω . Wir haben nun zu untersuchen, welche Beziehung zwischen dem Winkel ω und der Wirkung der beiden Gewichte P besteht.

Das Drehungsmoment der beiden Gewichte, $2P\rho$, wenn wir den Radius der Rolle gleich ρ setzen, sei gleich F .

I. Untersucht man zunächst die Abhängigkeit des Torsionswinkels von der Größe des Drehungsmomentes F , so zeigt sich, daß, wenn wir F in Verhältnis von 1, 2, 3, 4 . . . ändern, die Torsionswinkel in demselben Verhältnis ω , 2ω , 3ω , 4ω . . . werden. Da, wie wir sahen, die gegenwirkende Torsionskraft gleich dem drehenden Momente F ist, so folgt der wichtige Satz, daß die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist.

II. Wenden wir Stäbe derselben Substanz, aber verschiedener Länge an, so daß die Längen im Verhältnis 1, 2, 3, 4 . . . stehen, so findet man bei Anwendung derselben Kraft, daß die Torsionswinkel ω , 2ω , 3ω , 4ω . . . sind. Die Torsionswinkel sind demnach bei gleicher tordierender Kraft der Länge der tordierten Stäbe direkt proportional.

III. Wendet man cylindrische Stäbe an, deren Radien sich verhalten wie 1, 2, 3, 4, so werden bei Anwendung derselben Kraft die Torsionswinkel bei zunehmendem Radius kleiner, und zwar findet man sie ω , $\frac{\omega}{16}$, $\frac{\omega}{81}$, $\frac{\omega}{256}$. Es sind also, da 1, 16, 81, 256 gleich sind 1^4 , 2^4 , 3^4 , 4^4 , bei Anwendung derselben drehenden Kraft die Torsionswinkel umgekehrt proportional den vierten Potenzen der Radien der Stäbe.

IV. Wenn man bei gleichen Dimensionen und gleichen Kräften verschiedene Substanzen anwendet, so findet man die Torsionswinkel verschieden. Um deshalb aus den beobachteten Dimensionen des Stabes und den

stehenden Kräften die Torsionswinkel zu erhalten, bedarf es eines gewissen Koeffizienten, der für die verschiedenen Substanzen verschiedenen Koeffizienten $\frac{1}{T}$ ist.

Wir erhalten demnach für den Torsionswinkel den Ausdruck

$$\omega = \frac{1}{T} \cdot \frac{Fl}{r^4}.$$

Die Torsionskraft des Stabes ist gleich der Kraft, welche dem Stabe Torsion erteilt, denn der Stab dreht sich so lange, bis die gegenwirkende Kraft desselben gleich ist der drehenden Kraft. Wir erhalten daher die Torsionskraft, welche der Stab bei einer Drehung um den Winkel ω entwickelt, wenn wir die soeben erhaltene Gleichung nach F auflösen. Wir erhalten

$$F = \omega T \frac{r^4}{l},$$

da die Torsionskraft ist proportional dem Torsionswinkel, der vierten Potenz des Radius des tordierten Stabes und umgekehrt proportional der Länge desselben, außerdem für jede Substanz noch proportional einem besondern Koeffizienten, dem sogenannten Torsionskoeffizienten. Die physikalische Bedeutung dieses Koeffizienten ist leicht zu erhalten. Setzen wir $r = 1$ und $l = 1$, so wird für einen Draht von der Einheit des Radius, 1^{mm} , und der Einheit der Länge, für welche wir, um im Zähler und Nenner des Ausdrucks für F die gleichen Längeneinheiten zu haben, auch 1^{mm} einsetzen,

$$F = \omega T.$$

Nun wird der Torsionskraft das Gleichgewicht gehalten durch ein am Hebelarm ϱ angreifendes Gewicht P , so daß wir setzen können

$$F = P \cdot \varrho = \omega \cdot T,$$

daraus

$$P \cdot \frac{\varrho}{\omega} = T.$$

Und machen wir schliesslich $\varrho = \omega$, so wird

$$P = T.$$

Der Torsionskoeffizient T gibt uns also das Gewicht an, welches am Ende eines mit dem Stabe von der Länge 1^{mm} und dem Radius 1^{mm} verbundenen Hebelarmes von der Länge ϱ wirken muß, um der Torsionskraft das Gleichgewicht zu halten, wenn wir den Stab um einen Winkel ω gebracht haben, so daß der von dem Ende des Hebelarms durchlaufene Bogen die Länge des Radius erreicht hat; oder er ist, wenn wir ϱ gleich dem Radius des Stabes, gleich 1^{mm} setzen, gleich jener Kraft, welche, an dem Anfange des Stabes wirkend, den Stab so stark tordiert, daß der Endpunkt des Radius einen Bogen von 1^{mm} zurücklegt.

Die soeben beschriebene Methode von Wertheim eignet sich besonders für Untersuchung der Torsion an Stäben von großen Dimensionen. Um wegen ihrer vielen Anwendungen weit wichtigeren Gesetze der Torsion an feinen Fäden oder Drähten zu untersuchen, wandte Coulomb eine andere Methode an¹⁾, die sogenannte Methode der Oscillationen. Wir befestigen

¹⁾ Coulomb, Mémoires de l'Acad. des Sciences. Paris 1784.

einen Faden mit seinem obren Ende an einem festen Haken *A* (Fig. 60) und hängen an sein unteres Ende einen schweren Körper, z. B. eine

Fig. 60.



metallische Kugel. Hängt die Kugel vertikal herab, dreht man dieselbe um die vertikale Axe um einen beliebigen Winkel und überläßt sie dann sich selbst. Infolge der durch die Drehung erzeugten Torsionskraft wird dann der Faden wieder aufgedreht und dabei die Kugel um die vertikale Axe mit steigender Geschwindigkeit rotieren machen, da die Torsionskraft kontinuierlich wirkt. Nach einiger Zeit wird sich der Faden in die Lage befinden, welche er einnahm, bevor er gedreht war. Aber in diesem Augenblicke ist die Rotationsgeschwindigkeit am größten geworden, die Bewegung wird wegen der erlangten Geschwindigkeit fortdauern und der Faden entgegengesetzte Torsion erhalten. Dadurch wird nach und nach die Bewegung verzögert, sie wird gleich Null, wenn der Winkel der entgegengesetzten Torsion gleich dem ursprünglichen Torsionswinkel geworden ist. Dann wird sich die Bewegung umkehren, wieder über die Gleichgewichtslage hinausgehen u. s. f., so daß sie dieselben Änderungen zeigt wie das Pendel; es wird eine hin- und herdrehende Bewegung eintreten mit abnehmender Amplitude, weil Reibung, Wider-

stand der Luft und die unvollkommene Elasticität des Drahtes eine gehemmte Fortdauer verhindern.

Es ist nun klar erstens, daß, wenn die Torsionskraft des Fadens wirklich proportional ist dem Torsionswinkel, daß dann die Oscillation dieselbe Zeit dauern, welches auch ihre Ausdehnung sei, ob sie mehrere oder nur wenige Bruchtheile eines Grades umfassen. Dann wird in demselben Verhältnisse, als die Drehung aus der Gleichgewichtslage größer wird, auch die Drehungsgeschwindigkeit größer, welche die Torsionskraft dem Faden erteilt; wenn aber die Geschwindigkeit immer der Drehung proportional ist, der doppelten Drehung die doppelte, der dreifachen die dreifache Geschwindigkeit entspricht, so müssen alle Oscillationen in gleichen Zeiten zurückgelegt werden.

Zweitens aber ist umgekehrt klar, daß, wenn dieser Isochronismus der Oscillationen stattfindet, daß dann auch die Proportionalität zwischen Torsionskraft und Torsionswinkel besteht. Es genügt daher, um das erst aufgestellte Gesetz für diesen Fall zu beweisen, zu zeigen, daß die Oscillationen isochron sind.

Um diese Beobachtung mit der notwendigen Genauigkeit zu machen, verfährt man in ganz ähnlicher Weise wie bei Pendelbeobachtungen. Man hängt den Faden an einem Widerhalt *A* auf (Fig. 60), befestigt unter der Kugel *B* einen möglichst leichten Zeiger *C* und stellt zur Messung der Oscillationsweiten einen getheilten Kreis darunter, so daß dessen Mittelpunkt von dem verlängerten Faden getroffen wird. Der Beobachter

ih in einer gewissen Entfernung mit einem Fernrohr so auf, daß er den Zeiger visieren und eine Sekundenuhr beobachten kann, die er zu arretieren und loszulassen imstande ist. Im Augenblick, in welchem nun der Zeiger das Gesichtsfeld des Fernrohrs passiert, setzt er die Uhr in Gang. Nach einer Anzahl von n Oscillationen mit der Amplitude A bestimmt er dann die verfllossene Zeit. Dieselbe Beobachtung wird dann mit kleineren oder größeren Oscillationsweiten gemacht; der Versuch zeigt dann die Gleichheit der Oscillationsdauer, welches auch die Amplituden sind. Es folgt also, daß die Torsionskraft dem Torsionswinkel proportional ist. Bei einigen Metallen jedoch nach Versuchen von Warburg¹⁾ diese Proportionalität nicht vorhanden; er fand nämlich, daß die Schwingungsdauer eines Kupferdrahtes bei einer Amplitude von 7° schon im Verhältnis von 1,0023 : 1 größer als bei ganz kleinen Amplituden.

Bezeichnet man nun mit f die Torsionskraft für die Einheit der Drehung, so ist die Kraft, welche, an einem Hebelarme von der Länge eines Millimeters angebracht, der Torsion des Fadens das Gleichgewicht hält, wenn die Drehung so groß war, daß das Ende des Hebels einen Bogen von 1^{mm} zurücklegte — man könnte sie als den Torsionskoeffizienten dieses bestimmten Drahtes bezeichnen —, so hat man für die Kraft F , welche eine Drehung um einen Bogen ω bewirkt,

$$F = f \cdot \omega.$$

Man sieht nun leicht ein, daß die Torsionskraft ihren Sitz nur in dem Draht selbst hat, und daß sie nicht von der Natur und dem Gewicht der Kugel B abhängt. Indes, da es die Torsionskraft ist, welche die Kugel in Bewegung setzt, so wird die derselben erteilte Geschwindigkeit und die Oscillationsdauer von der Masse der Kugel abhängig sein. Es ist nicht schwierig, diese Abhängigkeit zu erhalten.

Der Torsionskraft hält bei der Drehung um einen Bogen ω die im Abstände 1 von dem Faden angebrachte Kraft $f\omega$ das Gleichgewicht, die Bewegung erfolgt also gerade so, als wenn der Faden keine Drehungskraft hätte, sondern im Abstände 1 von der Drehungsaxe eine Kraft $f\omega$ dem Draht eine Drehung in demselben Sinne erteilen würde, wie es die Torsionskraft thut. Diese Kraft folgt ganz denselben Gesetzen wie jene, welche die Bewegung des Pendels veranlafte. Denn beim Pendel hatten wir, wenn das Gewicht des schweren Punktes am Ende des Pendels p war, für einen Ausschlagswinkel α als bewegende Kraft den Wert $pl \cdot \sin \alpha$; aber da für die kleinen Schwingungen, für welche unser Ausdruck für die Schwingungsdauer galt, $\sin \alpha = \alpha$ gesetzt werden kann, für die bewegende Kraft $pl\alpha$; also auch eine bewegende Kraft, welche dem Ausschlagswinkel proportional ist. Wie wir nun beim Pendel als Ausdruck für die Schwingungsdauer hatten, wenn wir mit m die Masse des bewegten Gewichtes bezeichneten,

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{ml^2}{gml}} = \pi \cdot \sqrt{\frac{ml^2}{pl}},$$

ist klar, daß, wenn im Abstände 1 von unserem Faden ein schwerer

¹⁾ Warburg, Berichte der naturwissenschaftl. Gesellschaft zu Freiburg im Breisgau. Bd. VII. 1880. Annalen der Physik und Chemie, neue Folge (Wiedemann), Bd. X.

Punkt von der Masse m wäre, der Ausdruck für die Schwingungsdauer sein würde

$$t = \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{f}}.$$

Anstatt des Punktes von der Masse m im Abstände 1 haben wir aber die um den Faden verteilte Masse M der schweren Kugel und des Zeigers. Bezeichnen wir nun aber mit Mk^2 das Trägheitsmoment der Masse M in Bezug auf die vertikale Drehungsaxe, so ist dieses gleich der Masse m , welche im Abstände 1 von der Drehungsaxe die rings verteilt liegenden Massenteilchen ersetzt. Wir erhalten demnach für die Schwingungsdauer in unserem Falle

$$t = \pi \sqrt{\frac{Mk^2}{f}}.$$

Zur Bestimmung des Trägheitsmomentes der schwingenden Masse kann man hier die § 32 besprochene Methode anwenden, bei welcher wir eine der jetzigen ähnliche Anordnung des Versuches vorausgesetzt haben. Man hätte nur als Zeiger an der Kugel der Fig. 60 einen leichten Stab zu wählen, der in seiner Mitte unten an der Kugel befestigt ist, und diesen in der § 32 angegebenen Weise zu belasten. Am besten versieht man dazu den Stab in genau gemessenen und an beiden Seiten gleichen Abständen r_1, r_2 mit Spitzen, welche nach oben hervorstehen, und hängt auf diese an kleinen Ringen die Gewichte. Die Rechnungen sind dann genau so zu führen, wie es § 32 angegeben ist.

Ist aber die Masse des Drahtes gegenüber derjenigen der Kugel sehr klein, und benutzt man als Zeiger einfach eine auf der Kugel gezogene Marke, so kann für das Trägheitsmoment der schwingenden Masse einfach das der Kugel eingesetzt werden. Ist der Radius der Kugel gleich a , so ist das Trägheitsmoment derselben bezogen auf die mit einem vertikalen Durchmesser der Kugel zusammenfallende Rotationsaxe nach § 19

$$Mk^2 = \frac{2}{5} \cdot Ma^2;$$

somit erhalten wir für die Dauer einer Oscillation unserer Kugel infolge der Torsionskraft des Fadens

$$t = \pi \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f}}.$$

Will man nun zwei Fäden verschiedener Länge, verschiedener Dicke und verschiedener Substanz mit einander vergleichen, so hängt man sie nach einander an demselben Punkte A auf und befestigt an ihnen dieselbe Kugel. Ist ihre Oscillationsdauer verschieden, gleich t und t' , so kann das nur daher rühren, daß ihre Torsionskräfte verschieden sind. Wären dieselben f und f' , so hat man

$$t = \pi \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f}}, \quad t' = \pi \sqrt{\frac{2Ma^2}{5f'}},$$

und daraus

$$\frac{f}{f'} = \frac{t'^2}{t^2}.$$

Man sieht, daß die Werte für die Torsionskraft umgekehrt proportional sind den Quadraten der Schwingungsdauern. Mißt man nun diese Zeiten, so findet man unsere früheren Gesetze, nämlich 1) f ist direkt pro-

portional der vierten Potenz des Radius des Drahtes, 2) f ist umgekehrt proportional der Länge des Drahtes, 3) f ist direkt proportional einem für die verschiedenen Substanzen verschiedenen Koefficienten.

Es ist somit

$$f = \frac{T \cdot r^4}{l},$$

oder das zu einer Drehung um den Winkel ω erforderliche Drehungsmoment F

$$F = T \cdot \frac{r^4}{l} \cdot \omega,$$

wie wir es schon aus den Versuchen von Wertheim ableiteten.

Wir haben oben bemerkt, daß die Torsionskraft des Fadens unabhängig sei von dem Gewichte der Kugel; Coulomb hat dieses bei seinen Versuchen für Metalldrähte direkt nachgewiesen und Warburg¹⁾ bestätigt. Für zusammengesetzte Seidenfäden ist das nach den Beobachtungen von Gauss²⁾ indes nicht mehr der Fall, für diese nimmt die Torsionskraft mit dem spannenden Gewichte zu.

§ 52.

Beziehung zwischen dem Torsions- und Elasticitätskoefficienten.

Die bei der Torsion eines Stabes oder Drahtes auftretende elastische Kraft ist nur eine andere Form der bei der Ausdehnung oder Kompression auftretenden Kraft, da auch sie durch eine Verschiebung der Moleküle gegen einander geweckt wird. Ein etwas näheres Eingehen auf die molekularen Vorgänge bei der Torsion wird uns in den Stand setzen, den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Äußerungen der Elasticität zu erkennen.

Denken wir uns einen vertikalen Cylinder, den wir durch eine an seinem untern Ende angebrachte Kraft tordieren, so wird dadurch jeder Querschnitt des Cylinders um seinen Mittelpunkt gedreht, und zwar um so mehr, je näher derselbe dem untern Ende des Cylinders liegt. Die Verbindungslinie zweier Punkte in unter einander liegenden Querschnitten, welche vor der Torsion vertikal war, bildet daher jetzt mit seiner frühern Richtung den Winkel φ , oder eine vor der Torsion mit der Axe parallele Faser des Cylinders bildet nach der Torsion eine Schraubenlinie, welche überall um den Winkel φ gegen die Vertikale geneigt ist. Die Gröfse dieses Winkels, der die Verschiebung der Moleküle gegen einander mißt, und den Clebsch³⁾ deshalb den Verschiebungswinkel nennt, kann man aus der Gröfse des Torsionswinkels ableiten. Ist nämlich der unterste Querschnitt um den Winkel ω gedreht, so wird beim Abwickeln von dem Cylinder die erwähnte Schraubenlinie die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die Länge l des Cylinders, dessen andere Kathete der von dem untern Ende der Schraubenlinie beschriebene Bogen, also, wenn wir den Abstand der Faser von der Axe des Cylinders mit r bezeichnen, gleich $r \cdot \omega$ ist. Der Winkel φ ist der in diesem Dreiecke der Seite $r \cdot \omega$ gegenüber-

¹⁾ Warburg, a. a. O.

²⁾ Gauss, *Intensitas vis magneticae terrestris*. Göttingen 1833. Poggendorffs Annalen. Bd. XXVIII.

³⁾ Clebsch, *Theorie der Elasticität*. p. 8.

liegende Winkel. Zur Bestimmung von φ haben wir daher

$$\tan \varphi = \frac{r \cdot \omega}{l},$$

oder, da φ immer nur ein sehr kleiner Winkel ist,

$$\varphi = \frac{r \cdot \omega}{l}.$$

Der Verschiebungswinkel ist demnach der GröÙe der Torsion proportional; da nun die Torsionselasticität der GröÙe der Torsion proportional ist, so ist sie auch diesem Verschiebungswinkel proportional. Nennen wir die in der Flächeneinheit des untersten Querschnittes durch einen der Einheit gleichen Verschiebungswinkel erzeugte Torsionskraft C , so können wir die in dem Flächenelement des untersten Querschnittes Δq , dessen GröÙe gleich dem Querschnitte der betrachteten Faser ist, durch die Torsion erzeugte Kraft deshalb setzen

$$P = C \varphi \Delta q;$$

denn die einzelnen Punkte dieses Flächenelements sind gegen die Punkte des darüber liegenden Querschnittes alle um denselben Winkel φ verschoben.

Die Kraft P wirkt in dem untersten Querschnitt der Richtung der drehenden Kraft entgegen. Den Wert der Konstanten C können wir nach Clebsch in folgender Weise ableiten¹⁾. Denken wir uns einen Würfel, aus derselben Substanz wie den betrachteten Cylinder, an einer Fläche befestigt und an der gegenüberliegenden durch eine Kraft gezogen, deren GröÙe für die Flächeneinheit gleich K sei. Durch den Zug geht der Würfel in ein Parallelepiped über, indem die der Zugrichtung parallele Kante a in $a(1 + \delta)$ oder, wenn wir den Elasticitätskoefficienten des Würfels mit E bezeichnen, in $a(1 + \frac{K}{E})$ übergeht, die beiden anderen Kanten aber in $a(1 - \mu \frac{K}{E})$ übergehen, wenn wir den Koefficienten der Querkontraktion mit μ bezeichnen. Die der Zugrichtung parallelen Seiten des Würfels

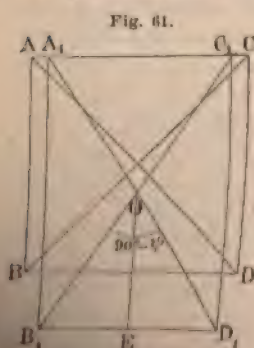


Fig. 61.

$ABCD$ (Fig. 61) werden dadurch Parallelogramme $A_1B_1C_1D_1$, deren Diagonalen C_1B_1 und A_1D_1 , welche vor dem Zuge zu einander senkrecht waren, jetzt einen Winkel $\frac{1}{2}\pi - \psi$ mit einander bilden. Ziehen wir von dem Punkte O , in dem die Diagonalen sich schneiden, eine Senkrechte OE auf die zur Zugrichtung senkrechte Kante B_1D_1 des Parallelepipeds, so erhalten wir ein rechtwinkliges Dreieck OED_1 , dessen eine Kathete $OE = \frac{1}{2}a(1 + \delta)$, dessen andere $ED_1 = \frac{1}{2}a(1 - \mu\delta)$, und in welchem der der letztern Kathete gegenüberliegende Winkel $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \psi)$ ist; zur Bestimmung von ψ haben wir daher

$$\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\psi}{2}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\psi}{2}} = \frac{ED_1}{OE} = \frac{a(1 - \mu \frac{K}{E})}{a(1 + \frac{K}{E})}.$$

r, da $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ und ψ ein sehr kleiner Winkel ist,

$$\frac{1 - \frac{\psi}{2}}{1 + \frac{\psi}{2}} = \frac{1 - \mu \frac{K}{E}}{1 + \frac{K}{E}}$$

und schliesslich mit Vernachlässigung sehr kleiner Größen

$$\psi = \frac{K}{E} (1 + \mu).$$

Der so bestimmte Winkel ψ ist aber gleichzeitig der Verschiebungswinkel der einer Diagonale des Würfels parallelen Diagonalfächen gegenüber, welche infolge des Zuges eingetreten ist. Denn denken wir uns den Würfel vor dem Zuge durch eine Schar Ebenen geteilt, welche der einen der beiden besprochenen Diagonalen AD und der ihr entsprechenden auf der gegenüberliegenden Seite des Würfels parallel ist, so verbindet eine der zweiten Diagonale CB parallele durch den Mittelpunkt des Würfels gelegte Gerade die Mittelpunkte aller dieser Ebenen mit einander; diese Gerade ist normal zu der Ebenenschar. Nach dem Zuge ist die Lage dieser Ebenen parallel $A_1 D_1$ geworden, die Mittelpunkte derselben liegen auch jetzt wieder auf einer der zweiten Diagonale $C_1 B_1$ parallelen Linie, welche in einer die Normale der Ebenenschar aufnehmenden Ebene mit den Ebenen, wie vorher abgeleitet wurde, den Winkel $90^\circ - \psi$, mit der Normale selbst also den Winkel ψ bildet. Die Mittelpunkte und damit alle entsprechend liegenden Punkte der Ebenenschar sind also so gegen einander verschoben, dass der Verschiebungswinkel nach der gegebenen Definition gleich ψ ist. Infolge dieser Verschiebung muss in dem Parallelepipiped eine jener Ebenenschar parallele Kraft geweckt sein, welche den Ebenen parallel wirkt, und deren Grösse für die Flächeneinheit

$$P = C \cdot \psi = C \cdot \frac{K}{E} \cdot (1 + \mu)$$

ist, eine Kraft, welche die Ebenen in ihre frühere Lage zurückzuziehen strebt.

Dieser Kraft hält die der Ebenenschar parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Komponente der Zugkraft K das Gleichgewicht. Da die Kraft K , welche der Seite des Würfels parallel ist, mit der Diagonale einen Winkel von 45° bildet, so ist die der Flächeneinheit der Würfelfläche parallel der Diagonale wirkende Kraft $K \cdot \cos 45^\circ = K \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$. Diese Kraft wirkt auf das der Flächeneinheit der Würfelfläche entsprechende Stück der Diagonalfäche; da nun die Diagonalfäche zur Würfelfläche sich verhält wie $\sqrt{2}:1$, so ergibt sich für die auf die Flächeneinheit der Diagonalfäche parallel derselben wirkende Kraft

$$K \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} = \frac{K}{2}.$$

Da diese Kraft der durch die Verschiebung geweckten Kraft das Gleichgewicht hält, so ist schliesslich

$$P = \frac{K}{2} = C \cdot \frac{K}{E} (1 + \mu)$$

und daraus

$$C = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Die Konstante C somit, mit der wir bei einer Verschiebung der Mätkülschichten gegen einander, wie sie bei der Torsion eintritt, den Verschiebungswinkel multiplicieren müssen, um die durch diese Verschiebung geweckte elastische Kraft zu erhalten, ist durch die beiden die Elasticität einer Substanz bedingenden Konstanten, den Elasticitätskoefficienten E und den Koefficienten der Querkontraktion vollständig bestimmt, sie ist gleich dem Quotienten aus dem Koefficienten der Elasticität und dem doppelten um eins vermehrten Kontraktionskoefficienten.

Diesen Wert von C haben wir auch in den am Anfange dieses Paragraphen für die Torsionskraft unseres Cylinders abgeleiteten Ausdruck zusetzen; derselbe wird damit

$$P = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \varphi \cdot \Delta q = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{r \cdot \omega}{l} \cdot \Delta q.$$

Um aus diesem Werte den Torsionskoefficienten nach unserer frühesten Definition abzuleiten, haben wir hieraus zunächst das Drehungsmoment berechnen, welches der tordierte Stab infolge der Torsion um ω erleidet. Der Wert von P ist die Torsionskraft in dem Flächenelemente Δq des untersten Querschnitts, welches im Abstände r von der Axe liegt. Daraus hervorgehende Drehungsmoment ist

$$P \cdot r = f = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\omega}{l} \cdot r \cdot r \cdot \Delta q.$$

Um hieraus das Drehungsmoment des ganzen untersten Querschnitts zu erhalten, haben wir für alle Flächenelemente desselben das Drehungsmoment f in der angegebenen Weise zu bilden und alle diese einzelnen Drehungsmomente zu summieren. Zu dem Zwecke können wir uns nun für das Flächenelement Δq den unendlich schmalen Ring $2\pi r dr$ setzen, der sich im Abstände r von der Axe befindet, da für alle Elemente des Ringes das Drehungsmoment denselben Wert hat, und wir dann die Summe für alle Ringe zu bilden, deren Radius zwischen 0 und ρ liegt, wenn ρ der Radius des Cylinders ist. Damit wird

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\omega}{l} \int_0^\rho 2\pi r^3 dr$$

und dieses Integral ist nach E I und E VIII:

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\omega \cdot \rho^4}{l};$$

ein Ausdruck, der sich von dem im vorigen Paragraphen experimentell abgeleiteten nur dadurch unterscheidet, daß an die Stelle des dort benutzten Torsionskoefficienten T hier der Wert desselben durch den Elasticitätskoefficienten E und durch den Kontraktionskoefficienten μ gegeben ist. Den Torsionskoefficienten T erhalten wir somit

$$T = \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

¹⁾ Es ist wohl zu beachten, daß diese Berechnung des Torsionskoefficienten nur für cylindrische Stäbe gilt; denn bei Stäben von anderer Form findet bei Torsion nicht nur eine Verschiebung der unter einander liegenden Querschnitte

Sind E und μ bekannt, so gestattet uns diese Relation, sofort den des Torsionskoefficienten zu berechnen; kennt man E und T , so kann aus beiden auch den Wert von μ ableiten.

Es liegen einige Versuche von Coulomb¹⁾, Savart²⁾ und Wertheim³⁾ welche in Verbindung mit den von Wertheim gegebenen Werten für E Vert von μ abzuleiten gestatten.

Coulomb findet für einen Eisendraht von 243^{mm},63 Länge und 0^{mm},07481 is $F = 0,001545$ nach der vorhin besprochenen Schwingungsmethode. orhin mitgeteilte Gleichung gibt daraus

$$\frac{E}{2(1 + \mu)} = 7651.$$

Der Elasticitätskoefficient ist nach Wertheim $E = 20869$. Man erhält s $\mu = 0,363$.

Savart erhält nach einer der Wertheimschen ähnlichen Methode für rische Kupferdrähte zwischen 1 und 4^{mm},5 Dicke

$$\frac{E}{2(1 + \mu)} = 4213.$$

Der Wert von E ist nach Wertheim 10519. Man erhält daraus),25, ein Wert, welcher ziemlich gut mit dem aus den Regnaultschen ressionsversuchen abgeleiteten übereinstimmt.

Wertheim untersuchte eine Reihe von Stäben, an denen er direkt den citätskoefficienten durch Verlängerung bestimmte. Die von ihm gen en Werte enthält folgende kleine Tabelle:

Substanzen	Radius der Cylinder	$\frac{E}{2(1 + \mu)}$ aus d. Torsion	$\frac{E}{\text{aus d. Verläng.}}$	μ
	mm.			
en	8,220	6836,6	} 17805	0,317
en	5,501	6677,2		
gl. Gußstahl . .	5,055	7458,4	19542	0,310
pfer	5,031	3611,7	9395	0,300
s	3,535	2383,1	6200	} 0,321
s	3,4225	2308,3	"	

Man erhält also auch hier wieder für μ je nach den Substanzen der verschiedene Werte; die Werte für Glas und Kupfer weichen nur wenig von den früher aus den Regnaultschen Kompressionsversuchen siteten ab, welche für Glas 0,315, für Kupfer 0,291 waren.

n auch eine Verschiebung der einzelnen Punkte jedes Querschnittes gegen er statt. Der Verschiebungswinkel ist somit an den verschiedenen Stellen aerschnitte verschieden, und nicht wie bei dem Cylinder für alle Punkte, gleich weit von der Drehungsaxe entfernt sind, derselbe.

) Coulomb, Mémoires de l'Académie. 1784. Biot, traité de physique. T. 1.

) Savart, Annales de chim. et de phys. T. LXI.

) Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. L.

Kohlrausch und Loomis¹⁾ fanden bei ihren Versuchen, welche Zweck hatten, die Abhängigkeit des Elasticitätskoefficienten von der Temperatur zu bestimmen, und bei denen sie nach der Coulombschen Methode die Schwingungsdauer dünner Drähte bei verschiedenen Temperaturen beobachteten, die Werte von $\frac{E}{2(1+\mu)}$

für Eisen	gleich	6940
„ Kupfer	„	3900
„ Messing	„	3200.

Die Werte von E erhielten sie aus Bestimmungen der Schwingungsdauern

für Eisen	$E =$	20310
„ Kupfer	„	= 12140
„ Messing	„	= 9810.

Daraus würden sich für μ die Werte ergeben, für Eisen 0,45, Kupfer 0,55, für Messing 0,53, im Mittel also fast genau 0,5, eine welche bedeuten würde, daß bei einfachem Zuge gar keine Änderung Volumens einträte, die indes gegenüber allen sonstigen Beobachtungen groß ist und vermuten läßt, daß die Bestimmung der Torsionskoefficienten fehlerhaft ist.

Für die Abhängigkeit der Torsionskoefficienten oder auch der proportionalen Elasticitätskoefficienten von der Temperatur ergab sich, die Koefficienten mit steigender Temperatur kleiner werden, wie es schon aus den Beobachtungen Wertheims (§ 48) ergab. Bezeichnet den Elasticitätskoefficienten bei 0° mit E_0 , so ist derselbe bei der Temperatur t° für Eisen

$$E = E_0 (1 - 0,000\,483\,t - 0,000\,000\,12\,t^2),$$

für Kupfer

$$E = E_0 (1 - 0,000\,572\,t - 0,000\,000\,28\,t^2),$$

für Messing

$$E = E_0 (1 - 0,000\,485\,t - 0,000\,001\,36\,t^2).$$

Es nehmen die Elasticitätskoefficienten bei einer Erwärmung von Temperatur des gefrierenden bis zu der des siedenden Wassers um 6 Procent ab.

§ 53.

Biegeelasticität. Außer durch Ausdehnung und Torsion kann elastische Kraft fester Körper noch auf eine dritte Art geweckt werden nämlich durch Biegung. Bei der großen Schwierigkeit, welche der elastischen Behandlung der Biegung entgegensteht, müssen wir uns damit begnügen, den einfachsten Fall etwas näher zu betrachten. Wenn ein Stab AB (Fig. 62) mit dem einen Ende in einem Schraubstock festgeklemmt und man hängt an sein anderes freies Ende B ein Gewicht P , so biegt sich und nimmt die Gestalt einer Kurve an, bis er im Gleichgewicht ist. Dann hält die elastische Kraft des Stabes dem Gewichte P das Gleichgewicht.

¹⁾ Kohlrausch und Loomis, Poggend. Ann. Bd. CXLI.

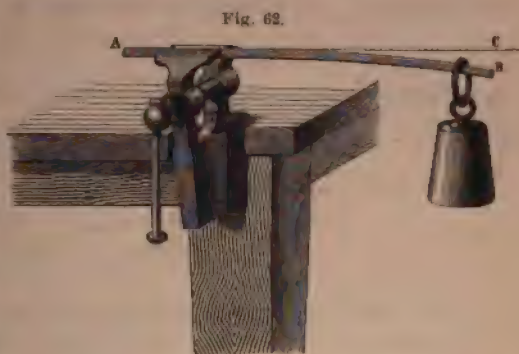
gewicht. Man sieht, daß bei dieser Bewegung die obere horizontale Fläche des Stabes sich ausdehnt, während die untere Seite des Stabes zusammengedrückt wird, und daß durch diese Verschiebung der Moleküle sich Kräfte entwickeln müssen, welche den Stab in seine frühere Lage zurückführen werden, sobald das Gewicht abgenommen ist.

Um diese Erscheinung zu untersuchen, kann man an den Enden *A* und *C* oder vielmehr auf diesen geeignete Marken mit dem Kathetometer visieren; man legt die zu untersuchenden Stäbe anfänglich horizontal, belastet sie an ihrem Ende *C* mit einem Gewichte und mißt dann die Länge, um welche die Marke an *C* nach *B* herabsinkt. Dieser Länge α , welchem

man Pfeil der Biegung nennt, und die immer sehr klein ist, können wir den in der Marke beschriebenen Bogen gleich setzen. Eine ähnliche Methode benutzte Gerstner zu seinen Versuchen an¹⁾.

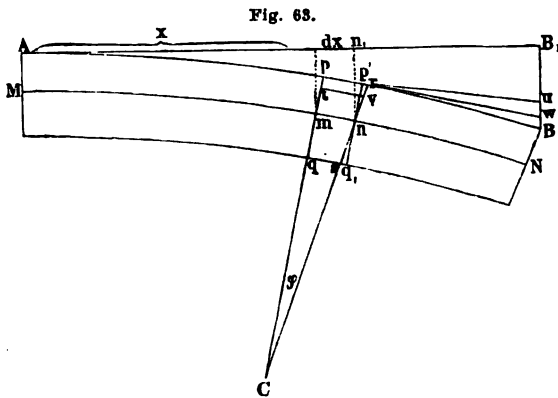
Bei einer Durchführung dieser Versuche findet man nun zunächst, daß der Pfeil der Biegung der Größe des biegenden Gewichtes proportional, mit auch, daß die bei der Biegung auftretende Elasticität der Biegung proportional ist, wie sie bei der Ausdehnung der Verlängerung proportional ist. Die Größe des Biegunspfeiles hängt aber außerdem von den Dimensionen des Stabes, der Gestalt seines Querschnittes und dem Elasticitätscoefficienten ab.

Für den einfachsten Fall, den eines rechteckigen Stabes, dessen horizontale Seite gleich b , dessen vertikale gleich e und dessen Länge von dem Punkte der Einklemmung bis zur Stelle, wo das Gewicht hängt, gleich l ist, können wir diese Abhängigkeit aus einer genauern Betrachtung des Vorganges der Biegung in folgender Weise ableiten. Die Biegung kommt dadurch zustande, daß an der obern Seite des Stabes seine Längsfasern ausgedehnt, an der untern Seite dagegen zusammengedrückt werden; im Innern des Stabes muß es daher eine Faserschicht geben, welche weder ausgedehnt noch zusammengedrückt wird, und wenn der Stab ganz homogen ist, muß diese Schicht gerade die mittlere Schicht des Stabes sein. Stelle (Fig. 63) *AB* einen Längsdurchschnitt durch den gebogenen Stab dar, *B* sei der Punkt der Einklemmung, *B* der Aufhängepunkt des Gewichtes *P* und *MN* der Durchschnitt durch die nicht verlängerte Faserschicht. Nun sei *pq* ein Querschnitt des Stabes, der von dem Anfange des Stabes um x entfernt sei, und *rs* ein zweiter von dem ersten um die unendlich kleine Strecke dx entfernter Querschnitt. Während in der Gleichgewichtslage die beiden Schnitte parallel sind, ist nach der Biegung durch die Verlängerung *pr* über *mn* und die Verkürzung der unter *mn* liegenden Fasern der zweite



¹⁾ Gerstner, Handbuch der Mechanik. Bd. I.

Querschnitt gegen den ersten um einen Winkel φ gedreht. Legen durch den Punkt n , in welchem rs die nicht verlängerte Faser schneidet, $p'q' \parallel pq$, so können wir die Biegung an dieser Stelle als eine Drehung des Querschnittes rs um die durch n gelegte Horizontale als Drehungsaxe fassen, deren GröÙe jenem Winkel φ gleich ist. Damit sind wir dann



sofort imstande, die Gleichgewichtsbedingung für den gebogenen Stab aufzustellen; die Bedingung ist, daß dem gedachten Querschnitt durch elastischen Kräfte ebenso großes Drehmoment nach rückwärts erteilt wird, als durch das Gewicht nach entgegengesetzter Richtung gegeben wird. Wir können nun das System rmN als Winkelhebel ansehen, dessen einem Arm im Punkte N das Gewicht P angreift, d

der andere Arm durch den Querschnitt rs gegeben ist, an dessen sämtlichen Punkten Kräfte angreifen, welche ihn in seine frühere Lage zurückzubringen. Das aus der letztern resultierende Drehungsmoment erhalten wir folgendermaßen. Es sei v der Durchschnitt durch ein Element des Schnittes, welches um y von n entfernt sei, und dessen Höhe dy sei, so daß der Querschnitt $b \cdot dy$ ist. Die dieses Element mit pq verbindenden Faser sind um $tv - mn = y \cdot \varphi$ verlängert. Die Kraft, mit der dieses Element gegen t infolgedessen gezogen wird, ist dann, wenn wir mit E den Elastizitätskoeffizienten des Stabes bezeichnen,

$$E \cdot \frac{y \cdot \varphi}{dx} \cdot b dy,$$

und das infolgedessen dem Schnitt erteilte Drehungsmoment

$$y \cdot E \cdot \frac{y \cdot \varphi}{dx} \cdot b dy = E \frac{b \varphi}{dx} \cdot y^2 dy.$$

Ein ebensolches Drehungsmoment enthält der Schnitt für jedes Element $b dy$, die Summe derselben ist das ganze Drehungsmoment des Stabes. Wir erhalten diese Summe, indem wir in jenem Ausdrucke für y nach und nach alle Werte setzen für y von 0 bis $\frac{e}{2}$ und von 0 bis $-\frac{e}{2}$ oder von $-\frac{e}{2}$ bis $+\frac{e}{2}$. Die gesuchte Summe ist demnach das bestmögliche Integral

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E \cdot \frac{b \varphi}{dx} \cdot y^2 dy = E \frac{b \varphi}{dx} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} y^2 dy.$$

Dasselbe ergibt sich nach E 1 und E VIII

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} E \cdot \frac{b \varphi}{dx} \cdot y^2 dy = \frac{E}{12} \cdot \frac{b \cdot e^3}{dx} \cdot \varphi.$$

Diesem Drehungsmomente hält das des Gewichtes oder $n N \cdot P$ das Gleichgewicht. Für $n N$ können wir setzen $n_1 B_1 = l - (x + dx)$ oder, da gegen x verschwindend klein ist, gleich $l - x$. Damit wird die Gleichgewichtsbedingung des Schnittes

$$\frac{E}{12} \frac{b \cdot e^3}{dx} \cdot \varphi = P(l - x)$$

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot e^3 \varphi = P(l - x) dx$$

Den in diesem Ausdrucke auftretenden Winkel φ können wir durch α Element des Biegungspfeiles $B_1 B$ ausdrücken; legen wir durch r eine Tangente an den Stab und ziehen durch r ebenfalls eine Linie parallel der Tangente des Stabes bei p , so bilden diese beiden Linien den Winkel φ miteinander. Aus dem Biegungspfeil schneiden dieselben dann das Element uw , indem wir das als den zu φ gehörigen mit $n_1 B_1$ oder $(l - x)$ bezeichneten Bogen ansehen, können wir schreiben

$$\varphi(l - x) = uw; \quad \varphi = \frac{uw}{l - x}.$$

Damit wird die Gleichgewichtsbedingung, wenn wir schliesslich das Element uw des Biegungspfeiles, entsprechend der dem letztern gegebenen Zeichnung α mit $d\alpha$ bezeichnen,

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot e^3 d\alpha = P(l - x)^2 dx.$$

Dieselbe Bedingung gilt für jeden Schnitt, den wir ebenso wie den betrachteten durch den Stab legen; die Gleichgewichtsbedingung des ganzen Stabes erhalten wir demnach, indem wir auf beiden Seiten die Summe der für jeden einzelnen Querschnitt geltenden Ausdrücke bilden. Auf der linken Seite geschieht das, indem wir die Summe aller Elemente des Biegungspfeiles bilden, also einfach statt $d\alpha$ schreiben α , auf der rechten, indem wir nach und nach für x alle Werte von 0 bis l einsetzen und wie oben summieren. Diese Summation gibt dann

$$\frac{E}{12} \cdot b \cdot e^3 \alpha = \frac{1}{3} P \cdot l^3$$

oder

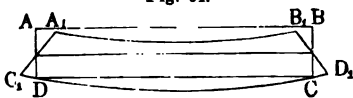
$$\alpha = \frac{4 P}{E} \cdot \frac{l^3}{b e^3},$$

oder die durch den Pfeil der Biegung gemessene Biegung ist der dritten Potenz der Länge direkt, jener der Höhe und der ersten Potenz der Breite wie dem Elasticitätskoefficienten umgekehrt proportional.

Ist der Querschnitt des Stabes ein anderer, so erhält man für α andere Werte¹⁾, immer aber findet man, daß die Biegung der Größe des biegenden Gewichtes, oder daß die Größe der erregten Elasticität der Biegung proportional ist. Letzteres ist auch dann der Fall, wenn der Stab in anderer als der oben vorausgesetzten Weise befestigt ist, wenn er an beiden Enden festgeklemmt oder nur aufgelegt, oder wenn er an einem Ende festgeklemmt und an dem andern aufgelegt ist. Es folgt daraus nach den Gesetzen der Pendelschwingungen, daß auch in diesem Falle der Stab isochrone Schwingungen um seine Gleichgewichtslage macht, wenn man ihn aus derselben bringt und dann sich selbst überläßt; wir werden diese Schwingungen an einer andern Stelle genauer betrachten.

Die Biegung eines Stabes nach seiner Längsaxe muß auch eine Biegung nach der Breitendimension zur Folge haben, so daß, wenn wir voraussetzen, daß der Stab nach unten gebogen ist, wie in Fig. 63, die untere Fläche des Stabes in ihrer Breitendimension konvex, die obere, welche nach ihrer Länge konvex ist, nach der Breite konkav wird. Ist also $ABCD$ (Fig. 64) der Querschnitt des ungebogenen Stabes, so wird $A_1B_1C_1D_1$ jener des gebogenen Stabes. Daß eine derartige Biegung des Querschnittes eintreten muß, läßt

Fig. 64.



sich leicht erkennen. Wie vorhin entwickelt wurde, hat die Biegung eine Verlängerung der oberhalb der ungeänderten Faserschicht, eine Verkürzung der unterhalb derselben liegenden Fasern zur Folge. Diese Verlängerung der obern Schichten hat eine Kontraktion nach der Breite zur Folge, so daß, wenn die Verlängerung gleich δ ist, die Kontraktion gleich $\mu\delta$ ist. Die Verkürzung der untern Faserschichten hat eine Ausdehnung nach der Breite zur Folge, welche ebenso groß ist als die Verkürzung oben. Zu diesen Ausdehnungen und Verkürzungen parallel MM treten solche parallel AD . Oberhalb der ungeänderten Schicht MM tritt in dieser Richtung eine Kontraktion, unterhalb MM eine Ausdehnung ein. Man sieht leicht, daß die vorher ebenen Flächen, welche den Stab oben und unten begrenzen, infolge dieser Kontraktionen der obern und Ausdehnungen der untern Hälfte des Stabes sich krümmen müssen, oder daß der Stab parallel AB so gebogen werden muß, daß die obere Fläche konkav, die untere konvex wird²⁾.

Legen wir einen Stab, dessen Länge gegen den Querschnitt beträchtlich ist, auf zwei gleich weit von der Mitte entfernte Stützen und biegen ihn dann dadurch, daß wir seine beiden über die Stützen herausragenden Enden mit gleichen Gewichten belasten, so ist der der Längsrichtung des gebogenen Stabes parallele Schnitt der obern konvexen Fläche ein Kreisbogen; ein zur Längsrichtung senkrechter, also parallel $ABCD$ durch die obere Fläche geführter Schnitt ist dann ebenfalls ein Kreisbogen; und die Radien dieser Kreisbögen verhalten sich wie die Längendilatation zur Querkontraktion. Setzen wir also den Radius des der primären Biegungsebene parallelen Bogens gleich 1, so wird der Radius des Bogens A_1B_1 gleich μ .

¹⁾ Clebsch, Theorie der Elasticität fester Körper. p. 87 ff. und p. 363 ff.

²⁾ De Saint Venant, Mémoire sur la flexion des prismes etc. Journal des mathématiques pures et appliquées par Liouville. II. Série. T. I. 1856.

Eine Bestimmung dieser Krümmungsradien kann also ebenfalls dazu dienen, das Verhältnis der Längendilatation zur Querkontraktion, also den Wert von μ zu bestimmen.

Die im § 49 angeführten Versuche von Cornu¹⁾ beruhen auf diesem Grundsatz. Er bestimmte nach einer optischen Methode, die wir im zweiten Bande, bei Besprechung der Interferenz des Lichtes mit großen Gangunterschieden kennen lernen werden, die Krümmungen der obern Flächen verschiedener Glasprismen, und erhielt im Mittel für μ den Wert 0,25.

§ 54.

Elastische Nachwirkung. Bei der bisherigen Besprechung der elastischen Eigenschaften der festen Körper haben wir vorausgesetzt, daß die durch Wirkung äußerer Kräfte hervorgebrachten Änderungen der Körpervolumen oder doch in einer für uns unmeßbar kleinen Zeit erfolgen, das ist also, daß etwa bei einer Dehnung durch Zug die Verlängerung sofort eintritt, wenn das ziehende Gewicht an dem Körper angebracht ist und wir zur Vermeidung von Schwingungen den Körper allmählich in die neue Gleichgewichtslage übergehen lassen. Wir haben dann die so eintretende Verlängerung gemessen und aus dieser den Elasticitätskoeffizienten oder die linearen Dehnungskoeffizienten abgeleitet.

Die eintretenden Änderungen beschränken sich indes nicht immer auf momentanen Änderungen, ja in der Regel treten im Laufe der Zeit fortwährend wirkenden äußern Kräften noch mehr oder weniger große Änderungen in demselben Sinne ein, wie die momentanen. Die erste Beobachtung dieser Art wurde von W. Weber an Seidenfäden gemacht und derselben als elastische Nachwirkung bezeichnet²⁾. Ein horizontal gespannte Seidenfaden wurde durch ein passend angebrachtes Gewicht belastet und seine sofort eingetretene Verlängerung gemessen. Bei fortwährendem Wirken des dehnenden Gewichtes ergab sich dann, daß die Länge des Fadens noch stetig zunahm, und zwar wurde eine, mit wachsender Zeit für gleiche Zeitintervalle abnehmende, Zunahme bis 2168,79 Millimetern, also länger als 36 Stunden nach Vornahme der ersten Dehnung beobachtet.

Ebenso ergab sich, daß ein Faden, der längere Zeit gedehnt gewesen war, nach Fortnahme des dehnenden Gewichtes nicht sofort wieder die dem gedehnten Zustande entsprechende Länge annahm, daß vielmehr ein großer Teil der Verkürzung erst nach und nach eintrat, die Verkürzung wurde 1233 Minuten, also 20,5 Stunden nach Fortnahme des dehnenden Gewichtes beobachtet.

Diese von W. Weber an Seidenfäden beobachtete elastische Nachwirkung fand dann F. Kohlrausch auch an Metalldrähten und Glasfäden; er untersuchte gleichzeitig in einer Reihe von Experimentaluntersuchungen³⁾, daß allen diesen Substanzen die elastische Nachwirkung wesentlich den-

¹⁾ Cornu, Comptes Rendus. T. LXIX. p. 333.

²⁾ W. Weber, Poggend. Ann. Bd. XXXIV und LIV.

³⁾ F. Kohlrausch, Poggend. Ann. Bd. CXIX. CXXVIII. CLVIII. CLX.

selben Gesetzen folgt. Kohlrausch benutzte bei seinen Beobachtungen vorwiegend die Torsion.

Entsprechend der Beobachtung Webers, daß bei konstantem spannenden Gewichte die Verlängerung stetig noch lange Zeit zunimmt, zeigte Kohlrausch bei Glasfäden zunächst, daß das zu einer konstanten Torsion erforderliche Drehungsmoment mit wachsender Zeit abnimmt. Zur Messung des Drehungsmomentes wurde ein Magnet benutzt. An einen sehr feinen, etwa 35^{mm} langen, in einem drehbaren Gehäuse hängenden Glasfaden wurde ein kleiner Magnet befestigt, so daß derselbe horizontal schwebte. Ein solcher Magnet hat, wie wir im vierten Bande kennen lernen werden, das Bestreben, in einer bestimmten horizontalen Richtung, der Richtung des sogenannten magnetischen Meridians zu verharren. Bringt man ihn um einen Winkel α aus dieser Lage heraus, so wirkt auf ihn ein Drehungsmoment

$$d = D \cdot \sin \alpha,$$

welches ihn in den Meridian zurückzubringen sucht. Es wurde nun durch eine Drehung des Gehäuses dem Faden eine Torsion erteilt; der Magnet folgt dann der Torsion so weit, bis das ihn von der Richtung des Meridians fortziehende Drehungsmoment der Torsion gleich ist dem magnetischen Drehungsmoment, welches ihn in den Meridian zurückzuführen strebt. Durch eine Torsion von drei ganzen Umdrehungen wurde so die Nadel nahezu senkrecht zum magnetischen Meridian gestellt. Es zeigte sich dann, daß die Nadel nicht in dieser Lage verharrte, daß sie vielmehr stetig dem Meridian sich näherte. Daraus folgt, daß das dem Faden durch drei Umdrehungen erteilte Torsionsmoment nicht mehr ausreicht, um die Magnetnadel in der ihr zunächst gegebenen Lage zu halten, daß das magnetische Drehungsmoment größer war. Es wurde nun durch Zurückdrehen des Gehäuses die durch Annäherung des Magnets an den Meridian eintretende Zunahme der Torsion aufgehoben und so der Faden stets um genau drei Umdrehungen tordiert gehalten. Dabei wurde zunächst von Minute zu Minute später in größeren Zeitintervallen der Stand der Magnetnadel, also der Winkel α beobachtet. Dem Sinus des so beobachteten Winkels war dann jedesmal das Drehungsmoment proportional, welches zu der betreffenden Zeit dem durch drei Umdrehungen des Fadens bewirkten Torsionsdrehungsmoment das Gleichgewicht hielt. Die so zur Zeit t Minuten nach Herstellung der Torsion beobachteten Drehungsmomente x ließen sich durch eine Gleichung folgendermaßen darstellen

$$x = x_0 + c e^{-at^m},$$

worin e die Basis des natürlichen Logarithmensystems, x_0 , c , a und m vier aus den Versuchen zu berechnende Konstanten sind.

In folgender Tabelle sind einige der von Kohlrausch in dieser Weise beobachteten und nach jener Gleichung mit den Konstanten

$$x_0 = 0,8970; \quad c = 0,04054; \quad a = 0,35272; \quad m = 0,25$$

berechneten Werte von x zusammengestellt. Die Drehungsmomente x sind einfach durch die Sinus der beobachteten Ablenkungswinkel α gegeben.

Zeit Minuten	x		Zeit Minuten	x	
	Beob.	Berechn.		Beob.	Berechn.
1,25	0,9247	0,9249	35	0,9145	0,9142
1,92	0,9238	0,9238	50	0,9138	0,9129
2,50	0,9231	0,9230	110	0,9120	0,9099
3,32	0,9218	0,9217	160	0,9079	0,9086
5,25	0,9211	0,9208	206	0,9071	0,9077
7,58	0,9197	0,9196	300	0,9054	0,9063
9,67	0,9188	0,9188	452	0,9051	0,9050
12	0,9181	0,9180	1310	0,9042	0,9019
18	0,9168	0,9166	1780	0,8995	0,9011
25	0,9154	0,9154	2760	0,8995	0,9001

Die Zahlen zeigen, wie gut sich die allmähliche Abnahme des Torsionsdrehungsmomentes durch jene Gleichung darstellen läßt. Nach der Gleichung würde x_0 den Wert des Torsionsdrehungsmomentes bedeuten, welchem sich dasselbe bei konstant erhaltener Torsion von drei Umdrehungen mit wachsender Zeit immer mehr annähert, denn setzt man in der Gleichung die Zeit t unendlich groß, so wird $x = x_0$.

Entsprechend der zweiten Beobachtung Webers zeigte Kohlrausch, daß ein verdrehter Draht nicht sofort nach Aufheben der Torsion in seine frühere Gleichgewichtslage zurückkehrt, sondern daß er eine nur sehr allmählich sich verlierende Torsion beibehält. Ja, er fand, daß es keineswegs einer lange dauernden Torsion bedarf, damit sich diese Nachwirkung zeige, daß schon eine Torsion von wenigen Sekunden ausreicht, um eine deutliche Nachwirkung hervorzurufen. Bezeichnet man den Winkel, um welchen der Draht zur Zeit t Minuten nach Aufheben der ihm ursprünglich erteilten Torsion noch aus seiner Gleichgewichtslage gedreht bleibt, mit x , so läßt sich derselbe allgemein darstellen durch die Gleichung

$$x = C \cdot e^{-\frac{\alpha}{1-n} \cdot t^{1-n}},$$

worin e wie immer die Basis des natürlichen Logarithmensystems, C , α und n Konstanten bedeuten. Die Konstanten hängen bei gegebener Temperatur von der Größe und Dauer der ursprünglich dem Drahte erteilten Torsion ab. Sind die anfänglich dem Drahte erteilten Torsionen nicht zu groß und übersteigt die Dauer derselben nicht 3 Minuten, so lassen sich die Winkel x durch die einfachere Gleichung

$$x = c \frac{1}{t^\alpha}$$

darstellen, worin c von der Größe und Dauer der ursprünglichen Torsion, wie von dem Material und der Temperatur des Drahtes, α dagegen bis zu Temperaturen von 22° C. nur von dem Material des Drahtes abhängig ist¹⁾.

¹⁾ Kohlrausch, Poggend. Ann. CXXVIII p. 418.

Für einen Silberdraht fand Kohlrausch für die Gröfse c , wenn der Draht T' Minuten um den Winkel φ Grad tordiert war und die Temperatur des Drahtes τ° C. betrug,

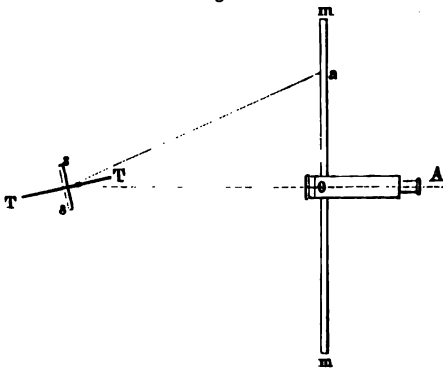
$$c = (0,000\,021\,9\,\varphi + 0,000\,000\,018\,7\,\varphi^2) T^{0,59} (\tau + 21,5).$$

Die Konstante α war für Silber gleich 0,3875. Für einen Messingdraht fand sich $\alpha = 0,1643$, für einen Glasfaden berechnete Kohlrausch¹⁾ aus Versuchen Boltzmanns²⁾, wenn die Torsion 180° betrug und nicht länger als $\frac{1}{2}$ Minute dauerte, $\alpha = 0,968$ und 0,923. Für einen Kautschukfaden ergab sich dagegen α schon bei kleinen nur $\frac{1}{2}$ Minute dauernden Torsionen wesentlich von der Gröfse φ der ursprünglichen Torsion abhängig.

Um ein Bild von der Gröfse und dem Gange der elastischen Nachwirkung zu geben, sind in folgender Tabelle einige Beobachtungen von Kohlrausch an dem Silberdrahte, an welchem obige Konstanten erhalten sind, mitgeteilt. Der Silberdraht hat eine Länge von 125 Millimeter. Die Torsionen wurden mittels der Gauss-Poggendorffschen Spiegelablesung gemessen, welche wir wegen ihrer ausgedehnten Anwendung zu ähnlichen Messungen hier schon beschreiben wollen. Die Methode ist die genaueste, um kleine Drehungswinkel scharf zu messen.

Man befestigt zu dem Zwecke an die Drehungsaxe des drehbaren Körpers, hier also an dem untern Ende des Fadens, einen kleinen ebenen Spiegel, so dafs die Spiegelebene ss (Fig. 65) der Drehungsaxe parallel,

Fig. 65.



hier also vertikal ist. In einiger Entfernung ist dem Spiegel ein Fernrohr AO gegenübergestellt, unter oder über welchem ein Maßstab mm so angebracht ist, dafs er dem ungedrehten Spiegel parallel steht, und dafs, wenn der Spiegel in der Ruhelage sich befindet, der durch das Fernrohr blickende Beobachter am Fadenkreuz des Fernrohrs das Spiegelbild des Nullpunktes der Teilung erblickt, welcher sich unmittelbar unter dem Fernrohr bei e befindet. Dreht sich dann der Spiegel

um irgend einen kleinen Winkel, so sieht man durch das Fernrohr das Spiegelbild eines andern Teilstriches a der Skala am Fadenkreuz. Hat man den Abstand der Skala vom Spiegel gemessen, so erhält man aus dem Abstände oa des beobachteten Skalenteils den Winkel α , um welchen sich der Spiegel gedreht hat, in folgender Weise.

Da man in der Ruhelage des Spiegels den am Fernrohr befindlichen Nullpunkt der Teilung erblickt, so folgt, dafs die Axe des Fernrohrs senkrecht zur Ebene des Spiegels ist, wenn derselbe in der Ruhelage ist, oder

¹⁾ Kohlrausch, Poggend. Ann. Bd. CLVIII.

²⁾ Boltzmann, Wiener Berichte Bd. LXX. Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII.

die Richtung soA ist senkrecht zu der Spiegelebene in der Ruhelage. Sieht man nach der Drehung des Spiegels in dem Fernrohr den Teilstrich a , so beweist das, daß der von a ausgehende Lichtstrahl as am Spiegel nach der Richtung soA reflektiert wird. Nach dem Reflexionsgesetz wird ein einfallender Strahl as stets so reflektiert, daß der reflektierte Strahl mit der zum Spiegel senkrechten Richtung TT , dem Einfallslot, denselben Winkel bildet, wie der einfallende Strahl. Nennen wir also den Reflexionswinkel $osT = \alpha$, so ist der Winkel $aso = 2\alpha$. Da nun in der Ruhelage das Einfallslot in die Richtung sO fiel, ist α der Winkel, um welchen sich der Winkel gedreht hat. In dem rechtwinkligen Dreieck aos liegt die Kathete ao dem Winkel 2α gegenüber, somit ist

$$\text{tang } 2\alpha = \frac{ao}{os}.$$

Die Länge ao , der Abstand des in der abgelenkten Lage gespiegelten Skalenteils von dem Nullpunkte der Skala dividiert durch den Abstand der Skala von dem Spiegel gibt uns also die Tangente des doppelten Drehungswinkels des Spiegels. Da man auf diese Weise immer nur kleine Winkel mißt, kann man die Tangente des doppelten Winkels noch gleich der doppelten Tangente des einfachen Winkels setzen, oder

$$\text{tang } \alpha = \frac{1}{2} \frac{ao}{os}.$$

In den meisten Fällen kann man sogar die Tangente mit dem Bogen vertauschen, und setzen

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{ao}{os}$$

oder auch kurz, indem man os in Skalenteilen mißt, wenn der Abstand ao gleich n Skalenteilen ist, schreiben

$$a = k \cdot n,$$

wo man durch passende Bestimmung der Konstanten k sofort α in Bogenminuten oder auch Graden aus der beobachteten Ablenkung n erhält.

In dieser Weise erhält man in folgender Tabelle, in welcher die Ablenkungen α in Skalenteilen angegeben sind, den Wert derselben in Bogenminuten durch Multiplikation mit 0,706.

Zeit nach der Torsion t in Minuten	I x		II x		III x	
	Beob.	Berechn.	Beob.	Berechn.	Beob.	Berechn.
0,166	38,	41,5	—	—	74	74,8
0,33	33,6	34,0	53,5	54,6	65,9	66,7
1,0	24,3	24,2	41,3	40,6	53,4	53,0
2,0	19,3	19,3	33,6	32,8	44,8	44,4
5	13,9	14,0	23,8	23,8	33,7	33,7
10	11,0	10,9	17,9	18,1	26,0	26,2
20	7,9	8,3	13,4	13,4	19,6	19,7
50			8,9	8,5	12,6	12,5
80			7,2	6,6	10,5	9,5

Die GröÙe der bei diesen Beobachtungsreihen stets angewandten primären Torsion betrug 180° , die Dauer bei der ersten Reihe 2, bei der zweiten 5, bei der dritten 10 Minuten.

Die Zahlen zeigen, daÙ schon bei kurz dauernder Torsion die Nachwirkung merklich ist, und wie die Nachwirkung mit der Dauer der Torsion wächst; bei der Torsionsdauer 10 Minuten ist die Nachwirkung nach einer sechstel Minute schon fast 1° . Bei einer Torsionsdauer von 9 Stunden und einer Torsion von 585° betrug die Nachwirkung gleich nach Aufheben der primären Torsion 30° , also fast ein Zwanzigstel des ursprünglichen Torsionswinkels.

Kohlrausch hat ebenfalls die elastische Nachwirkung bei der Dehnung und Biegung näher untersucht; mit Metall- oder Glasstreifen war in den Fällen die Nachwirkung zu gering, um genau verfolgt werden zu können, er beobachtete daher die Nachwirkung bei der Dehnung an Kautschukfäden und die bei der Biegung an Stäben aus Hartkautschuk (Ebonit)¹⁾. Er fand in beiden Fällen, daÙ die Gesetze der elastischen Nachwirkung im wesentlichen dieselben waren wie bei der Torsion. Wir verweisen wegen des Specielleren auf die Arbeit von Kohlrausch. Nur sei hier noch des merkwürdigen Verhaltens der Körper Erwähnung gethan, wenn man sie nach einander verschiedenen Änderungen unterworfen hat. Wie wir sahen, nimmt die Nachwirkung bei der Torsion, und so ist es bei allen übrigen, mit der GröÙe und Dauer der primären Torsion sowohl an GröÙe als Dauer zu, immer aber ist die Annäherung an den Gleichgewichtszustand anfänglich eine erheblich raschere als später. Wenn man nun einem Körper zunächst eine starke länger dauernde Torsion in einem Sinne erteilt, und dann, während er nach Aufheben derselben sich allmählich der Gleichgewichtslage nähert, ihm eine kurz dauernde Torsion im entgegengesetzten Sinne gibt, so zeigt sich, daÙ die einzelnen Nachwirkungen sich superponieren, das heißt, man findet, daÙ nach der zweiten kürzern entgegengesetzten Torsion sich der Draht zunächst der Lage nähert, aus welcher man ihn tordiert hatte, dann einen Augenblick zur Ruhe kommt, und daÙ er dann wieder der Nachwirkung von der ersten Torsion folgend sich wieder seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage nähert. So wurde ein Kautschukfaden einen Tag lang um drei Umdrehungen tordiert. Losgelassen zeigte derselbe eine sehr starke Nachwirkung und in der ersten Zeit näherte er sich etwa 10° in der Sekunde seiner ursprünglichen Gleichgewichtslage. Nach 10 Minuten hatte er sich um mehr als 180° derselben genähert, und er drehte sich in der Sekunde nur mehr etwa $\frac{1}{30}^{\circ}$ zurück. Nun drillte man den Draht während 40 Sekunden nach der entgegengesetzten Richtung; nach Aufheben dieser Torsion zeigte der Faden zunächst eine Nachwirkung im Sinne derselben. Der Faden ging nicht sofort in die Lage zurück, aus der man ihn das zweite Mal tordiert hatte, sondern näherte sich derselben stetig während 3,5 Minuten. Ehe er indes dieselbe erreicht hatte, kehrte sich der Sinn der Bewegung um, das heißt der Körper näherte sich wieder, wie wenn die zweite Torsion nicht stattgefunden hätte, der ursprünglichen Gleichgewichtslage.

Die Thatsache, daÙ die elastischen Änderungen eines Körpers unter

¹⁾ Kohlrausch, Poggend. Ann. Bd. CLVIII.

Wirkung äußerer Kräfte oder nach Aufhören dieser Wirkung nicht vollständig augenblicklich erfolgen, daß sie zum Teil sehr langsam erfolgen beweist, daß die der ganzen Elasticitätslehre zu Grunde liegende Annahme, nach welcher die augenblickliche Lage der Moleküle im Innern eines Körpers durch die augenblicklich wirkenden Kräfte bestimmt wird, einer Modifikation bedarf. Es haben allerdings die Moleküle, sobald bestimmte äußere Kräfte auf einen Körper wirken, nur eine Gleichgewichtslage, indessen kann das Eintreten in diese Gleichgewichtslage eine sehr lange Zeit dauern. Wir müssen daraus schließen, daß der Bewegung der Moleküle, sobald sie nicht zu weit aus ihrer Gleichgewichtslage, wie sie den augenblicklich wirksamen Kräften entspricht, gebracht sind, ein Widerstand entgegensteht, der ihre Bewegung verlangsamt. Es muß das aber ein Widerstand ganz eigentümlicher Art sein, wie wir ihn sonst bei Bewegungen nicht finden. Bei allen sonstigen Bewegungen können wir den Widerstand in Rechnung ziehen, indem wir einfach von der bewegenden Kraft eine gewisse Größe abziehen, der Quotient aus dieser Differenz und der zu bewegend Masse gibt uns dann die Beschleunigung. Da bei den elastischen Änderungen die Kraft, welche die Moleküle gegen die Gleichgewichtslage treibt, dem Abstand der Moleküle von der Gleichgewichtslage proportional ist, so ist bei gleicher Verschiebung die bewegende Kraft dieselbe; da nun bei gleicher Lagerung der Moleküle auch der Widerstand derselbe sein müßte, so müßte bei gleicher Verschiebung auch die Geschwindigkeit, mit der die Moleküle sich der Gleichgewichtslage nähern, stets dieselbe sein. Das ist aber, wie wir sahen, keineswegs der Fall. Die in der letzten Tabelle mitgetheilten Beobachtungen zeigen, daß bei einer Torsion von 180° , welche 2 Minuten dauerte, nach $10''$ die Drillung des Silberdrahtes bis auf $27'$ verschwunden war, als dagegen dieselbe Torsion 10 Minuten gedauert hatte, war in $10''$ die Drillung erst bis auf $52'$ verschwunden, und es dauerte fast 5 Minuten, bis sie auf $27'$ verschwunden war. Im ersten Falle geht sie dann in $20'$ bis auf etwa $5'$ zurück, im zweiten ist sie nach 80 Minuten erst auf etwa $8'$ zurückgegangen. Ja, hat man eine stärkere ursprüngliche Torsion angewandt, und diese Stundenlang dauern lassen, so kann die langsame Rückkehr in die Gleichgewichtslage schon beginnen, wenn die Drillung noch viele Grade beträgt, wir erwähnten den Versuch von Kohlrausch, wo sie noch 30° betrug; erst in 130 Tagen ging sie da auf $27'$ zurück.

Noch räthselhafter wird der Vorgang durch die erwähnte von Kohlrausch nachgewiesene Superposition der elastischen Nachwirkung. Hat man einen Faden tordiert, so daß er Nachwirkung zeigt, so werden durch eine entgegengesetzte Torsion die Moleküle nicht in derselben Weise verschoben, wie wenn man dem ungedrillten Faden dieselbe Torsion erteilt hätte, sondern nach Aufhören der neuen Torsion und der von ihr herrührenden Nachwirkung tritt die erstere wieder hervor. Man kann also die Nachwirkung nicht etwa aufheben, indem man durch eine äußere Kraft den Faden in die untordierte Lage bringt. Selbst wenn man ihn in dieser eine nicht zu lange Zeit festhält, geht er aus dieser wieder heraus in die durch die frühere Torsion bedingte Lage, um dann ganz allmählich in die ungedrillte Lage zurückzukehren.

Es ist deshalb auch noch nicht gelungen eine Theorie der elastischen Nachwirkung zu geben, das heißt sie auf die molekularen Vorgänge im

Innern der Körper zurückzuführen¹⁾. Wir begnügen uns daher, hier nur die Betrachtungen mitzuteilen, welche W. Weber²⁾ und F. Kohlrausch³⁾ zur Ableitung der obigen die elastische Nachwirkung darstellenden Gleichung geführt haben⁴⁾.

Beide Physiker gehen eben davon aus, daß bei jeder elastischen Verschiebung die Moleküle den wirksamen Kräften nicht frei folgen können, daß sich also ein Widerstand dem Eintritt in die neue durch die gerade wirksamen Kräfte bedingte Gleichgewichtslage entgegenstellt. Nennen wir den Abstand der Moleküle von dieser Gleichgewichtslage x , so setzt W. Weber die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Moleküle in dieselbe hinbewegen, irgend einer Potenz des Abstandes x proportional. Kohlrausch dagegen führt auch die Zeit t ein, welche seit dem Beginn des Wirkens der die neue Gleichgewichtslage bedingenden Kräfte verstrichen ist, also z. B. die Zeit, welche seit dem Aufheben der primären Torsion verstrichen ist. Er setzt dann die Geschwindigkeit, mit welcher die Moleküle zur Zeit t sich der Gleichgewichtslage nähern, dem Abstand x direkt und irgend einer Potenz der Zeit t umgekehrt proportional. Da wir nun, wie wir sahen, diese Geschwindigkeit stets als den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit schreiben können, liefert die Annahme von Kohlrausch die Gleichung

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t^n},$$

wo wir links das negative Vorzeichen schreiben müssen, weil die Bewegung eine Abnahme der x hervorbringt, also der Richtung entgegengesetzt ist, nach welcher x als positiv gerechnet ist. Bei nicht großen kurz dauernden primären Änderungen kann man n gleich 1 setzen, und erhält dann

$$-\frac{dx}{dt} = \alpha \frac{x}{t}.$$

Diese Gleichung läßt sich schreiben

$$-\frac{dx}{x} = \alpha \frac{dt}{t}.$$

Den zur Zeit t vorhandenen Abstand von der Gleichgewichtslage erhalten wir dann, wenn wir den zu einer bestimmten Zeit t_1 nach Aufhören der primären Änderung vorhandenen Abstand mit x_1 bezeichnen, durch Bildung der Summe aller Werte auf der linken Seite von x_1 bis x , auf der rechten Seite von t_1 bis t , oder durch Bildung der bestimmten Integrale

$$\int_{x_1}^x -\frac{dx}{x} = \int_{t_1}^t \alpha \frac{dt}{t}.$$

¹⁾ Man sehe dahin gerichtete Versuche von O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CLII, Poggend. Ann. CLIV. Annalen der Physik und Chemie, neue Folge (Wiedem. Ann.) Bd. IV. Neesen, Poggend. Ann. CLVII.

²⁾ W. Weber, Poggend. Ann. Bd. LIV.

³⁾ Kohlrausch, Poggend. Ann. Bd. CXIX, CXXVIII.

⁴⁾ Eine andere und eingehendere Entwicklung gibt Boltzmann, Wien. B. Bd. LXX. Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. Man sehe über dieselbe auch Kohlrausch, Poggend. Ann. Bd. CLX.

Nach E 2 und E VIII sind dieselben

$$-(\log \text{nat } x - \log \text{nat } x_1) = \log \text{nat } t^\alpha - \log \text{nat } t_1^\alpha,$$

oder auch

$$\frac{x_1}{x} = \frac{t^\alpha}{t_1^\alpha}$$

$$x = \frac{x_1 t_1^\alpha}{t^\alpha} = c \frac{1}{t^\alpha},$$

wenn wir den aus den Beobachtungen zu bestimmenden Zähler der rechten Seite mit c bezeichnen. Wir gelangen somit zu der Gleichung, welche Kohlrausch bei allen kleinern und kurz dauernden Änderungen bestätigt fand, und erkennen gleichzeitig, daß α eine für das betreffende Material charakteristische Konstante ist, welche deshalb Kohlrausch auch als die Konstante der elastischen Nachwirkung bezeichnet.

Bei stärkern länger dauernden primären Änderungen ist n nicht gleich 1, dann erhalten wir für die Verschiebung x zur Zeit t

$$\int_{x_1}^x -\frac{dx}{x} = \int_{t_1}^t \alpha \frac{dt}{t^n} = \int_{t_1}^t \alpha t^{-n} dt,$$

und das wird mit Beachtung der Regel E 1 für die rechte Seite der Gleichung

$$\log \text{nat } x_1 - \log \text{nat } x = -\frac{\alpha}{n-1} t^{-(n-1)} + \frac{\alpha}{n-1} t_1^{-(n-1)},$$

oder, wenn wir $t_1 = 0$ setzen, also x_1 als die Verschiebung ansehen, die im Augenblick des Aufhörens der primären Änderung vorhanden ist,

$$\log \text{nat } \frac{x}{x_1} = \frac{\alpha}{n-1} t^{1-n}$$

$$x = x_1 e^{-\frac{\alpha}{n-1} t^{1-n}},$$

also die Gleichung, welche Kohlrausch in diesem Falle experimentell bestätigte. Wie die Versuche zeigen hängt bei solchen primären Änderungen auch der Wert von α von der Stärke und Dauer derselben ab, er wird besonders mit wachsender Dauer der primären Änderung kleiner, das heißt die elastische Nachwirkung verläuft um so langsamer, je länger die primäre Änderung gedauert hat.

§ 55.

Elasticitätsgrenze. Die bisher besprochenen durch äußere Kräfte hervorgerufenen Veränderungen des Volumens oder der Gestalt der Körper waren vorübergehende, der Körper kehrte nach Aufhören der Wirkung der äußern Kräfte in seinen frühern Zustand zurück, wenn auch ein Teil dieser rückkehrenden Bewegung sehr langsam war. Diese Rückkehr in die ursprüngliche Gleichgewichtslage findet jedoch keineswegs immer statt, man sieht vielmehr immer dann bleibende Änderungen, wenn die ändernden Kräfte oder vielmehr die durch diese hervorgerufenen Änderungen eine gewisse GröÙe überschreiten. Wird ein Draht durch einen sehr starken Zug gedehnt, so behält er nach Aufhören desselben einen Teil seiner Ver-

längerung bleibend bei, er nimmt, auch wenn die elastische Nachwirkung ganz vorüber gegangen ist, nicht wieder die frühere Länge an, seine Moleküle haben eine neue Gleichgewichtslage erhalten. Dasselbe findet man bei den andern von uns betrachteten Fällen; ein zu weit tordierter Draht kehrt nicht wieder in seine ursprüngliche Gleichgewichtslage zurück, ebenso gibt eine zu starke Biegung eine bleibende Durchbiegung des gebogenen Stabes. Hierauf beruht die Verlängerung eines Drahtes, wenn man ihn durch einen Drahtzug zieht; der Abdruck des Stempels auf den Münzen; das Answalzen der Bleche, die Wirkung des Hammers und alle ähnlichen Formänderungen, welche man ohne Trennung des Zusammenhanges der Körper bewirkt.

Es gibt demnach eine Elasticitätsgrenze, oder eine Grenze, welche äußere Kräfte bei ihrer Wirkung auf die Körper nicht überschreiten dürfen, ohne die Körper dauernd zu ändern. Als diese Grenze definiert man dann jene Kraft, beim Dehnen also die Größe des Zuges, bei der Torsion jenes Drehungsmoment, welches die erste bleibende Änderung des Körpers hervorbringt. Diese Grenze ist für verschiedene Substanzen sehr verschieden, Blei z. B. erhält schon bei sehr schwachem Zuge, bei sehr geringer Torsion oder Biegung eine bleibende Änderung, während es bei Eisen oder Stahl ganz erheblicher Kräfte bedarf.

So leicht es ist, eine Definition der Elasticitätsgrenze aufzustellen, so schwierig ist eine scharfe Bestimmung derselben. Zunächst erkennt man, daß strenge genommen eine Kraft, welche eine bleibende Formänderung bewirkt, schon außerhalb der Elasticitätsgrenze liegt. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, hat man z. B. bei der Dehnung jenen Zug, in Kilogrammen ausgedrückt, der pro Quadratmillimeter des Querschnitts wirkt, als Elasticitätsgrenze bezeichnet, welcher einen Draht um 0,00005 seiner ursprünglichen Länge dauernd verlängert.

Indes auch nach dieser Definition, und selbst abgesehen von der elastischen Nachwirkung, bietet die exakte Bestimmung dieser Grenze eine große Schwierigkeit, ja ist nach den Beobachtungen von Thalén¹⁾ gar nicht möglich, wenigstens dann nicht, wenn man die Elasticitätsgrenze in ähnlicher Art wie den Elasticitätskoeffizienten als eine für das Material charakteristische Konstante ansehen will. Zunächst scheint die Zeitdauer der Wirkung der äußeren Kräfte auf die bleibende Veränderung der Körper in ähnlicher Weise von Einfluß zu sein wie bei der elastischen Nachwirkung, ja es scheinen selbst kleine Belastungen bei dauernder Einwirkung permanente Veränderungen hervorzubringen. Aus dem Grunde erlahmen auf die Dauer alle Federn, biegen sich die Balken in den Decken u. s. f. Ferner hat Thalén gezeigt, daß das Eintreten einer permanenten Verlängerung durch den Zug wesentlich davon abhängig ist, ob der Körper schon früher eine Dehnung erfahren hat oder nicht. Ein früher noch nicht gedehnter Körper erhält schon durch kleine Gewichte eine bleibende Verlängerung, ein bereits durch einen starken Zug bleibend gedehnter erst durch sehr viel größere. So fand Thalén bei einem Stabe von mittelhartem schwedischem Stahl, daß bei der ersten Dehnung die Elasticitätsgrenze nach obiger Definition gleich 19,3 war, das heißt ein Zug von 19,3 Kilogramm auf den Quadratmillimeter brachte bei kurz dauernder Wirkung eine bleibende Ver-

Verlängerung von 0,00005 der ursprünglichen Länge hervor. Derselbe Stab wurde dann nach und nach einem Zuge bis zu 40 Kilogr. auf das Quadratmillimeter ausgesetzt, wodurch seine bleibende Verlängerung bis auf 0,005 der ursprünglichen Länge zunahm. Der so verlängerte Stab wurde neuen Dehnungsversuchen unterworfen, und es ergab sich, daß eine neue bleibende Verlängerung jetzt nicht eintrat, wenn auch die früher bestimmte Elasticitätsgrenze erheblich überschritten wurde. Erst ein Zug von 33,8 Kilogr. auf das Quadratmillimeter brachte eine neue Verlängerung von 0,00005 der ursprünglichen Länge hervor. Bei dieser Versuchsreihe wurde der Zug dann auf 44,5 Kilogr. auf das Quadratmillimeter gesteigert und der Stab um 0,00855 seiner ursprünglichen Länge bleibend verlängert. Nachfolgende Dehnungen des Stabes ergaben dann, daß bei dem so verlängerten Stabe die Elasticitätsgrenze erst bei 38,6 Kilogramm erreicht war.

Es ergibt sich somit, daß durch vorhergehende Streckungen die Elasticitätsgrenze sehr erheblich erweitert wird, daß man deshalb die gleiche Elasticitätsgrenze bei demselben Material nur dann findet, wenn dasselbe vorher durch den gleichen Zug gedehnt worden ist. Man erhält deshalb für hart gezogene Drähte eines Metalls ziemlich übereinstimmende Werte der Elasticitätsgrenze. In dieser Weise sind auch die in der Tabelle des folgenden Paragraphen angegebenen von Wertheim¹⁾ erhaltenen Zahlen für hart gezogene Drähte zu verstehen.

Die Beobachtungen Thaléns erklären auch den großen Unterschied, welcher, wie ebenfalls die Tabelle des folgenden Paragraphen zeigt, Wertheim für die Elasticitätsgrenze hart gezogener und geglühter und dann langsam abgekühlter Drähte fand. Durch das Erhitzen gehen die Metalle wieder in den molekularen Zustand über, den sie vor der Streckung besaßen, und deshalb tritt schon bei viel geringerem Zuge eine dauernde Verlängerung ein. Wie Thalén fand, tritt diese Senkung der Elasticitätsgrenze schon bei einer Erwärmung auf 200°C. ein. Das Gleiche wird durch die Reihe von Erfahrungen in der Technik bestätigt, wir erwähnen nur die schlechte Schmiedbarkeit der Metalle, wenn sie glühend sind; die Notwendigkeit beim Auswalzen der Bleche, wenn sie durch mehrere Walzen gegangen sind, dieselben erst neu zu erwärmen u. m. a.

Für die Torsion und Biegung hat Wiedemann²⁾ schon früher ganz Ähnliches gefunden, es zeigt sich auch dort, daß durch mehrmaliges Torsion und Biegen die Elasticitätsgrenze ganz erheblich herausgerückt wird. Man kann deshalb, wie Wiedemann hervorhebt, bei vorher noch gar nicht deformierten, gedehnten, tordierten oder gebogenen Körpern eigentlich von einer Elasticitätsgrenze sprechen, schon die geringsten temporären Deformationen haben bleibende Änderungen zur Folge; erst wenn man die Körper hinlänglich oft innerhalb gewisser Grenzen durch bestimmte äußere Kräfte deformiert hat, kehren sie bei erneuter Einwirkung derselben oder anderer Kräfte im gleichen Sinne, wie die zuletzt angewandten waren, in denselben Zustand zurück, den sie vor dieser erneuerten Einwirkung besaßen.

¹⁾ Wertheim, Poggend. Ann. Erg.-Bd. II. Ann. de chim. et de phys. 1. Ser. T. 12.

²⁾ Wiedemann, Poggend. Ann. Bd. CIII, Bd. CVI, Bd. CVII, Bd. CXVII. Neue Folge, Bd. VI. Über den Zustand permanent tordierter Drähte siehe man auch Warburg, Annalen der Physik, Neue Folge, Bd. X.

§ 56.

Festigkeit. Wenn man die Einwirkung äußerer Kräfte auf festen Körper über die Elasticitätsgrenze hinaus fortsetzt, so gelang endlich dahin, daß der Zusammenhang der einzelnen Teile aufhört; ein über die Elasticitätsgrenze belasteter Draht zerreißt, und starkem Drucke wird ein Körper zerquetscht oder zerstampft, ein zu tordierter Faden wird abgedreht, und ein zu stark gebogener Stab zerbrochen.

Man bezeichnet den Widerstand, den ein Körper der Trennung seiner Teile entgegensetzt, mit dem Namen Festigkeit. So viele verschiedene Arten der Einwirkung es gibt, so viele Arten Festigkeit. Man sucht das Gewicht zu bestimmen, welches einen Draht von beliebiger Länge und 1 Millimeter Durchmesser zu zerreißen imstande ist, und durch dieses die Zugfestigkeit oder absolute Festigkeit der Körper; findet in der folgenden Tabelle eine Anzahl Angaben nach den Versuchen von Wertheim. Zur Bestimmung dieser Zahlen hat man mit den Schwierigkeiten zu kämpfen, die vorhin erwähnt wurden; bei langer und dauernder Belastung reißt ein Draht viel früher als bei schneller und kurz dauernder, Stöße natürlich ausgenommen. Die Festigkeit wird durch die Belastung vermindert. Die folgenden Angaben beziehen sich auf langsame Belastung¹⁾.

Metalle	Elasticitätsgrenze	Gewichte bei Zerreißen
Blei	gezogen 0,25 klgrm, angelassen 0,20	2,07 1,8
Zinn	gezogen 0,45 angelassen 0,20	2,1 1,7
Gold	gezogen 13,5 angelassen 3,0	9 1,7
Silber	gezogen 11,25 angelassen 2,75	
Zink	gezogen 0,75 angelassen 1,00	
Kupfer	gezogen 12,0 angelassen 3,0	
Platin	gezogen 26,0 angelassen 14,5	
Eisen	gezogen 32,5 angelassen 5,0	
Gußstahl	gezogen 55,6 angelassen 5,0	
Stahldraht	gezogen 42,5 angelassen 15,0	

Man sieht, auch hier zeigt sich ein auffallender Unterschied zwischen den verschiedenen Metallen sowohl als auch zwischen den verschiedenen Zuständen desselben Metalles, je nachdem es gezogen oder gegläht ist.

Man sieht ferner, wie zwischen den Gewichten, welche die Elasticitäts-grenze angeben, und jenen, die das Zerreißen bewirken, bei den verschiedenen Metallen ein verschiedener Unterschied vorhanden ist; je größer der Unterschied ist, um so dehnbarer ist das Metall, ohne daß man jedoch diesen Unterschied als Maß der Dehnbarkeit hinstellen könnte.

Die Kraft, mit der ein Körper dem Zerdrücken widersteht, nennt man die rückwirkende Festigkeit; über diese sind nur wenige ältere, meist zu praktischen Zwecken angestellte Versuche vorhanden.

Die relative oder Bruchfestigkeit ist zu praktischen Zwecken vielfach untersucht worden, um die Tragfähigkeit von Balken, Axen u. s. f. zu bestimmen. Gefundene Zahlen anzuführen, denen nur eine praktische Bedeutung zuzuschreiben ist, erscheint überflüssig.

Die Gesetze, nach denen sich die Festigkeiten mit den Dimensionen des Körpers ändern, sind nicht bekannt. Annähernd richtige Resultate wird man unter Anwendung der für die Elasticität gültigen Gesetze erhalten, also z. B. bei der Zugfestigkeit unter der Annahme, daß dieselbe proportional dem Querschnitt sei. Jedoch haben Versuche gezeigt, daß es nicht statthaft ist, aus Versuchen mit Drähten von kleinen Dimensionen auf Stäbe von größeren Dimensionen zu schließen.

Gleiches gilt von der Drehfestigkeit, auch über diese ist nichts Genaueres bekannt.

Man unterscheidet noch eine fünfte Art von Festigkeit, die Härte. Man versteht darunter den geringern oder größern Widerstand, den ein Körper dem Eindringen von Spitzen oder Schneiden entgegensetzt. Man hat darnach die Körper in 10 Klassen geteilt und bestimmt den Grad der Härte darnach, welche Körper den zu untersuchenden noch ritzen können, und welche er ritzen kann. Die Körper, welche man als Härteskala aufgestellt hat, sind nach dem vom geringsten zum größten Härtegrad fortschreitend folgende 10¹⁾

- 1) Talk,
- 2) Steinsalz,
- 3) Kalkspath,
- 4) Flußspath,
- 5) Apatit,
- 6) Feldspath,
- 7) Quarz,
- 8) Topas,
- 9) Korund,
- 10) Diamant.

Man legt darnach einem Körper z. B. den Härtegrad 5 bei, wenn er Flußspath ritzen kann und selbst vom Feldspath geritzt wird. Körper, die gegenseitig ritzen, haben gleiche Härte.

§ 57.

Vom Stosse der Körper²⁾. Auf der Eigenschaft der Elasticität beruhen die Bewegungserscheinungen, welche zwei Körper darbieten, wenn sie gegen einander prallen, wenn sie sich stoßen.

¹⁾ v. Kobell, Lehrbuch der Mineralogie.

²⁾ Die Gesetze des Stosses wurden vollständig zu gleicher Zeit von Wallis,

Haben zwei Massen m und m' gewisse gleichgerichtete Geschwindigkeiten v und v' erhalten, so werden sie, wenn die Geschwindigkeit v von m gröfser ist als die v' von m' , nach einiger Zeit auf einander treffen und während einer sehr kurzen Zeit gegen einander gedrückt sein. Infolge dieses Stofses wird dann die Geschwindigkeit jedes der beiden Körper geändert sein, die Geschwindigkeit des stofsenden Körpers wird verkleinert, die des gestofsenen Körpers wird vergrößert sein. Sind die Geschwindigkeiten der Körper nach dem Stofse c und c' , so erhalten wir zunächst ganz allgemein folgende Relation zwischen den Geschwindigkeiten vor und nach dem Stofse. Während die Körper sich berühren, übt der eine auf den andern einen Druck aus, und infolge dieses Druckes wird die Geschwindigkeit geändert, und zwar für den stofsenden Körper um $v - c$, für den gestofsenen um $c' - v'$. Da der Druck auf die beiden Massen m und m' während derselben Zeit wirkt, so verhalten sich die Geschwindigkeiten, die diese Drucke erteilen, also die soeben abgeleiteten Geschwindigkeitsänderungen umgekehrt wie die Massen, denen sie erteilt sind, oder

$$\frac{v - c}{c' - v'} = \frac{m'}{m}$$

und daraus

$$mv + m'v' = mc + m'c'.$$

Um eine zweite Relation zwischen den Geschwindigkeiten zu erhalten, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

1) Beide Körper sind absolut unelastisch. Der Stofs wird dann eine bleibende Änderung der Gestalt hervorbringen, die Körper entfernen sich nach dem Stofse nicht mehr von einander, sondern bewegen sich nach dem Stofse mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter. In diesem Falle ist also $c = c'$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} mv + m'v' &= (m + m')c, \\ c &= \frac{mv + m'v'}{m + m'}, \\ v - c &= \frac{m'(v - v')}{m + m'}, \quad c' - v = \frac{m(v - v')}{m + m'}. \end{aligned}$$

War die Bewegung v' jener von v entgegengesetzt, so haben wir in diesen Ausdrücken nur v' mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen, und es wird

$$c = \frac{mv - m'v'}{m + m'}.$$

Und ist nun $mv = m'v'$, so wird $c = 0$, also beide Körper bleiben in Ruhe. Dieser Fall scheint also durchaus dem im § 11 abgeleiteten Satze von der Konstanz der lebendigen Kraft zu widersprechen, da die lebendige Kraft nach dem Stofse gleich Null ist. Indes ist der Widerspruch nur scheinbar, da durch den Stofs Arbeit geleistet, nämlich die Gestalt der Massen

Wren und *Huyghens* entwickelt und von *Wallis* am 26. November, von *Wren* am 17. Dezember 1668, von *Huyghens* am 4. Januar 1669 der *Royal Society* zu London vorgelegt, der letztere soll sie jedoch schon im Jahre 1663 entwickelt haben. *Philos. Transact. of the Royal Soc. of London from commencement etc. Abridged with notes etc.* Vol. I. London 1809. p. 307; 310; 335.

bleibend geändert, und, wie wir später nachweisen werden, auch Wärme erzeugt ist. Und da hier, nicht nur wenn $c = 0$ ist, sondern in jedem Falle eine Gestaltsänderung der Massen erfolgt, also Arbeit geleistet wird, so muß in jedem Falle die lebendige Kraft der bewegten Massen nach dem Stosse kleiner sein wie vor dem Stosse. Man findet diesen Satz bestätigt, wenn man die lebendigen Kräfte vor und nach dem Stosse vergleicht.

2) Wenn dagegen die beiden Körper vollkommen elastisch sind, so gleicht sich die im Stosse eintretende Gestaltsänderung sofort wieder aus, die zusammengedrückten Körper sich sofort wieder ausdehnen und ihre ursprüngliche Gestalt annehmen. Die Körper sind also nach dem Stosse wieder in ihrem ursprünglichen Zustande, oder es ist bei dem Stosse keine Arbeit geleistet worden. Die lebendige Kraft der bewegten Massen kann daher durch den Stoß nicht geändert sein. Diese Bemerkung liefert uns für die elastischen Körper die zweite Relation zur Bestimmung der Geschwindigkeiten nach dem Stosse; denn nach derselben ist

$$m v^2 + m' v'^2 = m c^2 + m' c'^2$$

oder

$$m(v^2 - c^2) = m'(c'^2 - v'^2).$$

Dividieren wir diese Gleichung durch die vorhin allgemein abgeleitete

$$m(v - c) = m'(c' - v'),$$

so folgt

$$v + c = v' + c',$$

und aus den beiden letzten Gleichungen

$$c = \frac{2m'v' + (m - m')v}{m + m'}; \quad c' = \frac{2mv + (m' - m)v'}{m + m'},$$

in denen wir wieder das Zeichen von v' ändern müssen, wenn die Geschwindigkeiten die entgegengesetzte Richtung haben.

Nehmen wir nun an, daß $m = m'$ sei, so wird

$$c = v', \quad c' = v.$$

Die Körper haben also nach dem Stosse ihre Geschwindigkeit einfach ausgetauscht. War die Geschwindigkeit der einen Masse m' gleich Null, so wird jetzt die der andern Null, denn dann wird

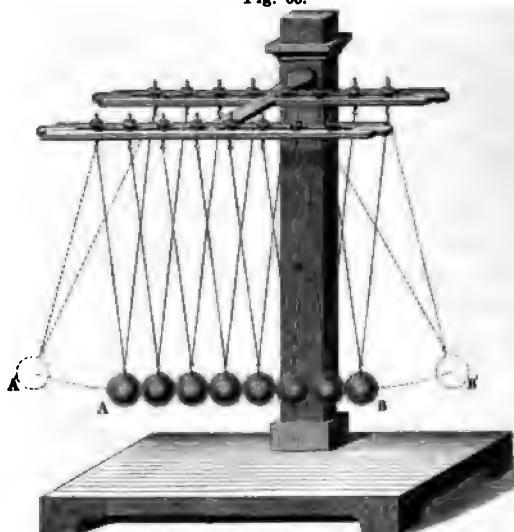
$$c = 0, \quad c' = v.$$

Wird also eine ruhende Kugel von einer bewegten ganz gleicher Masse gerade gestossen, so erhält sie von letzterer deren volle Geschwindigkeit, und die stossende Kugel bleibt in Ruhe. Dieser bemerkenswerte Schluss läßt sich leicht durch den Versuch nachweisen¹⁾. Man hängt an einem Gestelle (Fig. 66) mehrere unter sich gleiche Kugeln von Elfenbein so auf, daß sie sich berühren, und daß ihre Centra sich in einer geraden Linie befinden. Man hebt nun die erste um einen gewissen Winkel und läßt sie dann fallen. Sie beschreibt einen Kreisbogen wie ein Pendel und stößt

¹⁾ Der Apparat zum Nachweis des Satzes vom Stosse der Körper wurde bereits von *Mariotte* angegeben. *Mariotte, Traité de la percussion ou choc des corps. Paris 1677.*

auf die zweite Kugel mit einer Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$. Nach dem Stosse ist sie in Ruhe, gibt aber ihre Geschwindigkeit an die zweite Kugel ab; diese überträgt sie an die dritte u. s. f. durch die ganze Reihe, bis

Fig. 66.



schließlich die letzte Kugel A die Geschwindigkeit erhält, welche B besaß, und deshalb bis A' aufsteigt.

Dann fällt A wieder zurück, erreicht dieselbe Geschwindigkeit und teilt dieselbe wieder durch alle die Kugeln hindurch an B mit. Man hat demnach ein Pendel, welches aus einer Reihe von Kugeln besteht, deren mittlere unbeweglich bleiben, und deren beiden äußeren sich abwechselnd heben und senken.

Ist $m' = \infty$, $v' = 0$ so wird

$$c = \frac{v(m - m')}{m + m'} = -v \frac{m}{m'} = -v,$$

d. h. stößt eine Kugel gegen eine feste Wand, so besitzt sie nach dem Stosse eine ihr gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Geschwindigkeit. Läßt man demnach eine Elfenbeinkugel auf eine Marmorplatte fallen, so muß sie zurückspringen und zu derselben Höhe wieder aufsteigen, von der sie herabfiel, um neuerdings zu fallen und so ihre Bewegung ohne Ende fortzusetzen. Man weiß nun, daß das nicht der Fall ist, daß die Kugel allerdings zurückspringt, aber nicht bis zu ihrer ursprünglichen Höhe, und daß ihre Bewegung nach und nach aufhört. Ebenso findet man, daß die gestossene Kugel niemals genau die Geschwindigkeit der stoßenden erhält, somit, daß unserer Theorie entgegen jedesmal bei dem Stosse ein Verlust von lebendiger Kraft eintritt, respektive ein Teil der lebendigen Kraft in eine andere Form umgesetzt wird. Der Grund dieser Abweichung der Erfahrung von der Theorie liegt eben darin, daß, wie wir § 54 und 55 sahen, die in der Theorie vorausgesetzte vollkommene Elasticität der Körper nicht besteht. Die durch die elastische Kraft geleistete Arbeit ist niemals genau gleich der in der ersten Hälfte des Stoßes geleisteten Arbeit, es wird vielmehr immer im Innern sowohl des stoßenden als des gestossenen Körpers ein Teil der geleisteten Arbeit in andere Formen umgesetzt.

Die in dem Bisherigen abgeleiteten Stoßgesetze gelten nicht nur für Kugeln, sondern für Körper beliebiger Formen unter der Voraussetzung, daß die Körper sich in der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte stoßen, so daß also der durch den Stoß ausgeübte Druck und der elastische Gegen-
druck direkt durch den Schwerpunkt gehen. Lassen wir diese Voraus-

setzung fallen, so ist die Wirkung des Stosses sehr von der Form der stoßenden Körper abhängig.

Bei Kugeln ist es leicht, bei solchen nicht nach dem Centrum gerichteten, also excentrisch oder schiefen Stößen die Bewegung nach dem Stosse abzuleiten.

Seien zu dem Ende A und B (Fig. 67) die Mittelpunkte zweier Kugeln im Momente des Stosses, und sei PA der Richtung und GröÙe nach die Geschwindigkeit v der Kugel A , QB jene v' der Kugel B , sei ferner die Masse der ersten Kugel m , jene der zweiten m' . Die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte AB geht dann stets durch den Berührungspunkt, und steht, da der Radius einer Kugel stets normal ist zu dem Elemente der Kugel, an welches er gezogen ist, normal zu den sich berührenden Elementen. Zerlegen wir die Geschwindigkeit PA in ihre zu AB parallele Komponente SA und die zu AB senkrechte Komponente PS , und ebenso die Geschwindigkeit QB in QT senkrecht zu AB und TB parallel AB , so sind PS und QT gleichzeitig parallel den Berührungsflächen der beiden Kugeln. Diese Komponenten können daher durch den Stoss nicht geändert werden, dieselben sind nach dem Stosse die gleichen wie vor dem Stosse. Die beiden anderen Komponenten senkrecht zur Berührungsfläche sind nach den Mittelpunkten, also den Schwerpunkten der Kugeln gerichtet, auf diese sind daher unmittelbar die Gesetze des centralen Stosses anzuwenden. Bezeichnen wir den Winkel, den PA mit AB bildet, mit α , den Winkel zwischen QB und BA mit α' , so ist

$$SA = v \cdot \cos \alpha \quad TB = -v' \cos \alpha';$$

die Geschwindigkeiten von A und B parallel SA und BT nach dem Stosse werden dann

$$\xi = \frac{-2mv' \cos \alpha' + (m - m')v \cos \alpha}{m + m'} \quad \xi' = \frac{2mv \cos \alpha - (m' - m)v' \cos \alpha'}{m + m'},$$

worin wir $v' \cos \alpha'$ mit dem negativen Vorzeichen schreiben müssen, weil die Richtung der Komponente TB jener SA entgegengesetzt gerichtet ist. Setzen wir die Massen beider Kugeln als gleich voraus, also $m = m'$, so wird

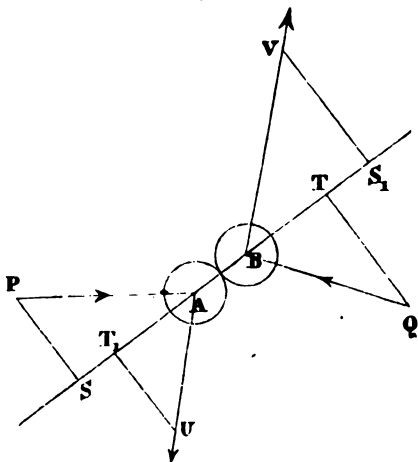
$$\xi = -v' \cos \alpha' \quad \xi' = v \cos \alpha,$$

die beiden Kugeln tauschen einfach ihre parallel AB gerichteten Geschwindigkeiten aus.

Die totalen Geschwindigkeiten nach dem Stosse erhalten wir als Resultierende der je beiden zu einander senkrechten Komponenten

$$c^2 = v^2 \sin^2 \alpha + \xi^2 \quad c'^2 = v'^2 \sin^2 \alpha' + \xi'^2,$$

Fig. 67.



und die Richtung der Bewegung nach dem Stofse respektive den Winkel, den dieselbe mit AB bildete, in den Gleichungen

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{v \sin \alpha}{\xi} \quad \operatorname{tang} \alpha'_1 = \frac{v' \sin \alpha'}{\xi}.$$

Ist also $m = m'$, so wird

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = - \frac{v \sin \alpha}{v' \cos \alpha'} \quad \operatorname{tang} \alpha'_1 = - \frac{v' \sin \alpha'}{v \cos \alpha}.$$

Das negative Vorzeichen bedeutet, daß die Richtungen der Bewegungen AU und BV an der andern Seite von AB liegen, als die Bewegungen vor dem Stofse. Wir erhalten dieselben, indem wir $AT_1 = BT'$, $T_1U = PT$ ziehen in der Linie AU und ebenso, indem wir $BS_1 = AS$, $S_1V = QT$ ziehen in BV , für beide Kugeln der Größe und Richtung nach.

Die Bewegung der beiden Kugeln in einzelnen Fällen ist hiernach leicht zu bestimmen. Wird z. B. eine Kugel gegen eine ruhende gleicher Masse gestossen, so bewegt sich die stoßende nach dem Stofse stets senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte, die gestofsene mit der der Verbindungslinie der Mittelpunkte parallelen Komponente der stoßenden Kugel parallel der Verbindungslinie. Die beiden Kugeln bewegen sich also in zu einander senkrechten Richtungen. Ist m' unendlich $v' = 0$, wird also die Kugel m gegen eine feste Wand geworfen, so daß sie mit der Normale der Wand den Winkel α bildet, so wird

$$\xi = -v \cdot \cos \alpha \quad \xi' = 0 = c' \quad c = v$$

$$\operatorname{tang} \alpha_1 = - \frac{v \cdot \sin \alpha}{v \cdot \cos \alpha} = - \operatorname{tang} \alpha.$$

Die zur Wand normale Komponente bleibt ihrer Größe nach un geändert, sie wird der Richtung nach die entgegengesetzte; die Geschwindigkeit c nach dem Stofse ist deshalb dieselbe wie vor dem Stofse, die Richtung der Bewegung liegt an der andern Seite der Normalen zur festen Wand, in der durch die Bewegungsrichtung vor dem Stofse und der Normalen gegebenen Ebene, sie bildet mit der Normalen zur Wand denselben Winkel wie vor dem Stofse.

Sehr viel verwickelter werden die Wirkungen des Stofses, wenn eine der stoßenden Körper oder beide nicht Kugeln sind. Die nicht kugelförmigen Körper erhalten im allgemeinen durch den Stoß auch eine rotierende Bewegung. Die Wirkung des Stofses ist nämlich stets normal zu dem Flächenelement, in welchem die stoßenden Körper sich berühren, diese Richtung geht aber bei nicht kugelförmigen Körpern im allgemeinen nicht durch den Schwerpunkt derselben. Deshalb erteilt der Stoß solchen Körpern im allgemeinen eine rotierende Bewegung um eine Axe, welche durch den Schwerpunkt der Körper geht, und welche senkrecht ist zu der Ebene, welche durch die Bewegungsrichtung vor dem Stofse und die zur Berührungsfläche normale Richtung gegeben ist. Man erhält das Drehungsmoment, indem man die zur Berührungsfläche senkrechte Komponente der Bewegung nochmals zerlegt, und zwar in die durch den Berührungspunkt und den Schwerpunkt gehende und die zu dieser Richtung senkrechte Komponente; letztere bewirkt die Drehung. Es wird demnach von der lebendigen Kraft der stoßenden Körper ein Teil zur Erzeugung der rotierenden

Bewegung verwandt, die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung muß somit um diesen Betrag vermindert werden. Die Geschwindigkeiten der fortschreitenden Bewegungen müssen deshalb kleinere sein, als sie sich aus den vorhin für Kugeln durchgeführten Rechnungen ergeben.

Ganz vollständig ist indes eine solche Rotation auch nicht bei Kugeln ausgeschlossen; die beiden Kugeln reiben nämlich aneinander, solange die Berührung dauert, und diese Reibung wirkt auf beide Kugeln wie eine der zur Berührungsfläche parallelen Bewegungskomponente entgegengesetzt gerichtete Kraft; diese muß als senkrecht zum Radius an der Peripherie angreifende Kraft eine Rotation der Kugeln zur Folge haben.

§ 58.

Adhäsion. In ähnlicher Weise wie die Moleküle eines und desselben Körpers an einander haften, ziehen sich auch diejenigen zweier getrennter Körper an, wenn man sie hinreichend einander nähert. Am deutlichsten zeigt sich diese als Adhäsion bezeichnete Anziehung, wenn man zwei Körper mit großen Flächen zu recht inniger Berührung bringt. Schleift man zwei Platten von etwa 10 Centim. Durchmesser möglichst gut auf einander, und schiebt sie dann sorgfältig übereinander, so daß sie sich in ihrer ganzen Ausdehnung berühren, so bedarf es eines Zuges von vielen Kilogrammen, um die Platten von einander zu reißen.

Durch Versuche mit solchen sogenannten Adhäsionsplatten, denen man eine verschiedene Größe gibt, kann man erkennen, daß die Größe der Adhäsion mit der Größe der adhärierenden Flächen zunimmt; ein Gesetz der Abhängigkeit der Adhäsion von der Größe der Flächen läßt sich in dieser Art schwierig aufstellen, weil es sich nicht erreichen läßt, bei allen Versuchen eine gleich innige Berührung der Flächen herzustellen.

Auf diesem Aneinanderhaften der Körper bei inniger Berührung beruhen alle Methoden der Verbindung zweier Körper durch irgend ein Bindemittel. Um die Berührung der Körper mit dem Bindemittel möglichst innig zu machen, wird das letztere in flüssiger Form zwischen die zu verbindenden Flächen gebracht, und dann erstarren gelassen. In der Regel adhärieren dann diese Bindemittel stärker an den Körpern, zwischen welche man sie gebracht hat, als ihre Teile unter einander kohärieren, deshalb wird bei einer versuchten Trennung der durch ein solches Bindemittel verbundenen Körper meist eher die Kohäsion des Bindemittels überwunden als die Adhäsion desselben an die verbundenen Körper.

Ein solches Aneinanderhaften zweier Körper zeigt sich auch, wenn man zwei Platten mit genau parallelen Flächen bis auf gewisse kleine Entfernung nähert, ohne daß man sie zur Berührung bringt, schon bei Abständen, welche erheblich größer sind, als daß wir nach den später zu besprechenden Erfahrungen annehmen können, daß die molekularen Kräfte dort nochksam sein können. Stellt man eine Platte genau horizontal und läßt eine andere, welche an einer Wage aquilibriert ist, in kleinen Abständen, von 0,1^{mm} darüber schweben, so bedarf es stets eines nicht unerheblichen Gewichtes, um die schwebende Platte von der festen zu entfernen. Man hat diese von ihm als scheinbare Adhäsion bezeichnete Erscheinung

genauer untersucht¹⁾ und gezeigt, daß sie ein Phänomen ganz anderer Art ist, bei welchem von einer molekularen Anziehung gar keine Rede ist.

Es zeigt sich nämlich, daß es in diesem Falle gar keiner bestimmten Kraft bedarf, um die bewegliche Platte von der festen loszureißen, daß vielmehr schon das kleinste Übergewicht, welches auf die andere Wagschale gelegt wird, dazu ausreicht. Je kleiner aber das Übergewicht ist, einer um so größern Zeit bedarf es, bis der Abstand der Platten von einem gegebenen anfänglichen Wert auf einen gewissen größern Wert gewachsen ist. Diese Zeitdauer ist ferner wesentlich davon abhängig, ob man die Platten in der Luft über einander hängen läßt oder in einer Flüssigkeit, und weiter von der Natur der Flüssigkeit, sie ist eine andere, wenn die Platten in Wasser über einander schweben, als wenn sie sich in Alkohol oder in einer Salzlösung befinden. Gerade die Abhängigkeit der Erscheinung von der Flüssigkeit, in welcher sich die Platten befinden, beweist auf das deutlichste, daß hier ganz andere Kräfte maßgebend sind als eine molekulare Anziehung der beiden Platten. Wir werden deshalb an einer andern Stelle bei Besprechung der Flüssigkeitsreibung auf die Untersuchung von Stefan zurückkommen.

§ 59.

Von der Reibung. Wenn zwei Körper über einander hin bewegt werden, so bedarf es immer einer gewissen Kraft, um die Bewegung zu unterhalten, selbst wenn die Bewegung in genau horizontaler Richtung vor sich geht. Durch die Berührung der Körper tritt also der Bewegung derselben über einander hin ein Hindernis entgegen. Dieses Hindernis bezeichnet man als Reibungswiderstand; er tritt nur dann auf, wenn man einen Körper über einen andern hin in der Berührungsebene zu bewegen sucht.

Die Reibung ist um so stärker, je rauher die Flächen sind, welche sich über einander bewegen; wir müssen daher eben in dieser Rauigkeit ihren hauptsächlichsten Grund suchen, indem dadurch die Teile der Körper teilweise in einander greifen, und deshalb bei jeder Bewegung derselben über einander hin ein geringes Heben des bewegten Körpers stattfinden muß. Je glatter deshalb im allgemeinen die Berührungsflächen sind, um so geringer ist die Reibung. Daß aber in den Unebenheiten der Berührungsflächen nicht der einzige Grund der Reibung zu suchen ist, geht daraus hervor, daß dieselbe auch von der Natur der reibenden Körper abhängig ist. So z. B. zeigt sich, daß bei sonst gleichen Umständen Stahl und Messing auf einander bewegt, den kleinsten Reibungswiderstand zeigen. Wir müssen daher zur Erklärung der Reibung noch eine Anziehung zwischen den Teilen der sich berührenden Körper annehmen, ähnlich wie wir sie bei der Adhäsion gesehen haben.

Man unterscheidet gleitende und rollende Reibung; erstere findet statt, wenn zwei Ebenen über einander hingeschoben werden, oder zwei in einander passende Flächen, wie Zapfen im Zapfenlager sich in einander bewegen. Rollende Reibung tritt auf, wenn ein von krummen Flächen begrenzter Körper so über einen andern hin bewegt wird, daß in jedem Augenblicke

¹⁾ Stefan, Wiener Berichte Bd. LXIX.

andere Punkte der beiden Körper sich berühren, wenn also ein Körper über einen andern fortrollt. Die gleitende Reibung ist bei weitem die stärkere.

Trotz mancher Untersuchungen über die Reibung sind nur wenige Gesetze sicher konstatiert worden. Um die gleitende Reibung zu untersuchen, legt man einen Körper mit einer glatten Fläche auf eine glatte horizontale Unterlage und sucht die Kraft zu bestimmen, deren es bedarf, um den Körper in Bewegung zu versetzen, oder genauer, durch welche man ihn mit gleichförmiger Geschwindigkeit weiter bewegt, wenn man ihn durch einen einmaligen Anstoß in Bewegung gesetzt hat. Diese Kraft mißt die Reibung. Sehr bequem läßt sich dazu auch die schiefe Ebene verwenden, indem man den Winkel aufsucht, um welchen man dieselbe neigen muß, damit der Körper mit gleichförmiger Geschwindigkeit dieselbe hinabgleitet. Man nennt diesen Winkel den Reibungswinkel.

Durch ähnliche Versuche haben Coulomb¹⁾, Rennie²⁾ und besonders Morin³⁾ folgende Gesetze erhalten.

1. Die Reibung ist dem Drucke der Körper auf die Unterlage proportional.

2. Die Reibung hängt bei dem gleichen Drucke nicht von der Ausdehnung der sich berührenden Flächen ab, sofern diese keine Spitzen oder Kanten haben, sondern nur von deren Natur und Glätte.

3. Die Reibung ist unabhängig von der Geschwindigkeit der Bewegung.

Letzterer Satz scheint jedoch nur innerhalb gewisser Grenzen zu gelten, besonders bei sehr raschen Bewegungen scheint doch die Reibung mit der Geschwindigkeit sich zu ändern.

Das Verhältnis der Reibung zu dem Drucke, das heißt den Bruchteil des Gewichtes eines Körpers, der ihn auf horizontaler Ebene in gleichförmiger Bewegung zu erhalten vermag, der nach dem Vorigen für dieselben Körper konstant ist, nennt man den Reibungskoeffizienten. Derselbe ist, wie man sieht, gleichzeitig der Sinus des Reibungswinkels. So ist z. B. der Reibungskoeffizient

von Eisen auf Eisen 0,108,

von Messing auf Gußeisen 0,189 u. s. f.

Im allgemeinen nimmt die Reibung etwas zu, wenn Körper lange auf einander gestanden haben, jedoch nur bei dem Übergange der Körper aus der Ruhe zur Bewegung; einmal bewegt, ist der Reibungskoeffizient wieder der frühere.

§ 60.

Innere Reibung bei festen Körpern. Bei Besprechung der elastischen Nachwirkung haben wir gesehen, daß bei einer Einwirkung äußerer Kräfte auf die festen Körper nur ein Teil der durch sie stattfindenden Verschiebungen sofort eintritt, daß es sehr lange Zeit dauern kann, bis die

¹⁾ Coulomb, Mémoires présentés à l'Acad. de Paris T. X.

²⁾ Rennie, Experiments on the friction etc. Philos. Trans. 1829.

³⁾ Morin, Nouvelles expériences sur le frottement. I. Mémoire présenté à l'Acad. de Paris T. IV 1833. II. Mémoire, Paris 1834. III. Mémoire, Paris 1835. Doves Repertorium Bd. I.

den äußeren Kräften entsprechende Gleichgewichtslage vollständig erreicht ist. Wir schlossen daraus, daß sich der Bewegung der Moleküle ein Widerstand entgegenstellt, allerdings ein Widerstand ganz eigentümlicher Art, dessen Wesen wir noch nicht zu erkennen imstande sind.

Bei der durch elastische Kräfte bewirkten Bewegung fester Körper läßt sich nun noch ein anderer Widerstand erkennen, der sich darin zu erkennen gibt, daß diese Bewegungen allmählich zur Ruhe kommen und zwar viel schneller, als es durch die etwa vorhandenen äußeren Widerstände, wie die Reibung an der umgebenden Luft ihn darbietet, der Fall sein kann. Am bequemsten zur Erkennung dieses Widerstandes und deshalb auch am meisten zur Untersuchung desselben angewandt, sind die schwingenden Bewegungen, welche durch die Torsion eines Drahtes hervorgerufen werden. Tordieren wir einen Draht um einen Bogen φ , so wissen wir, daß infolgedessen ein Drehungsmoment entsteht, welches gleich $D \cdot \varphi$ ist, und welches den Stab in die untordierte Lage zurückzutreiben sucht. Hierin ist D das den Draht zurückdrehende Moment, wenn der Bogen φ gleich der Einheit ist. Wir können uns dieses Drehungsmoment als einen Druck denken, welcher am Ende eines Hebelarms von der Länge eins angreift, dann ist gleichzeitig φ der Abstand des Punktes, an welchem die Kraft angreift von der Gleichgewichtslage, respektive der Weg, den dieser Punkt zurücklegen muß, um in die Gleichgewichtslage zurückzukehren. Ist der Draht an seinem untern Ende mit einem Körper beschwert, etwa einer Kugel, so daß das Trägheitsmoment derselben und des Drahtes in Bezug auf die Axe des Drahtes gleich K ist, so ist die Beschleunigung, welche der im Abstande eins von der Drehungsaxe befindliche Punkt gegen die Gleichgewichtslage erhält, also auch die Winkelbeschleunigung gleich $\frac{D}{K} \cdot \varphi$. Wir erhalten demnach gerade wie im § 25 als Bewegungsgleichung des schwingenden Systems

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \frac{D}{K} \cdot \varphi.$$

Nennen wir die Torsion des Drahtes, die wir ihm ursprünglich erteilten, als wir ihn sich selbst überließen, φ_0 und rechnen die Zeit t von dem Momente an, in welchem wir den Draht sich selbst überließen, so erhalten wir gemäß § 25 für den Abstand φ des Systems von der Gleichgewichtslage zur Zeit t

$$\varphi = \varphi_0 \cos t \sqrt{\frac{D}{K}}.$$

Hieraus folgt, daß wenn

$$t \sqrt{\frac{D}{K}} = 0, \quad \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad 4\pi \dots$$

$$\varphi = \varphi_0, \quad -\varphi_0, \quad \varphi_0, \quad -\varphi_0, \quad \varphi_0 \dots,$$

oder der Draht vollführt Schwingungen, deren Dauer

$$T = \pi \sqrt{\frac{K}{D}}$$

und deren Amplitude konstant gleich φ_0 ist, das heißt, der Draht bewegt sich unaufhörlich jedesmal in der Zeit T zwischen den Grenzen $+\varphi_0$ und $-\varphi_0$ hin und her.

Wenn man die Bewegungen eines solchen Drahtes nun aber verfolgt, und die Amplituden desselben bestimmt, so findet man, daß dieselben stetig kleiner werden. Man kann das am schärfsten, indem man unten an der Kugel einen Spiegel anbringt und dann in der § 54 besprochenen Weise die Bewegung mit Fernrohr und Skala verfolgt; die Punkte, an denen die Bewegung umkehrt, die also den Werten $\pm\varphi_0$ entsprechen sollen, rücken immer näher zusammen. Schon Gauss und Weber, welche zuerst diese Abnahme der Schwingungsweiten verfolgten, fanden, daß die Werte der Amplituden, so lange dieselben nicht zu groß sind, etwa 4 bis 6 Grad betragen, in einer geometrischen Reihe abnehmen. Nennen wir also die Werte der bei den Schwingungen erreichten äußersten Abstände, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$, so findet sich

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = a$$

oder

$$\log \varphi_0 - \log \varphi_1 = \log \varphi_1 - \log \varphi_2 = \dots \log a.$$

Die Differenz der Logarithmen der auf einander folgenden Amplituden ist konstant. Diese Differenzen nennt Gauss die logarithmischen Dekremente.

Dieses Gesetz der Abnahme der Amplitude beweist, daß der schwingenden Bewegung des Drahtes in jedem Momente ein Widerstand entgegenwirkt, welcher der augenblicklichen Geschwindigkeit der Bewegung proportional ist, daß also die Beschleunigung zur Zeit t nicht gleich dem Werte $\frac{D}{K} \varphi$ ist, sondern kleiner, und zwar um eine Größe kleiner ist, welche der augenblicklichen Geschwindigkeit v des schwingenden Drahtes proportional ist. Bezeichnen wir daher mit 2ε den Widerstand, wenn die Geschwindigkeit v gleich eins ist, so können wir die zur Zeit t vorhandene Beschleunigung schreiben

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D}{K} \varphi - 2\varepsilon v$$

da v der erste Differentialquotient von φ nach der Zeit ist,

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -\frac{D}{K} \varphi - 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt}$$

oder

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + k^2 \varphi = 0,$$

wenn wir $\frac{D}{K} = k^2$ setzen.

Aus dieser Gleichung, welche uns eine Beziehung zwischen der Beschleunigung, Geschwindigkeit und der augenblicklichen Lage des Beweglichen gibt, können wir nicht so direkt die Lage des Beweglichen zur Zeit t ableiten, wie wir es § 25 aus der Gleichung konnten, welche die Geschwindigkeit oder den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit nicht enthielt. Wir können indes in Erwägung, daß φ eine solche Funktion von t sein muß, daß die gegebene Gleichung zwischen den ver-

schiedenen Differentialquotienten der Funktion φ und dieser selbst erfüllt sein muß, mit Hilfe unserer Kenntnis von den Eigenschaften der Funktion die gesuchte Funktion in folgender Weise erhalten. Setzen wir

$$\varphi = e^{\lambda t},$$

worin e die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems und λ noch eine zu bestimmende Konstante sein soll, so ist nach E 3a und E IV

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda e^{\lambda t}; \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Setzen wir diese Werte in unsere Gleichung ein, so wird dieselbe

$$e^{\lambda t} (\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2) = 0.$$

Somit entspricht die Funktion $\varphi = e^{\lambda t}$ unserer Gleichung, wenn wir aus der Gleichung

$$\lambda^2 + 2\varepsilon\lambda + k^2 = 0$$

bestimmen, denn mit dem so bestimmten λ wird die uns gegebene Gleichung erfüllt. Für λ erhalten wir aus dieser Gleichung

$$\lambda = -\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Es gibt somit zwei Werte von λ , welche jeder für sich unsere Gleichung erfüllen, nämlich

$$\lambda_1 = -\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}.$$

Jeder dieser beiden Werte hat dieselbe Berechtigung, wir können daher zur Darstellung von φ nicht den einen wählen und den andern verwerfen. Da indes die Exponentialfunktion mit jedem der beiden Werte der gegebenen Gleichung genügt, so thut es auch die Summe

$$\varphi = e^{-\varepsilon t + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} + e^{-\varepsilon t - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t}.$$

Indem wir so φ dieser Summe gleichsetzen, berücksichtigen wir jeden der beiden Werte ganz gleichmäßig. Indes müssen wir an dem so bestimmten Werte von φ noch eine Korrektur anbringen; würden wir die Gleichung für φ so aufstellen, so läge darin eine ganz bestimmte Voraussetzung, es würde nämlich, wenn wir $t = 0$ setzen, $\varphi = 2$ werden, da dann beide Exponenten gleich Null, somit jedes Glied der rechten Seite gleich 1 würde. Wir müssen deshalb jedes Glied der rechten Seite mit irgend einer Konstanten multiplizieren, die indes nicht für beide Glieder dieselbe sein darf, da wir dann eine nicht notwendige spezielle Voraussetzung über die Abhängigkeit des Wertes φ von t machen würden. Sind demnach A und B zwei willkürliche Konstante, deren Wert noch näher zu bestimmen ist, so erhalten wir als ganz allgemeine Beziehung für φ

$$\varphi = A e^{-\varepsilon t + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} + B e^{-\varepsilon t - \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t}$$

oder

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} \{ A e^{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} + B e^{-\sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t} \}.$$

In diesem Ausdrucke müssen wir beachten, daß die beiden Exponenten jedenfalls imaginär sind, denn wenn eine dauernde Bewegung eintreten soll

k^2 jedenfalls erheblich größer sein als ε^2 , wir können daher den Ausdruck schreiben

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} \{ A e^{t \sqrt{-1} \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} + B e^{-t \sqrt{-1} \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} \}.$$

An Stelle der Exponentialfunktion mit imaginären Exponenten kann, wie in der Differentialrechnung bewiesen wird, trigonometrische Funktionen einführen und schreiben

$$\begin{aligned} & A e^{t \sqrt{-1} \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} + B e^{-t \sqrt{-1} \sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} \\ &= (A + B) \cos t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} - (A - B) \sqrt{-1} \sin t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \\ &= e^{-\varepsilon t} \{ (A + B) \cos t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} - (A - B) \sqrt{-1} \sin t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \}, \end{aligned}$$

in jetzt noch die beiden Konstanten A und B zu bestimmen sind.

Dieselben ergeben sich aus der Bedingung, daß zur Zeit $t = 0$ der Stand des schwingenden Drahtes von der Gleichgewichtslage gleich φ_0 soll, und weiter daß, weil zur Zeit $t = 0$ die Bewegung infolge der Sticität des Drahtes beginnt, in diesem Momente die Geschwindigkeit Bewegung gleich Null sein muß. Da zur Zeit $t = 0$ der Wert $t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = 0$, dagegen der Cosinus gleich 1 ist, so ergibt die erste Bedingung

$$A + B = \varphi_0.$$

Um den Koeffizienten des zweiten Gliedes zu bestimmen, haben wir den Quotienten $\frac{d\varphi}{dt}$ zu berechnen. Setzen wir der Abkürzung wegen

$$(A - B) \sqrt{-1} = b; \quad \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = m,$$

mit

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} \{ \varphi_0 \cos mt - b \sin mt \},$$

erhalten wir nach E II, E 3a, E 4, E 5

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= -\varepsilon e^{-\varepsilon t} \{ \varphi_0 \cos mt - b \sin mt \} + e^{-\varepsilon t} \{ -\varphi_0 m \sin mt - mb \cos mt \} \\ &= e^{-\varepsilon t} \{ -(\varepsilon \varphi_0 + mb) \cos mt + (\varepsilon b - m \varphi_0) \sin mt \}. \end{aligned}$$

Dieser Wert soll nun für $t = 0$ ebenfalls Null sein, und das ist nur im Fall, wenn

$$\varepsilon \varphi_0 + mb = 0 \quad b = -\varphi_0 \frac{\varepsilon}{m}.$$

Setzen wir diesen Wert für b in die Gleichung für φ , so wird

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \left\{ \cos mt + \frac{\varepsilon}{m} \sin mt \right\}.$$

Ehe wir die durch diese Gleichung dargestellte Bewegung näher beachten, wollen wir zeigen, daß sie der Gleichung entspricht, die wir zwischen der Beschleunigung und Geschwindigkeit erhielten

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} + k^2 \varphi = 0.$$

Wir haben dazu nur die drei Glieder dieser Gleichung auszurechnen. Das letzte Glied wird

$$k^2 \varphi = k^2 \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \cdot \cos mt + k^2 \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \frac{\varepsilon}{m} \cdot \sin mt.$$

Das mittlere wird nach obiger Entwicklung, wenn wir für b seinen Wert setzen,

$$2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} = -2\varepsilon \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m \right) \sin mt.$$

Zur Berechnung von $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)}{dt}$ haben wir auf $\frac{d\varphi}{dt}$ dieselben Regeln anzuwenden wie zur Berechnung von $\frac{d\varphi}{dt}$ aus φ . Damit wird

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m \right) \sin mt - \varphi_0 \left(\frac{\varepsilon^2}{m} + m \right) e^{-\varepsilon t} m \cdot \cos mt.$$

Beachtet man nun, daß $\frac{\varepsilon^2}{m} + m = \frac{\varepsilon^2 + m^2}{m} = \frac{k^2}{m}$, so sieht man sofort, daß die Summation dieser drei Ausdrücke den Wert 0 gibt.

Man erkennt unmittelbar, daß die Gleichung

$$\varphi = \varphi_0 e^{-\varepsilon t} \left\{ \cos t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} + \frac{\varepsilon}{m} \sin t \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \right\}$$

eine schwingende Bewegung darstellt, wie sie Gauss und Weber bei einem tordierten Drahte beobachteten. Wächst t von 0 ab, so nimmt φ ab, der Draht nähert sich der Gleichgewichtslage, und erreicht dieselbe, wenn das Glied in der Klammer Null wird. Das tritt ein zu einer Zeit t , die sich aus der Gleichung

$$\cos mt + \frac{\varepsilon}{m} \sin mt = 0$$

$$\tan mt = -\frac{\varepsilon}{m}$$

ergibt. Wächst die Zeit weiter, so wird φ negativ, der Draht schwingt auf die andere Seite der Gleichgewichtslage, er erreicht dort den größten Abstand, wenn t einen solchen Wert T hat, daß

$$T \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} = \pi,$$

denn die für die Geschwindigkeit der Bewegung abgeleitete Gleichung zeigt, daß für diesen Wert von t die Geschwindigkeit gleich Null wird, der zu dieser Zeit erreichte Abstand ist also der Punkt, wo die Bewegung umkehrt. Der Abstand φ_1 ist dann

$$\varphi_1 = -\varphi_0 e^{-\varepsilon T}.$$

Wächst die Zeit wieder um denselben Wert

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}},$$

so befindet sich der schwingende Draht wieder an dem andern äußersten Punkte seiner Bahn. Der Abstand wird

$$\varphi_2 = \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}.$$

Der Draht vollführt somit jedesmal in der Zeit T eine Schwingung, und sie auf einander folgenden äußersten Abstände, oder die Amplituden sind, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, zur Zeit

$$0, \quad T, \quad 2T, \quad 3T \dots \dots nT,$$

$$\varphi_0, \quad \varphi_0 e^{-\varepsilon T}, \quad \varphi_0 e^{-2\varepsilon T}, \quad \varphi_0 e^{-3\varepsilon T} \dots \dots \varphi_0 e^{-n\varepsilon T}$$

der die Amplituden gehören einer geometrischen Reihe an, der Quotient der auf einander folgenden Amplituden ist

$$\frac{\varphi_{n-1}}{\varphi_n} = e^{\varepsilon T}.$$

Die Differenz der Logarithmen der Amplituden ist, wenn M der Modulus des Logarithmensystems ist, in welchem wir die Logarithmen nehmen

$$\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n = M \cdot \varepsilon T.$$

Hieraus erkennen wir auch sofort, daß die Beobachtung des logarithmischen Dekrements uns ein Maß für die Größe des der Bewegung entgegenstehenden Widerstandes liefert, denn die Gleichung nach ε aufgelöst liefert

$$\varepsilon = \frac{\log \varphi_{n-1} - \log \varphi_n}{M T} = \frac{A}{M T}.$$

Der Widerstand, welcher der Bewegung entgegensteht, ist somit gleich dem in natürlichen Logarithmen gegebenen logarithmischen Dekrement dividiert durch die Dauer der Schwingungen.

Die Beobachtung der logarithmischen Dekremente der Torsionsschwingungen ist somit ein vortreffliches Mittel, um die Gesetze des denselben entgegenstehenden Widerstandes zu untersuchen. In dieser Weise haben Warburg¹⁾, Streintz²⁾ und besonders Schmidt³⁾ den Widerstand der innern Reibung zu bestimmen versucht.

Der so direkt bei den Schwingungen beobachtete Widerstand ist die Summe zweier Widerstände, welche beide der augenblicklichen Geschwindigkeit der Bewegung proportional sind, und von denen der eine daher rührt, daß die schwingenden Körper eine Reibung an der umgebenden Luft erfahren. Wie man diesen bestimmen und in Rechnung ziehen kann, werden wir bei Besprechung der Luftreibung (§ 117) kennen lernen.

Es ergibt sich nun besonders aus den Versuchen von Schmidt, daß bei den elastischen Schwingungen den Bewegungen ein Reibungswiderstand entgegensteht, welcher von dem in der elastischen Nachwirkung sich zeigenden Widerstande verschieden ist. Wie Schmidt nämlich gezeigt hat, ist bei einem neu aufgehängten und unten mit einer Kugel belasteten Drahte das von der Luftreibung befreite, also lediglich den innern Widerstand messende logarithmische Dekrement anfänglich viel größer als später, dasselbe nähert sich bei längerem Hängen einem kleinsten Werte, den es dann beibehält, wenn der Draht inzwischen keine Veränderung erfährt, welche eine neue elastische Nachwirkung bedingt, und wenn man sich auf so kleine Schwingungen beschränkt, daß diese selbst keine elastische Nachwirkung

¹⁾ Warburg, Monatsberichte der Berliner Akad. für 1869.

²⁾ Streintz, Wiener Berichte Bd. LXIX. Poggend. Ann. CLI.

³⁾ Schmidt, Annalen der Phys. n. F. Bd. II.

hervorrufen. Jede Beeinflussung des Drahtes, die elastische Nachwirkung bedingt, vergrößert wieder das logarithmische Dekrement, also den Widerstand. Entlastet man also den Draht oder nimmt die Kugel ab, wodurch bewirkt wird, daß der Draht mit Nachwirkung sich eine Zeit lang zusammenzieht, so wird bei erneutem Anhängen der Kugel und hervorgerufenen Schwingungen das Dekrement wieder größer, um dann bei dauernder gleicher Belastung wieder auf den frühern kleinsten Wert abzunehmen.

Auf diesen Einfluß der elastischen Nachwirkung führt Schmidt es auch zurück, daß wenn die Amplituden über eine gewisse, aber für jeden Draht durch den Versuch zu bestimmende Grenze vergrößert werden, die Amplituden nicht mehr einer geometrischen Reihe angehören. Es ändert sich dann der Widerstand in komplizierterem Verhältnisse mit der Geschwindigkeit resp. dem Abstände des schwingenden Drahtes von der Gleichgewichtslage, eben weil infolge der elastischen Nachwirkung die Gleichgewichtslage während der Schwingungen nicht die ursprüngliche bleibt. Wegen des verschiedenen Verhaltens der verschiedenen Substanzen in Bezug auf die elastische Nachwirkung ist deshalb die Grenze, bis zu der die Amplituden genommen werden dürfen, so daß die logarithmischen Dekremente konstant sind, für die verschiedenen Substanzen verschieden, die Grenze liegt im allgemeinen um so weiter, je größer die Elastizitätskoeffizienten der betreffenden Substanzen sind.

In welcher Weise der innere Widerstand sich mit den Dimensionen der Drähte ändert, läßt sich aus den Versuchen von Streintz und Schmidt noch nicht mit Sicherheit erkennen. Man wird für jeden Draht, für welchen man den Widerstand etwa bestimmen will, durch direkte Versuche das logarithmische Dekrement der Schwingungen messen müssen.

Zweites Kapitel.

Von den tropfbar flüssigen Körpern.

§ 61.

Konstitution der Flüssigkeiten. Wir haben in § 46 außer den festen Körpern flüssige Körper kennen gelernt und sie dahin definiert, daß sie ein festes Volumen besitzen, aber keine feste Gestalt, sondern die Gestalt des Gefäßes annehmen, in welchem sie sich befinden. Die einzelnen Teile der Flüssigkeiten sind nicht, wie die der festen Körper, fest mit einander verbunden, sie können sich vielmehr unter dem Einfluß der geringsten äußern Kraft gegen einander verschieben und fortwährend ihren Ort verändern, indem jedes Teilchen nach und nach einen bestimmten Platz einnimmt und wieder verläßt, um von einem andern ersetzt zu werden.

Aus dieser, soweit wir beurteilen können, vollkommen freien Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen gegen einander ergibt sich zunächst, daß eine flüssige Masse nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn die auf ein Molekül der Flüssigkeit wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten, also die etwa auf das Molekül wirkenden Kräfte nach gerader

entgegengesetzten Richtungen genau gleich sind und deshalb sich aufheben. Dann wäre der Druck auf das Molekül nach der einen Richtung stärker als nach der gerade entgegengesetzten, so müßte das Molekül, da es auch dem kleinsten Drucke folgt, sich nach der Richtung der größern Kraft bewegen.

Es folgt weiter, daß, wenn wir ein ringsgeschlossenes Gefäß mit Flüssigkeit haben, welche unter der Wirkung irgend welcher Kräfte im Gleichgewicht ist (Fig. 68) und nun durch einen Stempel *A* einen Druck auf die Flüssigkeit ausüben, daß dann dieser Druck sich ganz ungeändert durch die Flüssigkeit ausbreiten muß. Sei der Druck auf den Stempel normal zur Berührungsebene des Stempels und der Flüssigkeit gleich P , so daß die Flächeneinheit der Berührungsebene, welche die Größe S habe, den Druck $\frac{P}{S}$ erhält, so wirkt auf jede im Innern oder in der Grenzfläche der Flüssigkeit gedachte Ebene, deren Fläche gleich s ist, der Druck $\frac{P}{S} \cdot s$, also überall auf die Flächeneinheit der Druck $\frac{P}{S}$.

Fig. 68.



Um dieses nachzuweisen, nehmen wir an, die Flüssigkeit in dem Gefäße Fig. 68 sei unter der Wirkung der Schwere im Gleichgewicht, und es wirke nun auf den Stempel *B* eine Kraft, so daß die Flächeneinheit der Berührungsebene einen normalen Druck p_0 erfahre. Denken wir uns nun von dem Mittelpunkte des Stempels *B* eine Linie in das Innere der Flüssigkeit von der Länge l , etwa in der Richtung nach dem Mittelpunkte des Stempels *A*, und um diese Linie einen Kreiscylinder gelegt, dessen Radius gegen die Länge nur sehr klein sei. Die an *B* anliegende Grenzfläche dieses Cylinders steht dann schief zur Axe, ihre Normale bildet mit der Axe denselben Winkel α , welchen die Normale der Stempelfläche mit der Richtung *AB* bildet. An der andern Seite denken wir uns den Cylinder ebenfalls durch eine schiefe Endfläche begrenzt $a'b'$ (Fig. 69), welche etwa parallel sei mit der Fläche des Stempels *A*, deren Normale mit der Axe den Winkel α' bilde. Die Richtung der Axe bilde mit der Vertikalen den Winkel β . Wenn die Flüssigkeit vor der Herstellung des Druckes im Gleichgewicht war, so bleibt sie es auch nach demselben, die Flüssigkeit befindet sich also im Innern des gedachten Cylinders im Gleichgewicht. Da nun aber infolge des Druckes auf *ab* und der Schwere der im Innern des Cylinders vorhandenen Flüssigkeit eine bewegende Kraft vorhanden ist, so kann die Flüssigkeit wegen der vollkommen freien Beweglichkeit der Teile nur dann in dem Cylinder eingeschlossen und in Ruhe bleiben, wenn die auf die äußere Bezeichnung des Cylinders wirkenden, durch die umgebende Flüssigkeit ausgeübten Drucke gleich den bewegenden Kräften sind, oder wenn die über-

Fig. 69.



haupt auf die Grenzfläche des Cylinders wirkenden Kräfte sich das Gleichgewicht halten. Denken wir uns die überhaupt auf die Flüssigkeit im Cylinders durch die Umgebung ausgeübten Drucke jeden in zwei Komponenten zerlegt, deren eine normal zur Grenzfläche des Cylinders an der Stelle, wo die Kraft wirkt, deren andere parallel der Grenzfläche. So müssen die letztern für sich schon im Gleichgewicht sein, da sonst die Flüssigkeit im Innern des Cylinders sich gegen einander verschieben würde. Die zur Oberfläche normalen Drucke und die Schwere der Flüssigkeit stehen dann für sich wieder im Gleichgewicht, weil sonst der Cylinder solcher sich in der umgebenden Flüssigkeit bewegen würde.

Wenn diese Kräfte sich das Gleichgewicht halten, so haben sie in keiner Richtung eine Resultierende; bilden wir also die Summe der Projektionen nach irgend einer beliebigen Richtung, so muß, welche Richtung wir auch wählen, diese Summe stets gleich Null sein. Projicieren wir die Kräfte, welche, wie wir eben sahen, den Cylinder als solchen betreffen, auf die Axe des Cylinders, so sieht man zunächst, daß die Summe aller Projektionen der auf die Seitenfläche des Cylinders wirkenden Kräfte auf die Axe für sich Null ist, da diese Kräfte zur Axe senkrecht stehen müssen also ebenfalls für sich Null sein die Summe der auf die Axen des Cylinders projicirten Komponenten der auf die schiefen Endflächen wirkenden Drucke und der Schwere der im Cylinder enthaltenen Flüssigkeit. Wir setzen nun den Druck auf die Fläche ab gleich p , den auf die Endfläche $a'b'$ gleich p' , und bezeichnen wir das Gewicht der Flüssigkeit im Cylinder mit q , so ist diese Gleichgewichtsbedingung

$$p \cdot \cos \alpha + p' \cdot \cos \alpha' + q \cdot \cos \beta = 0.$$

Bezeichnen wir den Querschnitt unseres Cylinders mit σ , so ist nach den bekannten Sätzen der Stereometrie die Größe der schiefen Endfläche, welche wir mit s bezeichnen wollen,

$$s = \frac{\sigma}{\cos \alpha},$$

somit

$$\cos \alpha = \frac{\sigma}{s}.$$

Ebenso erhalten wir für $\cos \alpha'$, wenn wir die Größe der schiefen Endfläche $a'b'$ mit s' bezeichnen,

$$\cos \alpha' = \frac{\sigma}{s'}.$$

Das Volumen des schief abgeschnittenen Cylinders ist nun, nach den bekannten Sätzen der Stereometrie, gleich dem Volumen des geraden Cylinders, dessen Axe gleich ist der Länge der Axe des schief abgeschnittenen Cylinders, den wir also erhalten, wenn wir durch die Mitte der schiefen Endflächen die geraden Endflächen a_1b_1 und $a'_1b'_1$ ziehen. Bezeichnen wir die Dichtigkeit der Flüssigkeiten, das Gewicht der Volumeinheit mit d , so ist das Gewicht q der im Cylinder enthaltenen Flüssigkeit

$$q = \sigma \cdot l \cdot d.$$

Setzen wir die so erhaltenen Werte für $\cos \alpha$, $\cos \alpha'$, q in die sich aus dem Gleichgewicht des Cylinders ergebende Gleichung ein, so wird

$$\frac{p}{s} \cdot \sigma + \frac{p'}{s'} \cdot \sigma + \sigma l d \cdot \cos \beta = 0$$

oder

$$-\frac{p'}{s'} \cdot \sigma = \frac{p}{s} \cdot \sigma + \sigma \cdot l d \cdot \cos \beta.$$

Da β der Winkel ist, welchen die Axe des Cylinders mit der Vertikalen bildet, so ist

$$l \cdot \cos \beta = h$$

gleich dem lotrechten Abstände der Mittelpunkte der beiden Endflächen des Cylinders, und wir erhalten dann schliesslich

$$-\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s} + d \cdot h.$$

Die Quotienten $\frac{p}{s}$ und $\frac{p'}{s'}$ liefern uns die auf die Flächeneinheit wirkenden Drucke, vorausgesetzt, dass die Drucke auf derselben gleichmässig verteilt und überall so gross sind als auf den sehr kleinen Flächen s und s' . Dann sagt also die letztere Gleichung, dass auf der untern Fläche $a'b'$ des Cylinders ein gegen das Innere des Cylinders gerichteter normaler Druck wirkt, welcher für die Flächeneinheit gleich ist dem auf die Flächeneinheit der obern Endfläche des Cylinders wirkenden Drucke, vermehrt um das Gewicht eines Flüssigkeitscylinde, dessen Querschnitt der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich ist dem vertikalen Abstände der Mittelpunkte der Flächen, welche den Cylinder oben und unten begrenzen.

Da wir nun vorher sahen, dass in einer Flüssigkeit nur Gleichgewicht sein kann, wenn die auf die Moleküle nach entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte einander gleich sind, so folgt, dass eine ebensolche Kraft auf die Flächeneinheit der untern Grenzfläche von innen nach aussen wirkt, und daraus weiter, da wir über die Lage unseres Cylinders, also über den Winkel β und ebenso über die Winkel α und α' gar keine specielle Voraussetzung gemacht haben, dass sich der auf irgend eine Fläche im Innern oder an der Grenze der Flüssigkeit wirkende Druck nach einer beliebigen Richtung ganz ungeändert fortpflanzt, so dass auf die Flächeneinheit immer derselbe Druck wirkt. Setzen wir z. B. in Fig. 68 etwa voraus, dass die Stempel A, B, C sich in derselben Horizontalebene befinden, so ist h gleich Null, und wir erhalten dann, wenn die Querschnitte der Stempel S, S_1, S_2 sind, für die auf dieselben wirkenden Drucke P, P_1, P_2

$$\frac{P}{S} = \frac{P_1}{S_1} = \frac{P_2}{S_2}$$

oder mit der vorhin gewählten Bezeichnung

$$\frac{P}{S} = p_0$$

$$P_1 = p_0 \cdot S_1; \quad P_2 = p_0 \cdot S_2.$$

Liegen die Stempelflächen nicht in derselben Horizontalebene, so gilt für den fortgepflanzten Druck ganz dasselbe; der auf die im tiefern Niveau liegenden Stempelflächen wirkende Druck wird dann nur vermehrt durch

das Gewicht des Flüssigkeitscyinders, dessen Querschnitt gleich ist den der tiefer liegenden Stempelflächen, und dessen Höhe gleich ist der Niveau-differenz der Stempelflächen.

Aus der Gleichmäßigkeit der Fortpflanzung des Druckes ergibt sich nun weiter, daß, wenn wir uns im Innern der Flüssigkeit eine kleine ebene Fläche denken, welche durch die vorhandenen Kräfte irgend einen Druck erfährt, daß der Druck dann unabhängig ist von der Richtung, welche die kleine Fläche hat. Wir mögen die Ebene drehen wie wir wollen, der Druck ist immer derselbe. Die vorhin aus der Beweglichkeit der Moleküle gezogene Folgerung, daß die auf ein Molekül nach gerade entgegengesetzten Richtungen wirkenden Kräfte gleich sein müssen, können wir daher dahin erweitern, daß die im Innern einer Flüssigkeit auf ein Molekül wirkenden Kräfte nach allen Richtungen des Raumes dieselben sind.

§ 62.

Kompressibilität der Flüssigkeiten. Wir haben im vorigen Paragraphen die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes, den wir an einer Stelle einer Flüssigkeit ausüben, lediglich als eine Folgerung aus der vollkommen leichten Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen abgeleitet; wir können aber leicht auch den physikalischen Vorgang erkennen, wodurch diese Ausbreitung des Druckes zustande kommt.

Wenn eine Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, so befinden sich die Moleküle derselben in bestimmten durch die gegenseitigen Anziehungen und Abstosungen bedingten Entfernungen. Wenn wir nun auf eine rings eingeschlossene Flüssigkeit in einer Richtung einen Druck ausüben, so muß zunächst in dieser Richtung, gerade wie bei den festen Körpern, eine Annäherung der Moleküle stattfinden, bis die infolge der Annäherung derselben vergrößerte Abstosung der Moleküle gleich ist der durch den äußern Druck vermehrten Anziehung der Moleküle. Gerade so aber, wie die Moleküle sich in der Richtung des Druckes einander nähern, so nähern sie sich auch in den auf die Druckrichtung senkrechten Dimensionen, und zwar, wie aus der gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes folgt, um genau die gleiche GröÙe. Darin unterscheiden sich also die Flüssigkeiten von den festen Körpern; drücken wir einen festen Körper in der einen Richtung zusammen, so ist die Querdilatation nur ein Bruchteil der in ersterer Richtung eintretenden Kompression; soll die Ausdehnung nach der Quere verhindert werden, so bedarf es deshalb auch nur eines ebenso großen Bruchteils der in der ersten Richtung thätigen Kraft, welche in der Richtung der Querdimensionen der Ausdehnung entgegenwirken muß. Weil aber bei einer in einem unausdehnbaren GefäÙe eingeschlossenen Flüssigkeit die Moleküle nach allen Richtungen sich gleichmäßig nähern, deshalb muß, wenn keine Ausdehnung eintreten soll, von allen Seiten der gleiche Gegendruck wirken.

Die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten können wir somit als eine Folge davon ansehen, daß die Flüssigkeiten in einer Beziehung ebenso wie die festen Körper elastisch sind; es treten in ihnen Elastizitätskräfte immer dann auf, aber auch nur dann, wenn die Moleküle aus ihrer Gleichgewichtslage so verschoben werden, daß sie sich einander

haben; eine Verschiebung der Moleküle ohne Änderung der Dichtigkeit ruft keine elastische Kraft hervor.

Um den Nachweis zu liefern, daß die gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes in der That eine Folge der durch eine Annäherung der Moleküle geweckten elastischen Kraft ist, haben wir zu zeigen, daß die Flüssigkeiten in der That durch äußere Drucke eine Volumverminderung erfahren. Indem wir dann gleichzeitig die durch einen gegebenen Druck hervorgebrachte Volumverminderung messen, können wir die Abhängigkeit der Volumverminderung von dem äußern Drucke und besonders die Frage untersuchen, ob auch hier, wie bei festen Körpern, die Volumverminderung der Größe des Druckes proportional ist. Ist das der Fall, so muß die durch einen auf die Flächeneinheit wirkenden Druck P hervorgebrachte Volumverminderung v

$$v = \alpha \cdot P$$

sein, worin α eine Konstante ist, welche man als den Kompressionskoeffizienten der Flüssigkeit bezeichnet. Der reciproke Wert dieses Koeffizienten oder

$$\frac{1}{\alpha} = E$$

ist dann der Elasticitätskoeffizient der Flüssigkeiten, jener Koeffizient, mit welchem wir die in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens angegebene Volumverminderung multiplicieren müssen, um die durch diese Volumverminderung geweckte elastische Kraft zu erhalten.

Der erste Versuch, um die Kompressibilität der Flüssigkeiten nachzuweisen, wurde von der Academia del Cimento zu Florenz¹⁾ gemacht, jedoch mit ungünstigem Erfolge. Man nahm unter andern Versuchen eine mit Wasser gefüllte, mit einer Öffnung versehene Hohlkugel von Silber. In die Öffnung wurde ein Stempel mit großer Gewalt hineingetrieben; aber anstatt einer Zusammendrückung des Wassers beobachtete man, daß dasselbe durch die Poren des Silbers hindurch gepresst wurde.

Mit günstigerem Erfolge wurde der Versuch im Jahre 1761 von Canton²⁾ wiederholt, dem es gelang, den Nachweis zu liefern, daß das Wasser durch einen äußern Druck eine Verminderung des Volumens erfährt. Canton wandte zu seinen Versuchen eine mit einer langen und engen Glasröhre versehene Kugel an. Dieselbe wurde mit Wasser gefüllt, erhitzt, und wenn das Wasser im Kochen war, die Spitzen der Röhre zugeschmolzen. Durch die Abkühlung zog sich dann das Wasser zusammen und reichte bei einer bestimmten Temperatur bis zu einem gewissen Punkte der Röhre. Durch das Zusammenziehen des Wassers entstand über demselben in der Röhre ein luftleerer Raum. Wurde die Spitze abgebrochen, so drang die Luft rasch in die Röhre, und unter ihrem Drucke sah man die Flüssigkeit in der Röhre sinken. Dieses Sinken hatte jedoch zwei Ursachen, einmal die Zusammendrückung des Wassers, dann aber die Vergrößerung des Volumens des Gefäßes dadurch, daß plötzlich der Druck im Innern desselben um den Druck einer Atmosphäre erhöht wurde. Um die Ver-

¹⁾ Fischer, Geschichte der Physik. Bd. II. p. 207.

²⁾ John Canton, Experiments to prove that water is not incompressible. Philosophical Transactions of London Royal Society, Vol. XII. Poggend. Ann. XII p. 39.

größerung des innern Raumes des Gefäßes zu messen, genügt es, den äußern Druck auf die Gefäßwände gerade so viel zu vermindern, als der innere Druck vermehrt war; brachte man also die Kugel in den leeren Raum, so mußte sich ihr Volumen gerade so vermehren wie in vorigen Falle. Die Vermehrung wurde durch das Sinken des Wassers in der engen Röhre gemessen und die so erhaltene GröÙe von der bei den ersten Versuche erhaltenen abgezogen; der Unterschied gab die Kompressibilität des Wassers. Auf diese Weise war also die Kompressibilität des Wassers bewiesen. Ähnliche Versuche stellte 1820 Perkins¹⁾ an mit gleichem Erfolge. Die ersten genauer messenden Versuche rühren jedoch von Oersted²⁾ her.

Oersted konstruierte einen Apparat, den man Piézometer oder Piezometer nennt. Das Piézometer besteht aus einem weiten GefäÙe (Fig. 70.) an dem sich ein sehr enges Glasrohr *O* befindet, welches in einem kleinen Trichter endigt und unverschlossen bleibt.

Das Rohr ist genau cylindrisch und in gleiche Teile geteilt. Zur Messung muß nun der Apparat graduirt, d. h. die Kapazität des ganzen Gefäßes mit der des zwischen zwei Teilstrichen befindlichen Raumes verglichen werden. Wir wollen das Verfahren etwas näher beschreiben, da wir häufig derselben Aufgabe begegnen.



Man wiegt zunächst das leere Gefäß und füllt es dann mit Quecksilber; wegen der Enge der Röhre läßt sich das nicht durch einfaches Eingießen, weil die im GefäÙe enthaltene Luft entweichen und deshalb das Quecksilber nicht eindringen kann. Man erwärmt daher das Gefäß, um die Luft aus dem Trichter zu treiben, in welchem das Rohr *O* unter Quecksilber steht. Beim Erkalten steigt durch den Druck der äußern Luft das Quecksilber in die Röhre und das Gefäß auf. Hört das Quecksilber auf zu steigen, so erwärmt man neuerlich und so fort, bis das Gefäß ganz mit Quecksilber gefüllt ist. Um keine Spur Luft in dem Gefäß zu lassen, erwärmt man dann das Gefäß noch einmal, taucht währenddessen seine Spitze in Quecksilber und läßt es dann auf 0° erkalten, indem man es in ein Gefäß mit schmelzendem Eise umgibt. Nach einiger Zeit, vielleicht nach einer Viertelstunde oder bei großen GefäÙen noch länger, nimmt man das mit Quecksilber von der Temperatur 0° gefüllte Gefäß aus dem Eise heraus, trocknet es rasch und vorsichtig ab und bestimmt mit

rasch sein Gewicht. Von dem erhaltenen Totalgewicht *P* zieht man das Gewicht *p* des leeren Gefäßes ab und erhält aus dem Quotienten $\frac{P-p}{D}$ das Volumen des Gefäßes in Kubikcentimetern, wenn *P* und *p* in Grammen gegeben und *D* das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist.

¹⁾ Perkins, Philosophical Transactions. Vol. LXXII. 1820. Poggend. Ann.

²⁾ Oersted, Denkschriften der Kopenhagener Akademie IX. Bd. 1822. Poggend. Ann. Bd. IX. p. 603.

Darauf erwärmt man das Gefäß sehr wenig, bewirkt dadurch, daß was Quecksilber austritt, und läßt es wieder wie vorhin auf 0° erkalten. Dabei zieht sich das Quecksilber zusammen, und schließlich wird das Ende des in die Röhre hineinragenden Quecksilberfadens konstant einem Teilstriche der Röhre gegenüber stehen, der um n Teilstriche tiefer sei als der vorigen Wägung. Jetzt wiegt man wieder; und ist das jetzt gemessene Gewicht gleich P' , so gibt die Verminderung des Gewichtes $P - P'$ an, wieviel Gramme Quecksilber den Raum zwischen jenen n Teilstrichen ausfüllen: der Quotient $\frac{P - P'}{D}$ gibt dann diesen Raum in Kubikcentimetern an, und der Quotient $\frac{P - P'}{nD}$ den Raum zwischen zwei Teilstrichen in derselben Einheit an.

Nach geschriebener Kalibrierung wird das Gefäß in ganz gleicher Weise mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt und in den kleinen Trichter ein Tropfen Quecksilber gebracht. Dieser dient einmal als Tropfen, um das Eindringen von Flüssigkeit in das Gefäß zu verhüten, dann aber auch als Index, da er während der Kompression in die Röhre gedrückt wird und somit angibt, um wieviel das Volumen der Flüssigkeit kleiner geworden ist. Das Gefäß wird auf einer Messingplatte befestigt, daneben ein Thermometer L und eine geteilte, unten offene, oben geschlossene, mit Luft gefüllte Röhre K , welche als Druckmesser dient, befestigt, und dann die ganze Vorrichtung in ein mit Wasser gefülltes Gefäß hinabgelassen, das als Kompressionsapparat dient.

Das Gefäß E besteht aus einem Cylinder von starkem Glase, der unten in einen Fuß F eingelassen und oben mit einer Fassung versehen ist, in deren Röhre A sich ein beweglicher Kolben D befindet. Man füllt das Gefäß, während der Kolben sich über A befindet, durch den Hahn B mit Wasser so weit, daß dasselbe aus einer Öffnung bei A ausfließt. Man schließt dann den Hahn und schraubt den Kolben herab. Sobald derselbe unter A herabgeschraubt ist, kann kein Wasser mehr entweichen, und das in dem Gefäße wird zusammengedrückt.

Der Druck, den man auf diese Weise ausübt, trifft nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen in ganz gleicher Weise die äußere Wand des Piézometers und die in seinem Innern enthaltene Flüssigkeit. Man sieht nun den Index um eine gewisse Anzahl Teilstriche sinken und mißt dadurch die Volumverminderung der im Piézometer enthaltenen Flüssigkeit. Zugleich wird auch die Luft in der Röhre K komprimiert, und in der Volumveränderung derselben erhalten wir, wie wir später sehen werden, ein Maß für den ausgeübten Druck.

Man hat auf diese Weise die Volumverminderung gemessen und andererseits den Druck, welcher dieselbe hervorgebracht hat. Dividirt man die Volumveränderung durch das ursprüngliche Volumen und diesen Quotienten durch den auf die Flächeneinheit wirkenden Druck, so erhält man den scheinbaren Kompressionskoeffizienten der Flüssigkeit, d. h. die Kompression der Flüssigkeit ohne Rücksicht auf diejenige des Gefäßes.

Oersted fand diesen Koeffizienten für Wasser gleich 46 Milliontheile, wenn man als Einheit des Druckes den einer Atmosphäre annimmt, d. h. wenn man in einem rings geschlossenen Gefäße auf jedes Quadratcentimeter

Oberfläche einen Druck von 1,0333 Kilogramm ausübt, so wird die Flüssigkeit um 46 Milliontheile ihres ursprünglichen Volumens komprimiert. Oersted hielt dies für die wahre Kompressibilität des Wassers; denn er glaubte, weil der Druck in ganz gleicher Weise auf die äußere und innere Wand ausgeübt wird, so könne sich die Kapazität des Gefäßes nicht ändern außer ganz unmerklich dadurch, daß die Wanddicke des Gefäßes etwas geändert wird. Oersted hatte jedoch Unrecht. Denn setzen wir voraus, daß das Piézometer, anstatt mit Wasser gefüllt zu sein, ganz und gar von Glas sei, so ist klar, daß, wenn man dasselbe von außen drückt, der Druck sich auf den innern Kern fortpflanzt und dessen Volumen nach den Gesetzen der kubischen Kompression vermindert. Die Kapazität der Hülle muß sich demnach um die gleiche Größe ändern. Ganz dasselbe muß aber auch der Fall sein, wenn das Gefäß mit Wasser gefüllt ist; denn so wie in dem eben betrachteten Falle der Kern von der Hülle einen Druck erfährt und nach seiner Zusammenpressung einen ganz gleichen Gegendruck ausübt, die Hülle also ganz genau so stark nach innen wie nach außen gedrückt wird, so auch hier, wo der feste Kern durch Wasser ersetzt ist; die Hülle erfährt gleiche Drucke; sowie also in dem Falle des festen Kernes eine Volumveränderung einträte, so muß sie es in diesem Falle auch.

Nennen wir demnach die Kapazität des Piézometers V , P den ausgeübten Druck, κ den Kompressionskoeffizienten des Wassers, so würde bei ganz unverändertem Gefäße die Volumverminderung, welche man beobachtet, $\kappa V \cdot P$ sein. Da aber das Gefäß komprimiert wird, so beobachtet man eine kleinere. Ist nämlich C der kubische Kompressionskoeffizient des Gefäßes, so vermindert sich dessen Volum um $C \cdot P \cdot V$, und dadurch muß die Flüssigkeit im Gefäße steigen. Die beobachtete Kontraktion w ist die Differenz beider:

$$w = \kappa \cdot P \cdot V - C \cdot P \cdot V,$$

oder

$$\frac{w}{P \cdot V} = \kappa - C.$$

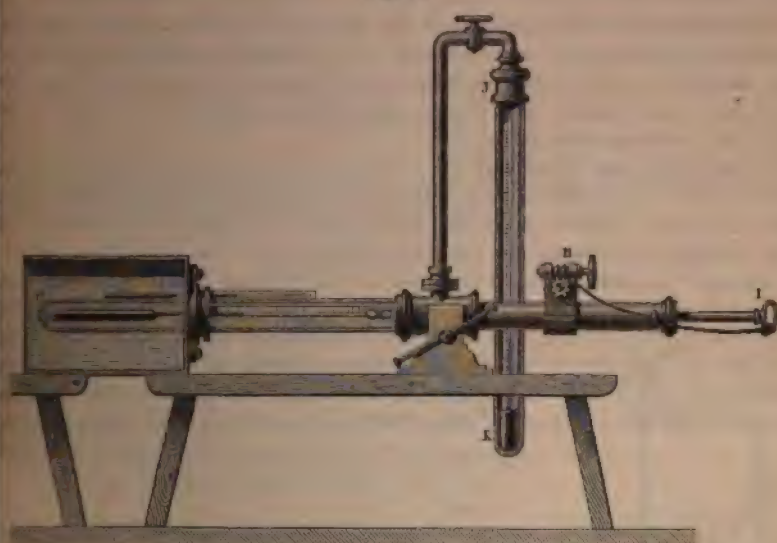
Man beobachtet also die Differenz zwischen dem Kompressionskoeffizienten des Wassers und dem kubischen Kompressionskoeffizienten des Gefäßes.

Colladon und Sturm wiesen diesen Irrtum in Oersteds Versuchen nach und unternahmen es, ihn zu korrigieren¹⁾. Sie stellten eine große Reihe von Versuchen mit einem dem Oerstedschen sehr ähnlichen Apparate (Fig. 71) an. Ein Piézometer A wurde wie das Oerstedsche hergestellt und graduiert und dann in ein weites Gefäß C mit starken Wänden, welches mit Wasser gefüllt war, eingeschlossen. Letzteres diente als Kompressionsapparat. Der einzige Unterschied besteht darin, daß sie das Piézometer horizontal legten und den ausgeübten Druck mit einem fein geteilten, langen und deshalb sehr empfindlichen Quecksilbermanometer KJ maßen. Dieser Druck wurde mit Hilfe eines Kolbens ausgeübt, dessen Stiel I durch ein Seil gezogen wurde, welches um eine, durch eine Schraube ohne Ende H , bewegliche Walze gerollt war.

¹⁾ Colladon und Sturm, Annales de chim. et de phys. T. XXXVI. p. 1
Auch Poggend. Annalen XII, 39.

Colladon und Sturm bemerkten nun bald auch einige Fehlerquellen, welche an sich zwar sehr klein, auf das endliche Resultat wegen der Kleinheit der zu messenden Größen jedoch von bedeutendem Einfluß wurden. Der Index von Quecksilber in der Röhre des Piézometers bot manche Unbequemlichkeit, er adhärirte am Glase, bewegte sich nicht regelmäfsig, sondern sprungweise bei Vermehrung des Druckes. Sie wandten deshalb einen Tropfen Schwefelkohlenstoff oder auch eine kleine Luftsäule an und schickten so regelmäfsig verlaufende Versuche.

Fig. 71.

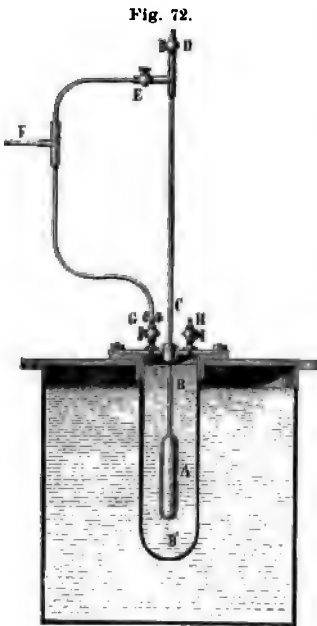


Andererseits ist das Piézometer ein wahres Thermometer und wegen des grossen Gefäßes und der engen Röhre sogar ein sehr empfindliches. Jede Temperaturänderung veranlaßt daher eine Bewegung des Index; und da jede Zusammendrückung das Wasser erwärmt, jede Ausdehnung wieder abkühlt, so waren die beobachteten Variationen Resultate sehr verwickelter Natur. Man schaffte diese Störung fort, indem man das Kompressionsgefäß in ein großes Gefäß mit Wasser einschloß, welches dazu diente, die Temperatur konstant zu halten. Die Versuche waren daher sehr genau. Die Messungen mußten indes wegen der Kompressibilität des Glases korrigiert werden; dazu verfahren die Physiker folgendermaßen. Sie nahmen einen Glasstab von 1 Meter Länge und 13,3 Quadratmillimeter Querschnitt. Dieser wurde durch ein Gewicht von 8 Kilogramm gezogen und eine Verlängerung von $0^{\text{mm}},06$ beobachtet. Er würde durch das gleiche Gewicht um ebensoviel komprimiert worden sein. Der Druck der Atmosphäre ist nun auf den Quadratcentimeter 1,0333 Kilogramm, auf jede Endfläche des Stabes, 13,3 Quadratmillimeter, somit $138^{\text{gr}},3$, und da die Verkürzung des Stabes dem pressenden Gewichte proportional ist, so folgt, daß sich der Stab durch den Druck einer Atmosphäre um $0^{\text{mm}},0011$ verkürzt. Dies ist die lineare Kompressibilität für ein Meter Länge und den Druck einer Atmosphäre.

Colladon und Sturm nahmen nun an, daß ein Druck auf die Endflächen nur eine Verkürzung des Stabes und keine andere Veränderung der Gestalt oder des Querschnittes bewirke. Wenn nach dieser Hypothese ein Druck auf die ganze Oberfläche ausgeübt wird, so muß sich der Stab nach allen Richtungen hin gleichmäßig verkürzen. Die Länge l wird $l(1-0,0000011)$, der Radius der Basis wird $r(1-0,0000011)$, und das ursprüngliche Volumen $\pi r^2 l$ geht sonach über in $\pi r^2 l(1-0,0000011)^3$ oder annähernd mit Vernachlässigung der zweiten und dritten Potenzen in $\pi r^2 l(1-0,0000033)$. Die kubische Kompression wäre sonach die dreifache von der linearen.

Wir sahen jedoch vorhin, daß ein Stab, der in seiner einen Richtung zusammengedrückt wird, zugleich eine Vergrößerung des Querschnittes erhält; deshalb ist die vorstehende Entwicklung nicht exakt und die Korrektion sowie die von Colladon und Sturm gegebenen Zahlen für die Kompressibilität der Flüssigkeiten zu groß.

Versuche von Regnault¹⁾. Regnault wurde durch andere Fragen darauf geführt, sich eingehend mit diesem Gegenstande zu beschäftigen, und seine nach einer neuen Methode unternommenen Versuche gestatten es, beide Kompressibilitäten, die der Flüssigkeit und die des Gefäßes zugleich zu messen. Er gibt dem Piezometer *A* eine genau bestimmbare geometrische Gestalt, einer Metallkugel von bekanntem innern und äußern Radius oder eines Cylinders mit ebenen oder halbkugelförmigen Endflächen, wie in Fig. 72. An das Gefäß ist eine gut kalibrierte Glasröhre *CD* angesetzt, die ihrer ganzen Länge nach geteilt ist, und deren Volumverhältnisse in der vorhin beschriebenen Weise bestimmt sind.



Man schließt nun das Gefäß des Piezometers in einen mit Wasser angefüllten Kupfercylinder *B*, der durch einen mittels Schrauben befestigten Deckel verschlossen ist. Durch eine Öffnung des Deckels reicht der Stiel des Piezometers aus dem Gefäße hervor, der mit Kitt in der Öffnung befestigt ist. Das Innere der Röhre kann an ihrem obern Ende durch einen Hahn *D* mit der freien Luft in Verbindung gebracht und dem Drucke der Atmosphäre ausgesetzt werden. Durch den Hahn *E* und die Röhre *EF* kann das Innere der Röhre *CD* aber auch mit einem mit komprimierter Luft gefüllten Gefäße in Verbindung gebracht und so beliebig einem starken Drucke ausgesetzt werden oder nicht. Durch die Röhre *FG* kann dasselbe Gefäß mit komprimierter Luft, wenn der Hahn *G* geöffnet und *H* geschlossen ist, auch einen Druck auf das Wasser des Gefäßes *BB* ausüben.

¹⁾ Regnault, Relation des expériences etc. Mémoires de l'Académie, Tome XXI. p. 429. Paris 1847.

Man kann somit 1) auf das Piézometer einen äußern Druck ausüben, wenn man E schließt, G und D öffnet und H schließt; 2) einen innern und äußern Druck ausüben, wenn man H und D schließt, G und E öffnet; 3) man kann einen innern Druck allein üben, wenn man D und G schließt, H und E öffnet.

Man vollführt nach und nach alle drei Kompressionen.

I. Man komprimiert das Wasser im Gefäß BB . Diesen Versuch haben wir schon § 50 beschrieben bei Betrachtung der kubischen Kompressibilität. Die Flüssigkeit im Piézometer unterliegt keiner Einwirkung; nur das Gefäß ist komprimiert, sein Volumen verkleinert, die Flüssigkeit steigt auf. Bezeichnen wir die eingetretene Volumverminderung mit $\Delta V'$, so ist nach § 50 für den Fall der Kugel

$$\frac{\Delta V'}{V} = \frac{3}{2} \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P.$$

Die Beobachtung liefert uns den Wert von μ und daraus auch den des kubischen Kompressionskoeffizienten des Gefäßes

$$C_1 = 3 \frac{1-2\mu}{E}.$$

II. Man übt innen und außen den gleichen Druck P aus; dabei beobachtet man die Volumverminderung der Flüssigkeit, weniger der des Gefäßes. Bezeichnen wir den Kompressionskoeffizienten der Flüssigkeit mit κ , so erhalten wir für die Volumverminderung der Flüssigkeit aus den Gleichungen des § 50

$$\Delta v_1 = \kappa \cdot P \cdot V;$$

wenn die Flüssigkeit eine massive Kugel, somit der Radius R_0 des § 50 gleich Null. Darnach ist auch die Konstante $b = 0$, und der Wert von c_1 reduziert sich auf das oben hingeschriebene Glied.

Um die Volumverminderung des Gefäßes zu erhalten, haben wir in den Gleichungen des § 50 $P_1 = P_0$ zu setzen. Damit wird

$$b = 0; \quad c = \frac{1}{3K + k} \cdot P = \frac{1-2\mu}{E} \cdot P,$$

mit die Volumverminderung

$$\Delta v_2 = 3 \frac{1-2\mu}{E} \cdot P \cdot V = C_1 P \cdot V.$$

Die in diesem Falle überhaupt beobachtete Verminderung des Volumens V'' ist die Differenz zwischen der Verminderung des Volumens der Flüssigkeit und jener des Gefäßes,

$$\begin{aligned} \Delta V'' &= \Delta v_1 - \Delta v_2 = \kappa P V - C_1 P V, \\ \frac{\Delta V''}{P \cdot V} &= \kappa - C_1; \quad \kappa = \frac{\Delta V''}{P \cdot V} + C_1. \end{aligned}$$

Da der erste Versuch C_1 geliefert hat, können wir aus diesem den Wert von κ berechnen.

III. Der dritte Versuch liefert eine Kontrolle der beiden erstern; übt den Druck P nur im Innern aus. Die beobachtete Volumänderung rührt her von der Kompression der Flüssigkeit und der Ausdehnung Gefäßes, erstere ist wie oben

$$\Delta v_1 = \kappa P V.$$

Die Ausdehnung des Gefäßes erhalten wir aus den Gleichungen § 50, indem wir P_1 gleich Null setzen; damit wird dieselbe

$$\Delta v = P \cdot V \left\{ \frac{3}{3K + k} \cdot \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{3}{2k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \right\},$$

somit

$$\Delta V = \Delta v_1 + \Delta v = P V \left\{ \kappa + \frac{3}{3K + k} \cdot \frac{R_0^3}{R_1^3 - R_0^3} + \frac{3}{2k} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \right\}$$

oder auch, wenn wir K und k durch μ und E ausdrücken,

$$\Delta V = P V \left\{ \kappa + 3 \frac{(1 - 2\mu) R_0^3 + \frac{1}{2}(1 + \mu) R_1^3}{E(R_1^3 - R_0^3)} \right\}.$$

Da nun die bei dem ersten Versuch beobachtete Volumänderung

$$\Delta V' = 3 \frac{\frac{3}{2}(1 - \mu)}{E} \cdot \frac{R_1^3}{R_1^3 - R_0^3} \cdot P \cdot V;$$

da ferner bei dem zweiten Versuche die Volumänderung sich ergab

$$\Delta V'' = \left\{ \kappa - 3 \frac{1 - 2\mu}{E} \right\} P \cdot V,$$

so folgt

$$\Delta V' + \Delta V'' = \left\{ \kappa + 3 \frac{(1 - 2\mu) R_0^3 + \frac{1}{2}(1 + \mu) R_1^3}{E(R_1^3 - R_0^3)} \right\} = \Delta V.$$

Es muß somit die Volumänderung bei dem dritten Versuch g der Summe der Volumänderungen bei dem ersten und zweiten Versuch sein, eine Relation, welche Regnault bei allen seinen Versuchen auf genaueste bestätigt fand. Für die Kompressibilität des Wassers erhält aus den Versuchen Regnaults mit der Kupferkugel

$$\kappa = 0,000\,047\,7,$$

aus den Versuchen mit der Messingkugel

$$\kappa = 0,000\,047\,9,$$

wobei als Einheit des Druckes derjenige einer Atmosphäre vorausgesetzt

Nehmen wir auch hier als Einheit des Druckes den eines Kilogramms auf das Quadratmillimeter, so haben wir diese Zahl durch 0,01032 dividieren, dann wird

$$\kappa = 0,004\,624; \quad E = \frac{1}{\kappa} = 216,2.$$

Später hat Grassi¹⁾ mit den Regnaultschen Apparaten eine Anzahl Flüssigkeiten untersucht; in der folgenden Tabelle sind die von ihm gefundenen Werte zusammengestellt. Die Werte von κ beziehen sich auf Druck einer Atmosphäre.

¹⁾ Grassi, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXXI.

Name der Flüssigkeit	Temperatur	Zusammen- drückbarkeit x für Atm.	Druck in Atmo- sphären, aus denen die Zusammen- drückbarkeit her- geleitet.
Quecksilber	0°,0	0,000 002 95	—
Wasser	0,0	0,000 0503	—
	1,5	515	—
	4,8	499	—
	10,1	480	—
	13,4	477	—
	18,0	463	—
	—	460	—
	25,0	456	—
	34,5	453	—
	43,0	442	—
	53,0	441	—
Äthyläther	0,0	0,000 111	3,408
id.	0,0	131	7,820
id.	14,0	140	1,580
id.	13,8	153	8,362
Äthylalkohol	7,3	0,000 0828	2,302
id.	7,3	853	9,495
id.	13,1	904	1,570
id.	13,1	991	8,97
Äthylalkohol	13,5	0,000 0913	—
Propyloform	8,5	0,000 0625	—
Calcium Lösung 1	17,5	0,000 0306	—
id. id. 2	15,8	206	—
id. id. 2	41,25	229	—
Natriumsalz id. 1	18,5	321	—
id. id. 2	18,1	257	—
id. id. 2	39,6	263	—
Kalium id.	15,5	260	—
Natriumsalpeter id.	18,1	295	—
Ammoniak id.	16,6	297	—
Wasser	17,5	436	—
+ 2HO	13,6	242	—
+ 3HO	14,6	250	—
+ 4HO	16,5	271	—
+ 5HO	14,7	279	—
+ 6HO	14,2	283	—
+ 10HO	14,6	315	—

Als Elasticitätskoefficienten, bezogen wie bei den festen Körpern auf 1 mm und Quadratmillimeter,

$$E = \frac{0,010\,333}{x},$$

sich hieraus ergeben

für Quecksilber	bei 0° C.	$E = 3503$
„ Wasser	„ 0°	205
„ „	„ 13°,4	217
„ „	„ 53°	234
„ Äthyläther	„ 0°	93
„ „	„ 14°	74

flöste, als er in der Röhre vordrang. Nach Beendigung
 te dann die während der Wirkung des Druckes ein-
 minderung dadurch erhalten werden, daß man das Piëzo-
 mit einmal bis zu der Stelle füllte, bis zu welcher die
 war, das Gewicht dieser Flüssigkeit bestimmte, dann
 um Ende der Röhre füllte und nun das Gewicht der so
 er füllenden Flüssigkeit bestimmte. Der Quotient aus
 beiden und dem zuletzt gefundenen Gewichte gibt dann,
 en von Oersted, die scheinbare Kompression. Um aus
 kompressionskoeffizienten zu erhalten, hat man zu dem
 gefundenen Kompression und dem Drucke, der sie her-
 ehen Kompressionskoeffizienten des Glases zu addieren.
 en mit einem Druckmesser bestimmt, den wir im § 64
 Cailletet begnügt sich damit, die scheinbaren Kom-
 für 1 Atmosphäre anzugeben; dieselben sind in folgen-
 zusammengestellt; die in der letzten Kolumne der
 Werte des wahren Kompressionskoeffizienten κ habe
 indem ich den aus Regnaults Beobachtungen (§ 50)
 Kompressionskoeffizienten des Glases

$$C = 0,000\,001\,85$$

ruck zu κ_1 hinzuaddiert habe.

t	Tempe- ratur	κ_1	Druck in At- mosphären, aus denen κ abgelei- tet ist.	κ
..	8° C.	0,000 045 1	705	0,000 046 95
..	8 "	0,000 098 0	607	0,000 099 85
..	9 "	0,000 067 6	174	0,000 069 45
..	9 "	0,000 070 1	305	0,000 071 95
..	11 "	0,000 072 7	680	0,000 074 55
..	10 "	0,000 144 0	630	0,000 145 85

Äthyläther erhaltene Wert stimmt sehr gut mit
 nen; der für Alkohol gefundene ist beträchtlich
 el darin seinen Grund hat, daß der von Cailletet
 asserhaltig gewesen ist; er gibt dessen spezifisches
 e einem ziemlich wasserhaltigen Alkohol entspricht.
 ol gefundenen Werte, von denen der letzte noch
 n Temperatur entspricht, wodurch die ganze Zu-
 es gegen den zweiten erklärt wird, zeigen keines-
 hsen der Kompression mit steigendem Druck, wie
 en von Grassi schließen mußte.

en vorhin schon erwähnten Versuchen den Schluß,
 ucke bei den Flüssigkeiten die Kompressibilität
 welche in höheren Temperaturen noch sehr viel
 en Temperaturen. Die Abnahme tritt am deut-
 1 nicht die Kompressionskoeffizienten als mittlere
 mten hohen Drucke beobachteten Kompressionen

ableitet, sondern wenn man sie aus den mit wachsendem Drucke beobachteten Volumverminderungen für engere Grenzen der Druckzunahme ableitet. So fand Amagat für Äthyläther bei $13^{\circ},7$ C. folgende Kompressionskoeffizienten für die Druckzunahme von einer Atmosphäre, wenn sie abgeleitet wurden aus den Volumverminderungen, die eintreten, als der Druck zunimmt

von	8,53	bis	13,70	Atm.	α	=	0,000 168
"	13,70	"	19,47	"	"	"	0,000 169
"	19,47	"	25,40	"	"	"	0,000 169
"	25,40	"	30,56	"	"	"	0,000 162
"	30,56	"	36,45	"	"	"	0,000 152.

Bis zu 19,47 Atmosphären waren also entsprechend den Beobachtungen von Amaury und Descamps die Koeffizienten konstant, bei weiterer Druckzunahme tritt die Verminderung deutlich hervor.

Bei der Temperatur 100° erhielt Amagat folgende Werte

von	8,50	bis	13,90	Atm.	α	=	0,000 560
"	13,90	"	19,55	"	"	"	0,000 540
"	19,55	"	25,60	"	"	"	0,000 525
"	25,60	"	30,55	"	"	"	0,000 489
"	30,55	"	36,65	"	"	"	0,000 474.

Hier zeigt sich schon bei der zweiten Reihe eine erhebliche Abnahme. Hiernach zeigen die Flüssigkeiten das eigenthümliche von Grassi vermutete Verhalten nicht, sie verhalten sich wie alle übrigen Körper, bei denen unter großen Drucken die Kompressibilitäten schliesslich abnehmen.

§ 63.

Hydrostatischer Druck. Die im § 61 abgeleitete Gleichung über die im Innern einer Flüssigkeit vorhandenen Drucke setzt uns in den Stand, das Verhalten einer Flüssigkeit in einem offenen Gefässe und die in derselben vorhandene Verteilung der Drucke zu bestimmen.

Nehmen wir zunächst an, daß die Flüssigkeit nur der Schwere unterworfen sei, so ergibt sich als erste Folge jener Gleichung, daß die Oberfläche der Flüssigkeit eben und horizontal sein muß. Als Bedingung, daß die Oberfläche einer Flüssigkeit im Gleichgewicht ist, ergibt sich nämlich unmittelbar, daß die auf irgend einen Punkt der Oberfläche wirkenden, der Oberfläche parallelen Kräfte, sich gegenseitig aufheben müssen. Denn wenn das nicht der Fall ist, so wird die Flüssigkeit sich nach der Richtung der größern Kraft bewegen müssen. Dieses Aufheben der der Flüssigkeitsoberfläche parallelen Drucke findet aber nur dann statt, wenn die vorhandenen Drucke normal sind zur Oberfläche und an allen Stellen derselben gleiche GröÙe haben. Denn, sind die Drucke nicht normal, so haben sie eine der Fläche parallele Komponente, welche demnach das Gleichgewicht stören würde; sind die Drucke aber an verschiedenen Stellen verschieden, so tritt ebenfalls, wegen der nach allen Richtungen gleichmäßigen Fortpflanzung des Druckes, eine der Oberfläche parallele Kraft auf, welche nicht durch einen Gegendruck aufgehoben wird. Diese zwei Bedingungen fallen also streng genommen in eine zusammen, da bei Flüssigkeiten immer, wenn die Drucke an allen Stellen einer Fläche dieselben sind, die Drucke normal zur

che sind. Derartige Flächen, in welchen der normale Druck an allen derselbe ist, nennt man Niveauflächen. Damit können wir also als Bedingungsbedingung einer freien Flüssigkeitsoberfläche den Satz setzen, daß dieselbe eine Niveaufläche sein muß.

Für erhielten nun § 61 ganz allgemein für den auf die Flächeneinheit p einer Flüssigkeit wirkenden Druck, wenn in derselben irgendwo eine Fläche einen Druck erhält, der für die Flächeneinheit p_0 ist,

$$p = p_0 + d \cdot h,$$

da die Dichtigkeit der Flüssigkeit und h den vertikalen Abstand des Elementes, auf welchem der Druck für die Flächeneinheit p ist, von der Oberfläche bedeutet, auf welchem der Druck p_0 ist.

Es gehören nun alle diejenigen Flächenelemente zu einer Niveaufläche, welche p einen und denselben Wert hat, für welche also

$$p = p_0 + d \cdot h = \text{const.}$$

In einer gegebenen Flüssigkeitsmasse ist demnach für alle Elemente p konstant, für welche

$$h = \text{const.},$$

die vertikale Abstände von einem gegebenen Punkte alle gleich sind; das ist aber eine horizontale Ebene. Da somit die Niveauflächen die horizontalen Ebenen sind, so muß auch die freie Oberfläche einer Flüssigkeit eine horizontale Ebene sein.

Ganz dasselbe, was von der freien Oberfläche einer Flüssigkeit gilt, gilt auch für die Grenzfläche zweier nicht mischbaren Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen Gewichtes, welche über einander geschichtet sind; diese muß eine horizontale Ebene sein. Es ergibt sich das so unmittelbar aus dem eben abgeleiteten Satze, daß die Niveauflächen in einer Flüssigkeit horizontale Ebenen sein müssen, daß es überflüssig sein wird Beweis besonders zu führen.

Den letztern Fall finden wir in der Regel in der Natur realisiert, in den auf den in unseren Gefäßen vorhandenen Flüssigkeiten die Luft liegt, wie wir im nächsten Kapitel nachweisen werden, auf die Oberfläche der leicht messbaren, in jedem Flächenelement gleichen Druck ausübt.

Aus dem soeben bewiesenen Satze, daß die Niveauflächen im Innern einer Flüssigkeit horizontale Ebenen sind, ergibt sich ferner, daß in einer horizontalen, durch die Flüssigkeit gelegten Ebene der Druck auf jedes Flächenelement derselbe und zwar gleich dem Drucke der Flüssigkeitsoberfläche sein muß, welche sich über diesem Flächenelement befindet. Sehen wir nämlich von dem Drucke der Luft ab, so gibt uns unsere Gleichung, der auf die Flächeneinheit einer Ebene, welche in dem vertikalen Abstande h unter der Oberfläche der Flüssigkeit sich befindet, wirksame Druck p gegeben ist durch den Ausdruck

$$p = d \cdot h.$$

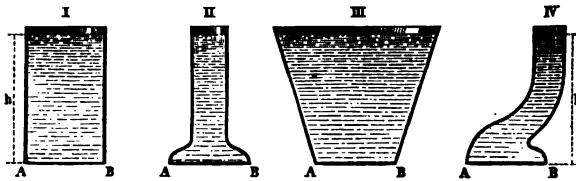
Hat die Fläche im Innern der Flüssigkeit die Größe s , so hat der auf sie wirkende Druck den Wert

$$p \cdot s = s \cdot d \cdot h;$$

er ist also gleich dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt in ihrer ganzen Höhe gleich s ist, und deren Höhe gleich h ist.

Hieraus folgt ein merkwürdiger unter dem Namen des hydrostatischen Paradoxons schon von Pascal ausgesprochener Satz, der Satz nämlich der Druck, welcher auf dem Boden eines Gefäßes wirkt, nur abhängig ist von der Größe der Bodenfläche und von der Höhe der Flüssigkeit im Gefäße, nicht aber von der Menge der im Gefäße enthaltenen Flüssigkeit. Dieser Satz ist in der zuletzt aufgestellten Gleichung unmittelbar enthalten, welche zeigt, daß der Druck auf eine Fläche s , in einer gegebenen Tiefe h nur abhängig ist von der Größe der Fläche und der Höhe der Flüssigkeit über der Fläche. Haben wir demnach Gefäße verschiedener Form, wie etwa Fig. 73, aber stets gleicher Bodenfläche, so ist der auf die Bodenfläche immer derselbe, wenn die Gefäße bis zur gleichen Höhe h mit der

Fig. 73.



Höhe h mit derselben Flüssigkeit sind, einerlei. Die Gefäße sich obgleich sie weiter oder enger werden, ob sie gerade oder gekrümmte Wände haben.

Druck ist immer gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, welche den Querschnitt s der Bodenfläche und die Höhe h hat.

Man kann diesen Satz leicht mit dem Apparate Fig. 74 nachprüfen und so gleichzeitig den experimentellen Beweis des allgemeinen liefern, daß auf die Flächeneinheit einer in der Tiefe h unter der Oberfläche liegenden Ebene ein vertikal abwärts gerichteter Druck wirkt, gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitscylinders, dessen Querschnitt der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich h ist.

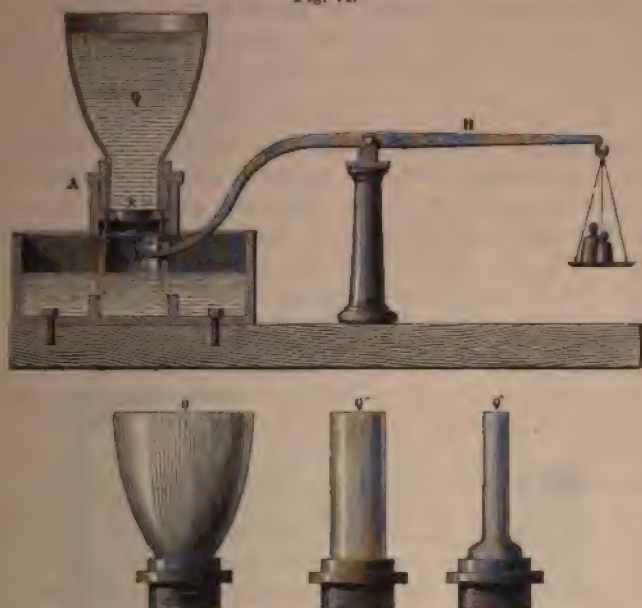
Auf einen hohlen metallischen Cylinder A (Fig. 74) können drei Gefäße verschiedener Form Q , Q' , Q'' wasserdicht aufgeschraubt werden. Die Gefäße sind unten offen; in dem Cylinder A befindet sich aber eine Platte, auf welcher die Messingfassungen der Gefäße unten aufgepaßt sind. Der Boden der Gefäße bildet dann ein in diese Platte genau eingeschliffenes konisches Ventil k , welches sich von unten nach oben öffnen kann. In das Gefäß Q Flüssigkeit bis zu einer bestimmten Marke eingefüllt ist, so wird das Ventil durch das Gewicht der Flüssigkeit fest in die Platte eingedrückt und wasserdicht geschlossen. Das Ventil kann dann durch einen an dem gleicharmigen Hebel H befestigten Stift p berührt werden. Wird in die Wagschale ein Gewicht p gelegt, so hebt der Stift das Ventil mit einem dem Gewichte p gleichen Drucke. Ist nun dieser Druck etwas größer als der von oben nach unten gerichtete Druck der Flüssigkeit auf das Ventil, so öffnet sich dasselbe und die Flüssigkeit fließt in das den hohlen Cylinder A umgebende Gefäß.

Es bedarf nun, welches der Gefäße Q , Q' , Q'' man auch anwendet, stets desselben Gewichtes p , um das Ventil zu heben, wenn man in alle drei dieselbe Flüssigkeit bis zu der in gleicher Höhe über dem Ventil liegenden Marke einfüllt, und zwar ist immer das Gewicht p jenem

Flüssigkeitsschleiers vom Querschnitte der Bodenfläche und der Höhe der Röhre über dem Boden.

Wie wir schon im § 61 zeigten, müssen im Gleichgewichtszustande auf ein Flächenelement im Innern einer Flüssigkeit wirkenden Drucke selbst sein, welche Richtung auch die Normale des Flächenelementes hat. Ebenso wie demnach auf eine horizontale Fläche von der Grösse s

Fig. 74.



vertikal abwärts gerichteter Druck von der Grösse sdh wirkt, ebenso auch ein vertikal aufwärts gerichteter Druck von derselben Grösse auf diese Fläche wirken. Es läßt sich auch dieser Druck leicht durch den Versuch nachweisen. Wenn man nämlich gegen das gut abgeschliffene Ende einer Glasröhre (Fig. 75) eine Messingplatte mittels eines durch die Röhre hindurchgehenden Fadens fest anlegt und dieses Rohr mit der Platte nach unten in ein Wasser gefülltes Glas taucht, so sieht man, daß die Platte fest an das Glas gedrückt wird, es dringt die Flüssigkeit in die Röhre, und die Platte fällt abwärts hinab, wenn man den Faden losläßt; ein Beweis, daß im Innern der Flüssigkeit ein von unten nach oben gerichteter Druck vorhanden ist. Man kann diesen Druck durch einen gleichen in entgegengesetzter Richtung angebrachten messen, indem man in die Röhre so lange Wasser schüttet, bis die Platte herabfällt. Das geschieht, wenn die Flüssigkeit in der Röhre fast genau die Höhe hat, welche die Flüssigkeit im Gefäße hat, um so genauer, je leichter die Platte ist.

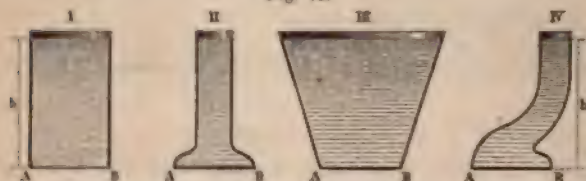
Fig. 75.



er ist also gleich dem Drucke einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt in ihrer ganzen Höhe gleich s ist, und deren Höhe gleich h ist.

Hieraus folgt ein merkwürdiger unter dem Namen des hydrostatischen Paradoxons schon von Pascal ausgesprochener Satz, der Satz nämlich, daß der Druck, welcher auf dem Boden eines Gefäßes wirkt, nur abhängig ist von der Größe der Bodenfläche und von der Höhe der Flüssigkeit in dem Gefäße, nicht aber von der Menge der im Gefäße enthaltenen Flüssigkeit. Dieser Satz ist in der zuletzt aufgestellten Gleichung unmittelbar erhalten, welche zeigt, daß der Druck auf eine Fläche s , in einer gegebenen Flüssigkeit nur abhängig ist von der Größe der Fläche und der Höhe h der Flüssigkeit über der Fläche. Haben wir demnach Gefäße verschiedener Form, wie etwa Fig. 73, aber stets gleicher Bodenfläche, so ist der Druck auf die Bodenfläche immer derselbe, wenn die Gefäße bis zur gleichen

Fig. 73.



Höhe h mit derselben Flüssigkeit gefüllt sind, einerlei ob die Gefäße sich oben erweitern oder verengern, ob sie senkrechte oder geneigte Wände haben; der

Druck ist immer gleich dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, welche über den Querschnitt s der Bodenfläche und die Höhe h hat.

Man kann diesen Satz leicht mit dem Apparate Fig. 74 nachweisen und so gleichzeitig den experimentellen Beweis des allgemeinen Satzes liefern, daß auf die Flächeneinheit einer in der Tiefe h unter der Oberfläche liegenden Ebene ein vertikal abwärts gerichteter Druck wirkt, der gleich ist dem Gewichte eines Flüssigkeitscyinders, dessen Querschnitt gleich der Flächeneinheit und dessen Höhe gleich h ist.

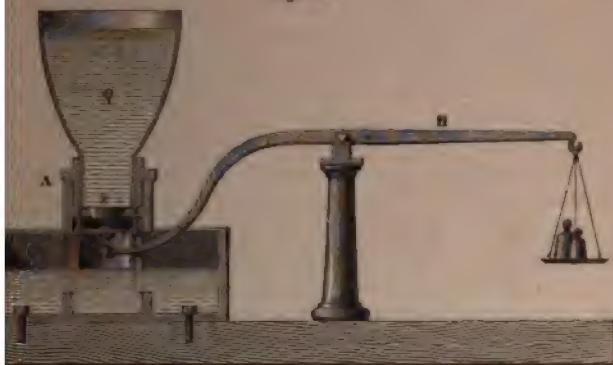
Auf einen hohlen metallischen Cylinder A (Fig. 74) können Gefäße verschiedener Form Q , Q' , Q'' wasserdicht aufgeschraubt werden. Die Gefäße sind unten offen; in dem Cylinder A befindet sich aber eine Platte auf welcher die Messingfassungen der Gefäße unten aufgepaßt sind. Der Boden der Gefäße bildet dann ein in diese Platte genau eingeschliffenes konisches Ventil z , welches sich von unten nach oben öffnen kann. Wenn in das Gefäß Q Flüssigkeit bis zu einer bestimmten Marke eingegossen ist, so wird das Ventil durch das Gewicht der Flüssigkeit fest in die Platte gedrückt und wasserdicht geschlossen. Das Ventil kann dann gelöst werden durch einen an dem gleicharmigen Hebel H befestigten Stift, welcher das Ventil mit einem dem Gewichte p gleichen Drucke hebt. Ist nun dieser Druck etwas größer als der von oben nach unten wirkende Druck der Flüssigkeit auf das Ventil, so öffnet sich dasselbe und die Flüssigkeit fließt in das den hohlen Cylinder A umgebende Gefäß.

Es bedarf nun, welches der Gefäße Q , Q' , Q'' man auch wählt, ein solches Gewicht p , um das Ventil zu heben, wenn man dieselbe Flüssigkeit bis zu der im gleichen Maße über der Marke stehenden, weil was ist immer das Gewicht p .

cylinders vom Querschnitte der Bodenfläche und der Höhe der dem Boden.

Wie schon im § 61 zeigten, müssen im Gleichgewichtszustande die Flächenelemente im Innern einer Flüssigkeit wirkenden Drucke sein, welche Richtung auch die Normale des Flächenelementes, ebenso wie demnach auf eine horizontale Fläche von der Gröfse s

Fig. 74.



abwärts gerichteter Druck von der Gröfse sdh wirkt, ebenso ein vertikal aufwärts gerichteter Druck von derselben Gröfse, welche wirken. Es läßt sich auch dieser Druck leicht durch den nachweisen. Wenn man nämlich gegen das

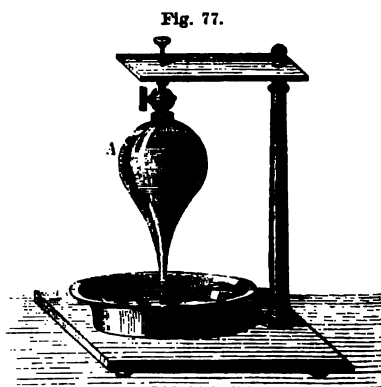
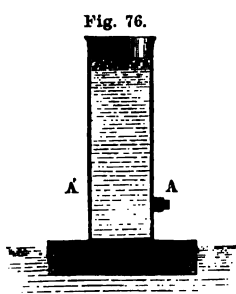
abgeschliffene Ende einer Glasröhre eine Messingplatte mittels eines durch die Röhre gehenden Fadens fest anlegt und das Rohr mit der Platte nach unten in ein gefülltes Glas taucht, so sieht man, daß die Platte an das Glas gedrückt wird, es dringt Wasser in die Röhre, und die Platte fällt, wenn man den Faden losläßt; ein Beweis, daß im Innern der Flüssigkeit ein von unten gerichteter Druck vorhanden ist. Man kann diesen Druck durch einen gleichen in entgegengesetzter Richtung angebrachten messen, indem

man die Röhre so lange Wasser schüttet, bis die Platte herabfällt. Das Wasser in der Röhre hat fast genau die Höhe, welche das Wasser im Gefäße hat, um so genauer, je leichter die Platte ist.

Fig. 75.



Es folgt weiter, daß auch ein Flächenelement der Seitenwand eines Gefäßes, sei sie vertikal oder geneigt, einen Druck erfahren muß, der gleich dem Gewichte des Flüssigkeitseylinders ist, der das Flächenelement zur Basis und den vertikalen Abstand des Elementes von der freien Oberfläche zur Höhe hat. Diesem Drucke hält der durch die Festigkeit der Wand bewirkte Gegendruck das Gleichgewicht. Daß ein solcher Seitendruck vorhanden ist, kann man leicht durch den Versuch nachweisen, indem man an der einen Seitenwand den Gegendruck durch eine Durchbohrung der Wand fortnimmt. Dann tritt nicht nur eine dem innern Drucke folgende Bewegung der Flüssigkeit ein, sondern, wenn das Gefäß wie in Fig. 76 beweglich aufgestellt ist, tritt eine dem noch übrigen Seitendruck folgende Bewegung ein. Man stellt auf einen hinlänglich starken Schwimmer von Kork ein mit Wasser gefülltes Gefäß, das an einer Stelle seiner Seitenwand eine verschließbare Öffnung hat. Ist die Öffnung geschlossen, so drückt das Wasser gegen A ebenso stark wie gegen A' . Wird nun aber die Ausflußöffnung bei A geöffnet, so kann das Wasser an dieser Stelle dem Druck folgen und ausfließen; an der gegenüberliegenden Stelle bei A' dauert aber der Druck fort, und diesem Drucke folgend bewegt sich der Schwimmer mit dem Gefäße in der Richtung AA' .



Die sogenannten Reaktionsräder beruhen auf dieser Wirkung des Seitendrucks; sie bestehen (Fig. 77) aus einer weitem mit Wasser gefüllten Röhre A , welche um eine mit ihrer Axe zusammenfallende vertikale Axe sich drehen kann. An dem untern Ende befinden sich zwei oder mehrere horizontale Ausflußröhren, welche in demselben Sinne gekrümmt sind. Beim Ausfließen des Wassers aus den Öffnungen dieser Röhren treibt der gegen die den Ausflußöffnungen gegenüberliegenden Wände gerichtete Druck das Rad herum.

Es ist nach Besprechung der einzelnen Drucke nicht schwierig, den Druck zu bestimmen, welcher auf irgend ein Flächenstück, sei es im Inneren sei es an der Wand einer Flüssigkeit, ausgeübt wird; es ist das nur eine Aufgabe der Rechnung. Haben wir, um das an einem einfachen Beispiele zu zeigen, eine ebene Wandfläche von rechteckigem Querschnitt, die wir uns vertikal von der Höhe h und der Breite b denken wollen, so erhalten wir den Druck, den die ganze Wandfläche erfährt, in folgender Weise

Denken wir uns in der Tiefe x unter der Flüssigkeit einen horizontalen Streifen der Wandfläche, dessen Höhe dx eine so kleine ist, daß wir ihn als ganz in der in der Tiefe x durch die Flüssigkeit gelegten Niveaufläche liegend ansehen können, so ist der Druck, welcher auf diesen Streifen wirkt, gleich dem Produkte des auf die Flächeneinheit der Niveaufläche wirkenden Druckes und des Flächeninhaltes des Streifens. Ersterer ist, wenn wir annehmen, daß auf der Oberfläche der Flüssigkeit kein Druck lastet, gleich $s \cdot x$, wenn s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit ist; letzterer ist $b \cdot dx$.

Der auf den Flächenstreifen wirkende Druck ist somit

$$s \cdot b \cdot x \cdot dx.$$

Der auf die ganze Fläche wirkende Druck ist die Summe der auf alle einzelnen Streifen wirkenden, welche die ganze Fläche zusammensetzen. Wir erhalten alle diese einzelnen Drucke, wenn wir x nach und nach alle Werte annehmen lassen, von $x = 0$ bis $x = h$, so daß der ganze Druck wird

$$P = \int_0^h s b \cdot x dx = \frac{1}{2} s b h^2 = \frac{1}{2} h f s,$$

wenn wir mit f die Größe der Fläche $f = b \cdot h$ bezeichnen. Der Druck ist also gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich der Fläche f ist, und deren Höhe gleich ist der halben Höhe der Flüssigkeit.

Zu ganz demselben Satze gelangt man, wenn man eine Fläche betrachtet, welche gegen die Vertikale geneigt ist; es ist immer der Druck gleich einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist der Wandfläche, und deren Höhe gleich ist der halben vertikalen Entfernung des untern Randes der Wandfläche von dem Niveau der Flüssigkeit.

Ebenso wie den resultierenden normal gegen die Wandfläche gerichteten Druck können wir auch leicht den Angriffspunkt dieser Resultierenden berechnen. Die auf die einzelnen Flächenelemente wirkenden Drucke sind sämtlich parallel, wir haben also nur den Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte aufzusuchen. Zunächst ist klar, daß der Mittelpunkt der Kräfte in der Halbierungslinie der rechteckigen Fläche liegt, welche wir erhalten, wenn wir die Fläche durch einen vertikalen Schnitt in zwei gleiche Teile teilen. Es liege der Angriffspunkt in dieser Linie im Abstand X von der obern Grenzfläche der Flüssigkeit; bringen wir dann dort eine der Resultierenden gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft an, so ist die Fläche, dieselbe als frei beweglich gedacht, im Gleichgewicht, sie nimmt weder eine fortschreitende noch um irgend eine Axe eine drehende Bewegung an. Denken wir uns deshalb etwa durch die obere Grenze der Flüssigkeit eine in der Fläche liegende horizontale Drehungsaxe gelegt, so muß in Bezug auf diese die Summe der Drehungsmomente gleich Null sein. Die der resultierenden gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft liefert nun das Drehungsmoment

$$- P \cdot X,$$

worin das negative Vorzeichen bedeutet, daß das von dieser Kraft herführende Moment die Fläche entgegengesetzt dreht als die vorhandenen Kräfte.

Der in der Tiefe x auf ein Flächenelement von der Höhe dx wirkende Druck ist

$$s \cdot b \cdot x dx;$$

das von diesem herrührende Drehungsmoment ist somit

$$x \cdot s \cdot b \cdot x dx = s \cdot b \cdot x^2 dx.$$

Die Summe aller Drehungsmomente erhalten wir, wenn wir in diesen Ausdrücke nach und nach für x alle Werte von 0 bis h einsetzen und die alle die für die einzelnen Elemente erhaltenen Werte summieren, also der Summe

$$\int_0^h s b x^2 dx = \frac{1}{3} s b h^3.$$

Somit wird die Gleichung für X

$$P \cdot X = \frac{1}{3} s b \cdot h^3$$

oder, wenn wir nach X auflösen und gleichzeitig für P seinen Wert einsetzen,

$$X = \frac{\frac{1}{3} s b h^3}{\frac{1}{3} s b h^2} = \frac{1}{3} h.$$

Der Angriffspunkt liegt also um $\frac{1}{3}$ der Höhe der Flüssigkeit unter dem obern Niveau derselben.

In ähnlicher Weise kann man für alle Flächen, ebene oder gekrümmte, den resultierenden Druck und dessen Angriffspunkt berechnen, wenn auch die Rechnungen zuweilen nicht so einfach sind.

§ 64.

Kommunicierende Röhren. Unsere Ausführungen über das Gleichgewicht der Flüssigkeiten waren durchaus unabhängig von der Gestalt der Gefäße, in denen die Flüssigkeit enthalten ist. Sie haben daher

Fig. 78.

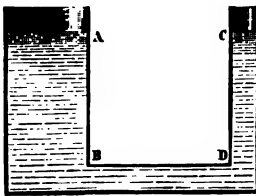
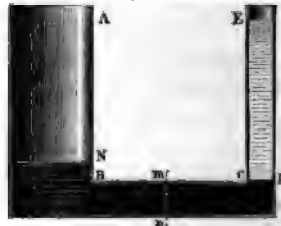


Fig. 79.



Gültigkeit, wenn wir dieselbe in zwei Gefäße verteilen und diese Gefäße so durch eine Röhre mit einander verbinden, daß die Flüssigkeit in beiden gleichsam nur eine Masse bildet. Man nennt solche Gefäße, weil sie meist in Röhrenform angewandt werden, kommunizierende Röhren. Wenn man nun in beiden Röhren AB , CD (Fig. 78) dieselbe Flüssigkeit enthält, so muß, da die Gefäße kommunizieren, die Flüssigkeiten also eine Masse bilden, die Oberfläche derselben horizontal oder in beiden Röhren auf

von gleicher Höhe sein, wenn nicht auf eine derselben etwa noch ein besonderer äußerer Druck ausgeübt wird.

Enthält jedoch die eine Röhre, z. B. AB , eine andere Flüssigkeit von der Dichtigkeit d' , während die Flüssigkeit in der Röhre CD die Dichtigkeit d hat, so müssen die Oberflächen verschiedene Höhen haben. Sei z. B. in AB (Fig. 79) zuerst Quecksilber gegossen und dann in die Röhre CDE Wasser, so muß das Wasser höher stehen als das Quecksilber und zwar α -vielmals höher, als es specifisch leichter ist wie letzteres.

Denken wir uns eine Scheidewand in mn und in derselben ein Element, dessen Größe wir mit o bezeichnen wollen. Von B erhält dasselbe einen Druck, der gleich ist dem Gewichte einer Quecksilbersäule von der Basis o und der Höhe H' , die gleich ist dem senkrechten Abstände der durch o gelegten Horizontalebene von der durch N gelegten Ebene, also gleich $o \cdot H' \cdot d'$, wenn wir mit d' die Dichtigkeit des Quecksilbers bezeichnen. Von der andern Seite her erhält das Flächenelement o einen Druck zunächst von einer Quecksilbersäule von der Höhe h , welche vom Niveau des Flächenstückes o bis CD reicht, und von einer Wassersäule von ebenderselben Basis und der Höhe CE . Nennen wir nun die Dichtigkeit des Wassers d und die Höhe CE , H , so ist der Druck, den das Flächenstück von dieser Seite her erfährt, gleich $ohd' + oHd$. Im Zustande des Gleichgewichtes müssen diese Drucke gleich sein, oder es muß

$$oH'd' = ohd' + oHd,$$

oder

$$(H' - h)d' = Hd;$$

nennen wir nun die Differenz

$$H' - h = NB = H'',$$

so muß

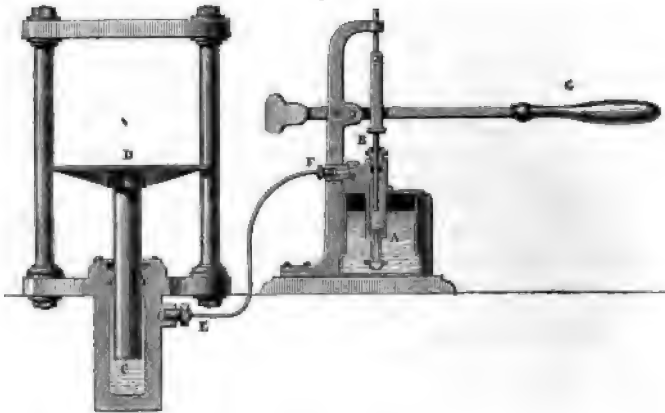
$$\frac{H}{H''} = \frac{d'}{d},$$

oder die beiden Höhen H'' und H der Flüssigkeiten über ihrer Trennungsoberfläche müssen sich verhalten umgekehrt wie die Dichtigkeiten der beiden Flüssigkeiten.

In Fig. 78 hält, wie wir sehen, die kleine Wassermasse in der Röhre CD der großen Wassermenge in AB das Gleichgewicht. Würde daher die Wassermenge AB fortgenommen und anstatt deren ein Kolben bei B auf die dann entstehende Flüssigkeitsoberfläche gelegt, so müßte dieser ein der Wassersäule AB gleiches Gewicht haben, um den in der Fläche B nach oben gerichteten Druck zu äquilibriren. Das Gewicht dieses Kolbens in dem Gewichte der Flüssigkeit in CD verhält sich wie die Querschnitte der Röhren, da sich so das Gewicht der Flüssigkeitssäule AB zu dem der das Gleichgewicht haltenden Flüssigkeitssäule CD verhält. Wenn wir nun auf die Flüssigkeit in der engen Röhre einen Druck p ausüben, so müssen wir, wenn der Kolben in der weiten Röhre diesem Drucke das Gleichgewicht halten soll, diesen mit einem Gewichte P belasten, welches α -vielmals größer ist wie p , als der Querschnitt von AB größer ist als der von CD .

In Bramahs hydraulischer Presse (Fig. 80) ist dieser Umstand benutzt, um mit kleinen Kräften große mechanische Effekte zu erzielen. Die Presse besteht im wesentlichen aus einer kleinen Druckpumpe *AB*, durch welche man Wasser durch die Röhre *EF* in die weite, durch *EF* mit *AB* communicierende Röhre *C* pumpt. In diese passt wasserdicht der Kolben *D*. Das in die Röhre *C* gepumpte Wasser hebt nun den Kolben, der komprimierenden Gegenstände gegen einen festen Widerhalt drückt. Das kann mit einem Drucke von 1 Kilogramm einem Gewichte von 1000 Kilogrammen, wenn der Querschnitt der Röhre *C* zu dem der Pumpenröhre im Verhältnis von 1000 : 1 steht, das Gleichgewicht halten. Dadurch zugleich unser Satz bewiesen, den wir anfänglich ableiteten, daß bei äußeren Drücken auf die Flüssigkeit eines Gefäßes der Druck auf irgend einem Flächenstück der Wandfläche der Größe desselben proportional sei.

Fig. 80.



Bemerken wollen wir hier, daß bei diesen äußerst großen Wirkungen mit kleinen Kräften doch auch nur eine Übertragung der Arbeit, kein Gewinn an solcher eintritt; denn auch hier gilt der Satz wieder, daß die Kraft gewonnen wird, geht an Zeit verloren. Denn soll der Kolben ein Centimeter gehoben werden, so ist eine tausendmal größere Bewegung des Kolbens der Pumpe nötig, da aus dem engen Pumpenrohr die Wassermenge in das weite Rohr geschafft werden muß. Auch hier besteht die Gleichung, daß das Produkt der Kraft in den Weg, durch welchen sie wirkt hat, gleich ist dem Produkte der Last in den Weg, um welche gehoben ist.

Das Princip der hydraulischen Presse ist in sehr sinnreicher Weise von Desgoffe angewandt, um große Drücke, etwa die in der hydraulischen Presse direkt zu messen; das Manometer ist gewissermaßen die Unterlage der hydraulischen Presse. Dasselbe besteht, wie Fig. 81 in perspektivischer Ansicht, Fig. 82 im Durchschnitt des untern Teiles zeigt, aus einem eisernen Gefäße *V* von kreisförmigem Querschnitt, in welchem ein Stempel *D* sich auf und nieder bewegen kann. Das Gefäß enthält Quecksilber und auf demselben eine dünne Wasserschicht. Zwischen der Wasserschicht und dem Stempel ist eine feine Kautschukmembran ausgebreitet, welche durch den aufgeschraubten Kreisring festgehalten wird, da

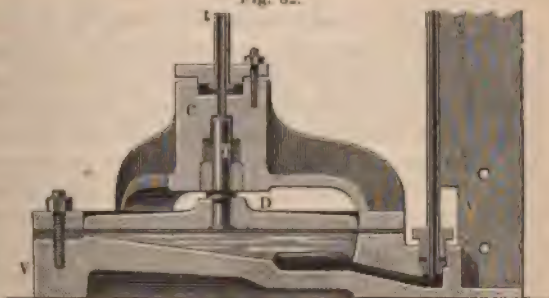
Hülfe der Schrauben so fest angezogen ist, daß die Membran das Gefäß *V* nach oben hin vollkommen wasserdicht absperrt. Auf der Mitte des Stempels *D* steht ein Stahlcylinder *T*, welcher durch eine Stopfbüchse in den

Fig. 81.



Hohlraum des Messingcylinders *C* eintritt, der mit dem die Kautschukmembran befestigenden, auf das Gefäß aufgeschraubten Ringe aus einem Stücke gearbeitet ist. Der Hohlraum des Cylinders *C* steht andererseits durch die Röhre *t*, welche, wie Fig. 82 zeigt, durch die den Hohlraum des Cylinders *C* oben abschließende Platte hindurchgeführt ist, mit dem Raume in Verbindung, in welchem der Druck ausgeübt wird, also etwa mit dem Hohlraum *C* der hydraulischen Presse Fig. 80; man gibt zu dem Ende, wenn man den Druck in der hydraulischen

Fig. 82.



Presse messen will, der Wand derselben eine zweite Durchbohrung, an der man das Ende der Röhre *t* gerade so ansetzt, wie bei *E* die zur Pumpe führende Röhre angesetzt ist. Das Gefäß *V* kommuniziert mit seinem untern Teile mit der seitlich angebrachten Glasröhre *AB*, welche vor einer Teilung an dem an dem Gefäße *V* befestigten vertikalen Ständer fest angebracht ist.

heiten vorausgesetzt, daß nur die Schwere auf dieselben einwirke; die im § 61 durchgeführten Betrachtungen lassen sich aber auch sofort anwenden, um die Bedingungen des Gleichgewichts zu erhalten, wenn noch andere Kräfte auf die Flüssigkeiten einwirken, wenn z. B. die Flüssigkeit sich in einem rotierenden Cylinder befindet, dessen Rotationsaxe die Axe des Cylinders ist. Wir denken uns, um die an den verschiedenen Stellen der Flüssigkeit wirksamen Drucke zu berechnen, gerade wie § 61 einen kleinen Cylinder mit schiefen Endflächen s und s' von so kleinem Querschnitte σ und so kleiner Länge l , daß wir überall in diesem Cylinder die auf die Volumeinheit wirkenden Kräfte als gleich und gleich gerichtet ansehen können. Nennen wir die auf die Volumeinheit wirkenden Kräfte k , so treten diese jetzt ganz einfach an die Stelle des Gewichtes d der Volumeinheit, welches wir § 61 als allein wirksam voraussetzen. Ganz dieselben Betrachtungen, welche wir § 61 anstellten, liefern uns dann für den Druck p' auf der Fläche s' des Cylinders

$$\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s} + k \cdot l \cdot \cos \beta,$$

wenn β den Winkel bedeutet, welcher die Axe unseres Cylinders mit der Richtung der resultierenden Kraft, und p den Druck auf die schiefe Endfläche s bedeutet.

Die Bedingung der Niveauflächen ist auch jetzt wieder, daß in ihnen überall der Druck für die Flächeneinheit derselbe sein muß; somit muß, wenn die beiden Endflächen des kleinen Cylinders ein und derselben Niveaufläche angehören sollen,

$$\frac{p'}{s'} = \frac{p}{s}$$

sein, eine Bedingung, welche erfüllt wird, wenn

$$k \cdot l \cdot \cos \beta = 0.$$

Letztere Bedingung wird aber, da k und l von 0 verschieden sind, nur erfüllt, wenn

$$\cos \beta = 0, \quad \beta = 90^\circ.$$

Ist also die Axe unseres kleinen Cylinders senkrecht zur Richtung der resultierenden Kräfte, so liegt derselbe ganz in einer Niveaufläche, oder die Niveauflächen sind solche, welche an allen Stellen normal zu den resultierenden Kräften sind.

Können wir die Richtung der resultierenden Kräfte bestimmen, so können wir hieraus die Gleichung der Niveauflächen ableiten; wir wollen diese Ableitung für den vorhin schon erwähnten Fall einer Flüssigkeit in einem rotierenden Cylinder durchführen. Die Kräfte, welche dort auf die Flüssigkeit einwirken, sind die Schwere und die Centrifugalkraft; da letztere nur abhängig ist von dem Abstand der betrachteten Flüssigkeitsmasse von der Rotationsaxe und in gleichen Abständen von der Axe dieselbe ist, so folgt, daß die Niveauflächen Rotationsflächen sind, deren Axe die Rotationsaxe des Cylinders ist. Wir erhalten demnach die Flächen schon vollständig bestimmt, wenn wir einen Schnitt derselben, der durch die Rotationsaxe

Zur Bestimmung der Niveaufläche erhalten wir somit die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot x.$$

Die Gleichung liefert uns also direkt den Quotienten aus den beiden Ableitungen der Koordinaten, wenn wir von einem Punkte der Kurve zum nächstenfolgenden übergehen, oder den Zuwachs

$$dy = \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot x \cdot dx,$$

wenn die Ordinate y erfährt, wenn die Abscisse x um dx zunimmt. Nach der in der mathematischen Einleitung dargelegten Bedeutung des Integrals und mit Beachtung von E 1 wird daraus

$$y = \frac{1}{2} \frac{4\pi^2}{g t^2} \cdot x^2 + \text{const.}$$

Der Wert der Konstanten ergibt sich, wenn wir x gleich Null setzen, also jener Wert von y , in welchem die Kurve die Rotationsaxe schneidet, ist das der tiefste Punkt der Flüssigkeitsoberfläche. Nennen wir die Höhe der Flüssigkeit dort h , so erhalten wir

$$y = \frac{2\pi^2}{g t^2} \cdot x^2 + h.$$

Diese Gleichung ist die bekannte Gleichung einer Parabel, deren Axe die Rotationsaxe des Cylinders ist. Es folgt somit, daß die Oberfläche der rotierenden Flüssigkeit ein Rotationsparaboloid ist, dessen Rotationsaxe die Rotationsaxe des Cylinders ist. Die Flüssigkeit steht am höchsten dort, wo x seinen größten Wert hat, also an der Wand des Gefäßes; die Höhe H ist dort, wenn wir mit r den Radius des Gefäßes bezeichnen,

$$H = \frac{2\pi^2}{g t^2} \cdot r^2 + h,$$

$$H - h = \frac{2\pi^2}{g t^2} \cdot r^2.$$

Die Erhebung der Flüssigkeit an der Wand über dem tiefsten Punkt ist also um so größer, je kleiner die Umlaufszeit t ist, je größer somit die Rotationsgeschwindigkeit ist, eine Folgerung, die man leicht mit der Zentrifugalmaschine bestätigen kann.

Da die Niveauflächen einander parallele Flächen sind, so folgt, daß auch im Innern der Flüssigkeiten dieselben Paraboloiden sind, welche der Oberfläche parallel sind; der auf den verschiedenen Niveauflächen wirkende Druck nimmt zu, je tiefer dieselben unter der Oberfläche liegen. Da auf jeder Niveaufläche der Druck an allen Stellen derselbe ist, so haben wir, um ihn zu bestimmen, nur den Druck aufzusuchen, welchen dieselben dort erhalten, wo die Niveauflächen die Rotationsaxe schneiden; man erkennt dann, daß der Druck dort gleich ist dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, deren Höhe gleich ist dem Abstände der betrachteten Niveaufläche von der Oberfläche der Flüssigkeit.

§ 66.

Archimedisches Princip. Wenn ein Körper in eine Flüssigkeit taucht wird, so wird die Oberfläche desselben von der Flüssigkeit rings umher einen Druck erfahren, welcher an allen Punkten senkrecht gegen jedes Element der Oberfläche gerichtet ist, und dessen GröÙe gleich ist dem Gewichte der Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt gleich ist dem Element der Oberfläche des Körpers, und deren Höhe gleich ist der Höhe der Flüssigkeit über diesem Elemente. Wenn wir nun diese rings auf alle Punkte der Körperoberfläche senkrecht wirkenden Druckkräfte in zwei auf einander senkrechte Komponenten zerlegen, eine horizontale und eine vertikale, ist klar, daß erstere als von Flüssigkeitsschichten herrührend, welche gleich tief unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, an den entgegengesetzten Seiten des Körpers paarweise gleich und entgegengesetzt sind; sie werden daher den Körper nur mehr oder weniger zusammendrücken. Anders jedoch mit den vertikalen Komponenten, auch diese werden zwar auf den nach unten den Körper begrenzenden Elementen der Oberfläche vertikal nach unten, auf den untern nach oben, also gerade entgegengesetzt gerichtet sein; sie sind sich nicht gleich, weil die obern Elemente den Druck einer weit hohen Flüssigkeitssäule erfahren als die untern. Mit der Differenz dieser Drucke wird deshalb der Körper in der Flüssigkeit nach oben getrieben werden.

Um die GröÙe dieser Differenz zu erhalten, denken wir uns den Körper durch eine Schar sehr naher vertikaler Ebenen in eine Reihe sehr schmalen Scheiben zerlegt, und diese nochmals durch eine Schar paralleler, ebenfalls vertikaler, aber zu den erstern senkrechter Ebenen zerschnitten. Dadurch haben wir den ganzen Körper in ein Aggregat elementarer Prismen zerlegt, deren Endflächen ebenfalls sehr kleine Flächenstücke sind, die überdies als einander gleich betrachten können. Der Druck nun, den die obere Endfläche dieses Prismas vertikal abwärts erfährt, ist gleich dem Drucke eines Flüssigkeitsprismas, dessen Basis gleich ist einem Flächenelement, und dessen Höhe der senkrechte Abstand desselben von der Oberfläche der Flüssigkeit ist. Auf die untere Endfläche wirkt ein nach oben gerichteter Druck, dessen GröÙe gleich ist dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule mit einer der GröÙe des Elementes gleichen Basis, und mit einer Höhe gleich dem senkrechten Abstände dieses Elementes von der Oberfläche. Die Differenz beider Drucke ist also das Gewicht eines Flüssigkeitsprismas mit einer jenen beiden gleichen Grundfläche und einer der Differenz jener beiden Abstände gleichen Höhe oder, was dasselbe ist, das Gewicht eines jenem betrachteten Prisma an GröÙe gleichen Prismas. Es wird ein solches Prisma mit einem Drucke aufwärts getrieben, welcher dem Gewichte einer ihm an GröÙe gleichen Flüssigkeitsmenge gleich ist. Was dem einzelnen Prisma gilt, gilt in gleicher Weise auch von allen zusammen, wir gelangen daher zu dem Resultate, daß jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper einen von unten nach oben gerichteten Druck, einen Auftrieb, erfährt, der dem Gewichte einer ihm an Volumen-gleichen Flüssigkeitsmenge gleich ist.

Man spricht diesen Satz auch wohl so aus: Jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper verliert ein Gewicht, welches gleich ist dem Gewichte der aus der Stelle gedrängten Flüssigkeit.

r, weil $ed > e'd$ wird, herabfallen und so erst nach einigen Oscillationen zur Ruhe kommen. Körper, welche leichter sind als die Flüssigkeit, welche sie eingetaucht sind, sind also im Gleichgewicht, wenn sie zum und zwar so weit eingetaucht sind, daß das aus der Stelle gedrängte Wasser ihrem Gewichte gleich ist.

Die Körper können dann zwar keine fortschreitende, wohl aber noch drehende Bewegung machen. Soll auch diese nicht stattfinden, so müssen die beiden auf den Körper einwirkenden Kräfte sich auch gerade entgegengesetzt sein. Das Gewicht des Körpers greift an seinem Schwerpunkte an, der Auftrieb am Schwerpunkte des aus der Stelle gedrängten Wassers. Es müssen demnach diese beiden Punkte in einer Vertikalebene liegen, wenn der Körper im Gleichgewicht sein soll. Eine schwimmende Kugel ist demnach in jeder Lage im Gleichgewicht, ein Ellipsoid, wenn eine seiner Axen vertikal ist, ein Parallelepiped, wenn seine Kanten vertikal sind.

Unter diesen Bedingungen braucht aber das Gleichgewicht noch kein Stabilität zu sein; damit das der Fall ist, d. h. damit der Körper bei kleinen Störungen seiner Lage immer wieder in seine frühere Stellung zurückkehrt, dazu muß noch eine dritte Bedingung erfüllt sein. Es muß nämlich das Metacentrum des schwimmenden Körpers über dem Schwerpunkte liegen, indem dann die auf den schwimmenden Körper wirkenden Kräfte immer, bei Schwankungen, denselben Körper in seine frühere Lage zurückdrehen. Um die Bedeutung des Metacentrums zu erkennen, sei in Fig. 86 der schwimmende Körper in seiner Lage gebracht, so daß eine vertikale PG , welche

den Schwerpunkt des Körpers und den Mittelpunkt des Auftriebs P in der Lage PG erhalten habe. Der Schwerpunkt des Körpers liegt dann in G , der Mittelpunkt des Auftriebs ist aber nicht mehr P , sondern P'' , weil die Gestalt des eingetauchten Körpers sich geändert hat. Bei P'' greift der Auftrieb an, während das Gewicht, von oben nach unten, in G greift. Beide Kräfte suchen also den Körper eine Drehung zu geben, um ihn von seiner frühern Lage zurück zu drehen; er kehrt also nicht dahin zurück, er war im labilen Gleichgewicht. Die Vertikallinie, die wir durch P'' legen, schneidet die Linie PG in dem unterhalb G liegenden Punkte M . Punkt heißt das Metacentrum. Wäre dagegen die Lage des Körpers die in Fig. 87, und liegt nach der Drehung der Mittelpunkt des Auftriebs in P' , so ist das Metacentrum M über dem Schwerpunkte G , beide Kräfte

Fig. 86.



Fig. 87.



in der ersten Lage ging, in dem unterhalb G liegenden Punkte M . Punkt heißt das Metacentrum. Wäre dagegen die Lage des Körpers die in Fig. 87, und liegt nach der Drehung der Mittelpunkt des Auftriebs in P' , so ist das Metacentrum M über dem Schwerpunkte G , beide Kräfte

bringen an dem Körper eine Drehung hervor, welche ihn seiner fr. Lage nähert; der Körper schwimmt im stabilen Gleichgewicht. Die P'' gelegte Vertikale schneidet die Linie $G'P'$ um so leichter oberhalb des Metacentrum liegt, um so eher über dem Schwerpunkt, je tiefer liegt. Es ist daher für einen Körper, der im stabilen Gleichgewicht schwimmen soll, z. B. Schiffe, das Beste, wenn ihr Schwerpunkt möglichst tief liegt.

§ 68.

Bestimmung des specifischen Gewichtes fester Körper.

sahen in § 66, daß, wenn die Dichtigkeit d des eingetauchten Körpers größer ist als die Dichtigkeit d' der Flüssigkeit, der Körper dann sinkt, daß er aber soviel an Gewicht verliert, als die Flüssigkeit, welche er aus der Stelle drängt. Wir haben nun in § 23 das specifische Gewicht eines Körpers dahin definiert, daß es das Gewicht der Volumeneinheit sei, wobei als Einheit das Gewicht der Volumeneinheit Wasser zu Grunde gelegt wird. Nennen wir das Volumen eines Körpers V , sein specifisches Gewicht s , so ist sein Gewicht $P = V \cdot s$. Das Gewicht eines gleichen Volumens Wasser ist dann in der obigen Einheit ausgedrückt V , demnach

$$\frac{P}{V} = \frac{V \cdot s}{V} = s.$$

Kennen wir demnach das Gewicht eines Körpers und das Gewicht gleichen Volumens Wasser, so ist der Quotient beider $\frac{P}{V}$ das specifische Gewicht des Körpers. Da ein in Wasser untergetauchter Körper soviel an Gewicht verliert, als das Volumen Wasser wiegt, welches er der Stelle drängt, so haben wir hier ein sehr einfaches Mittel, um das Gewicht eines Körpers zu bestimmen und sein specifisches Gewicht zu erhalten.



Fig. 88.

Das einfachste Verfahren, um das specifische Gewicht fester Körper zu bestimmen, ist die Anwendung der hydrostatischen Waage, welche von der gewöhnlichen Waage nur darin unterscheidet, daß die eine Wagschale nicht so tief herab und in der Mitte ihrer untern Fläche mit Haken versehen ist. Man hängt an dasselbe (Fig. 88) mittels eines sehr feinen Drahtes den zu untersuchenden Körper, bestimmt sein Gewicht in der Luft und ihn dann in ein mit Wasser gefülltes Gefäß und bestimmt sein Gewicht neuerdings. Der Gewichtsverlust ist genau das Gewicht eines dem gleichen Wasservolumens, der Quotient das specifische Gewicht des Körpers.

Es sind hierbei jedoch einige Vorsichtsregeln zu beachten. Zunächst haben wir bemerkt, daß der Draht möglichst fein sein muß, da sonst auch das Wasser aus der Stelle gedrängt wird, was den Gewichtsverlust von

Einfluss ist, wir also nicht das Gewicht einer dem Körper allein an gleichen Wassermenge erhalten.

Es ist notwendig, daß man reines destillirtes Wasser anwende, welches die Temperatur 4°C . habe. Wir werden später sehen, daß er bei dieser Temperatur seine größte Dichtigkeit besitzt, und daß der Volumeinheit Wasser bei dieser Temperatur die gewählte Einheit ist. Hat das Wasser eine andere Temperatur, so bedarf es einer Korrektur, welche aus der gemessenen Ausdehnung des Wassers berechnet werden kann. Einer ähnlichen Korrektur bedarf es wegen der Ausdehnung der Körper, da auch diese beim Erwärmen zunehmen. Man ist nun überein gekommen, daß man verschiedene Temperaturen verschiedene specifische Gewichte der Körper stets auf die Temperatur des reinen Eises, auf 0° zu reducieren. In der Lehre von der Ausdehnung durch die Wärme werden wir die Formeln lernen, diese Reduktionen vorzunehmen¹⁾.

Die zweite auf demselben Princip beruhende Methode

zur Bestimmung des specifischen Gewichtes ist die Anwendung des Nicholson'schen Aräometers. Dasselbe besteht aus einem hohlen unten und oben konisch zugelegten Zylinder von Messingblech *A* (Fig. 89). Von der Spitze des obern Kegels steigt als Verlängerung der Axe nach unten ein feines Stäbchen *B* auf, an dessen oberem Ende eine Schale *C* angebracht ist, auf welche man, wie auf eine Waagschale, den zu untersuchenden Körper legen kann. An dem Stäbchen ist durch einen Ring eine feine Marke bei *B* angebracht.

Am unteren Ende der Spitze des untern Kegels hängt, mittels eines ringförmigen Drahtes daran befestigt, ein Gewicht *D*, das nach oben hin eine horizontale Fläche hat, auf die man den zu untersuchenden Körper legen kann.

Das Gewicht *D* der Schwerpunkt des Apparates möglichst tief unterhalb schwimmt derselbe aufrecht und zwar im stabilen Gleichgewicht. Die Stellung des Apparates ist so bestimmt, daß ein Teil desselben, wenn er in Wasser getaucht wird, aus dem Wasser hervorragt, und daß er nur durch die Auflegung von Gewichten auf die Schale *C* bis zu der Marke *B* in das Wasser eintaucht.

Um nun mittels dieses Apparates das specifische Gewicht eines Körpers zu bestimmen, verfährt man folgendermaßen. Zunächst legt man den zu untersuchenden Körper auf die obere Schale *C* und bewirkt durch aufgelegte Gewichte, daß das Aräometer genau bis zur Marke *B* eintaucht. Darauf nimmt man den Körper fort und bewirkt durch zugelegte Gewichte, daß der Apparat wieder bis *B* eintaucht. Da derselbe in beiden Fällen genau dasselbe Volumen Wasser aus seiner Stelle drängt, so kann man den Füllstand des Apparates dasselbe; die statt des Körpers aufgelegten Gewichte geben uns also das absolute Gewicht des Körpers *P*. Darauf legt

Fig. 89.



¹⁾ Man sehe im III. Band § 9 und § 17.

man dann den Körper in die untere Schale *D* und nimmt die vorhin gelegten Gewichte wieder fort. Da jetzt der Körper aber in Wasser taucht, so verliert er an Gewicht, und deshalb sinkt der Apparat nicht wieder in *B* ein. Um das zu bewirken, müssen wir ein Gewicht *P'* auf die obere Schale legen, welches uns den Gewichtsverlust des Körpers im Wasser, das Gewicht einer ihm an Volumen gleichen Wassermenge gibt. Der Quotient $\frac{P}{P'}$ gibt uns also nach dem Vorigen das specifische Gewicht des Körpers.

Dafs wir hier dieselben Korrekturen anbringen müssen wie bei vorigen Verfahren, ist klar; aber selbst dann ist es äufserst schwierig genau richtiges Resultat zu erhalten, besonders weil es wegen der Wirkung der demnächst zu betrachtenden Kapillarität schwer ist zu bestimmen, wo der Apparat genau bis zur Marke *B* eintaucht. Um genaue Resultate zu erhalten, ist daher die vorige Methode vorzuziehen.

Die beiden bisherigen Methoden beruhen auf der Erfahrung, dafs eingetauchter Körper im Wasser an Gewicht verliert. Man kann als dritte Methode noch die Umkehr der ersten hinzufügen, den Satz benutzend, dafs das Gewicht des mit Wasser gefüllten Gefäßes durch das Eintauchen des Körpers gerade soviel an Gewicht zunimmt, als der Körper verliert.

Man wiegt ein Gefäß mit Wasser ab und bestimmt dann die Gewichtszunahme, welche es erhält, wenn der neben der Wage aufgehängte Körper von bekanntem Gewichte in das Wasser hinabgesenkt wird. Der Quotient des bekannten Gewichtes des Körpers und dieser Gewichtszunahme ist das gesuchte specifische Gewicht des Körpers. Dieses Verfahren ist besonders bei der Untersuchung grofser und schwerer Körper anzuwenden, in denen es keine besondern, an grofsen Wagen schwer anzubringenden Vorrichtungen erfordert.

Alle diese Methoden können jedoch nur benutzt werden, wenn es darum handelt, das specifische Gewicht von Körpern zu bestimmen, welche nicht porös, nicht in Wasser löslich und schwerer als Wasser sind. Sind die Körper porös, so mufs man sie mit einem sehr feinen Lack überstreichen, so dafs sowohl das Gewicht als auch das Volumen der Körper möglichst wenig geändert wird, und da man dadurch das Eindringen des Wassers in den Körper gehindert hat, verfahren wie vorhin; sind die Körper in Wasser löslich oder leichter als Wasser, so wendet man statt des Wassers Flüssigkeiten an, in denen sich der Körper nicht löst, oder die ein geringeres specifisches Gewicht haben. Das Verfahren bleibt dann ungeändert dasselbe, dafs das Gewicht des Körpers *P*, sein Gewichtsverlust in der betreffenden Flüssigkeit gleich *P''*, sein specifisches Gewicht gleich *s*, das der Flüssigkeit gleich *s''* und das Volumen des Körpers gleich *v*, so ist

$$P = vs, \quad P'' = vs'',$$

$$\frac{P}{P''} = \frac{s}{s''}, \quad s = s'' \cdot \frac{P}{P''}.$$

Kennt man also *s''*, das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so kann man *s* berechnen.

die zu untersuchenden Körper pulverförmig, so lassen sich die oben Methoden zur Bestimmung ihres specifischen Gewichtes nicht an; in einem solchen Falle verfährt man am besten so, daß man eine von einer gewogenen Quantität des Pulvers aus einem Gefäße die Menge Wassers, oder im Falle das Pulver in Wasser löslich ist, einer andern Flüssigkeit bestimmt. Man benutzt sogenannte Pyknometer, wie Fig. 90 ein solches darstellt. Es ist eine Fläschchen, welche einen weiten Hals haben, in welchen ein Stöpsel eingeschliffen ist, so daß er eingesetzt ist, ein ganz bestimmter immer gleicher Raum im Gefäße abgeschlossen ist. Da man, wie erwähnt, bei diesen Versuchen die Temperatur der Flüssigkeit konstant halten muß, so wendet man als Glaspyknometer an. An dem Gefäße ist eine kapillare Röhre *c* angebracht, welche oben ausgeweitet ist und ebenfalls mit einem eingeriebenen Glasstöpsel verschlossen werden kann. In der kapillaren Röhre ist bei *h* eine Marke.

Man füllt das Gefäß zunächst mit Wasser, schließt es, während die kapillare Röhre offen ist, durch Einsetzen des Stöpsels bei *h* und tupft dann, um das Wasser auf konstanter Temperatur zu halten, das Wasser bis zur Marke *h* an. Man schließt die kapillare Röhre mit dem Stöpsel ab. Es habe das Gefäß das Gewicht *P*. Darauf öffnet man das Gefäß und schüttet eine gewogene Menge *p* des zu untersuchenden Pulvers hinein. Man schließt wieder mit Wasser bis *m* ab und wiegt. Man findet jetzt das Gewicht *P'*. Das Gewicht *P'* ist dann gleich dem gefundenen Gewicht *P*, vermehrt um das Gewicht *p* des eingeschütteten Pulvers, aber vermindert um das Gewicht π des von dem Pulver verdrängten Wassers, oder

$$P' = P + p - \pi,$$

$$\pi = P + p - P'.$$

ist das specifische Gewicht des Pulvers

$$s = \frac{p}{\pi} = \frac{p}{P + p - P'}.$$

Fig. 90.



Bei diesem Verfahren muß man dafür sorgen, daß das Pulver keine Luft eingeschlossen hält; am besten ist es, daß man vor dem letzten Wägen das Wasser bis nahe zum Sieden erhitzt und dann erst, nach eingetretener Abkühlung, schließt und nach dem Abtupfen wägt.

§ 69.

Bestimmung des specifischen Gewichtes der Flüssigkeiten. Zur Bestimmung des specifischen Gewichtes von Flüssigkeiten kann man ebenfalls eine Reihe von Methoden anwenden, von denen mehrere auf der Bestimmung des Gewichtsverlustes eingetauchter Körper beruhen, andere nicht.

Von letzteren machen wir zwei namhaft. Die genaueste ist die, daß man die im vorigen Paragraphen beschriebenen Pyknometer bis zur Marke einmal mit Wasser füllt, abwägt und durch Abziehen des vorher bestimmten Gewichtes des Gläschens das Gewicht des im Gefäße enthaltenen Wassers bestimmt. Darauf füllt man dasselbe Gefäß wieder bis zur Marke mit der zu untersuchenden Flüssigkeit und bestimmt auf gleiche Weise das Gewicht derselben. Man hat auf diese Weise direkt das Gewicht gleicher Volumina Wasser und der zu untersuchenden Flüssigkeit, der Quotient beider gibt das specifische Gewicht der Flüssigkeit.

Eine zweite Methode beruht auf dem Satze, daß in zwei kommunizierenden Röhren die Höhen verschiedener Flüssigkeiten sich umgekehrt wie ihre specifischen Gewichte verhalten. Vor einem Maßstabe (Fig. 91) sind zwei Glasröhren befestigt, welche vertikal herabsteigen und unten so ungebogen sind, daß zwei kürzere aufsteigende Arme entstehen, welche bei A so vereinigt sind, daß die beiden Röhren gleichsam nur eine mehrfach gekrümmte Röhre bilden. Man gießt nun in die eine Wasser und zugleich in die andere die zu untersuchende Flüssigkeit. Auf diese Art erhält man zwei durch eine Luftschicht getrennte Flüssigkeitssäulen. Wenn man nun die Flüssigkeitsmengen so reguliert, daß das Niveau derselben in den ungebogenen Röhrenschenkeln gleich hoch und das des Nullpunktes der Teilung ist, so sind die Höhen der Flüssigkeiten in den senkrechten Röhren ihrem specifischen Gewichte umgekehrt proportional. Ist die Höhe der Wassersäule h , die der Flüssigkeit gleich h' , die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich d' , die des Wassers gleich 1, so ist

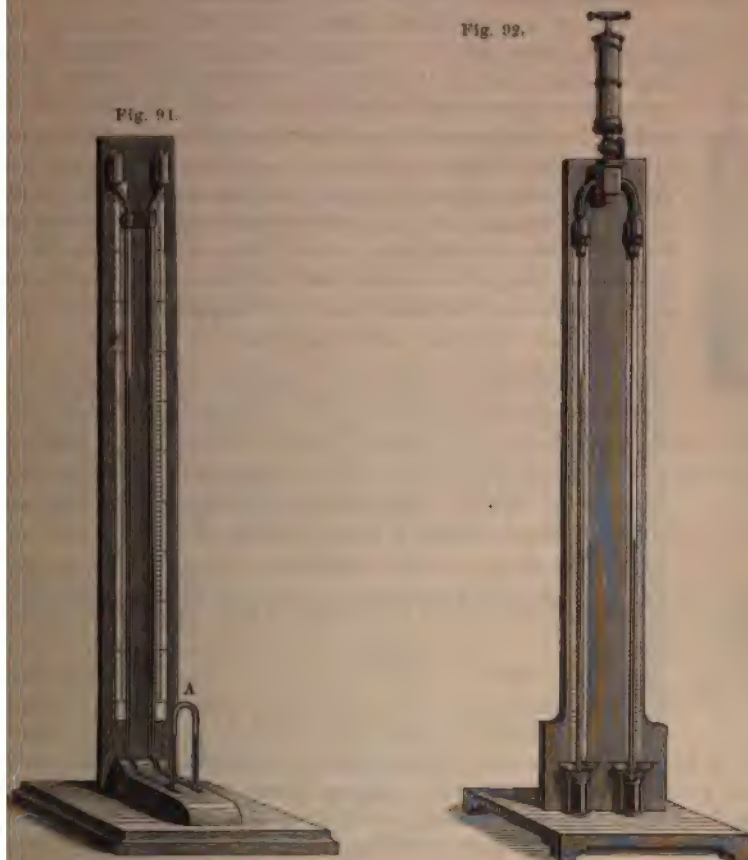
$$h : h' = d' : 1,$$

$$d' = \frac{h}{h'}.$$

Eine etwas andere Anordnung des Apparates zeigt Fig. 92. Die vertikalen Röhren tauchen unten in zwei abgesonderte Gefäße, welche mit den zu vergleichenden Flüssigkeiten gefüllt sind. Oben kommunizieren sie mittels eines gebogenen Rohres mit einander und durch einen verschließbaren Hahn mit einer kleinen Luftpumpe. Pumpt man bei geöffnetem Hahn durch Herausziehen des Kolbens etwas Luft aus, so steigen die Flüssigkeiten durch den äußern Luftdruck zu Höhen, welche ihren specifischen Gewichten umgekehrt proportional sind. Schließt man also den Hahn oben und mißt die Höhen, so erhält man daraus gerade wie vorhin das specifische Gewicht der einen Flüssigkeit, wenn das der andern bekannt ist.

Die andern Methoden zur Bestimmung der Dichtigkeit von Flüssigkeiten beruhen auf dem Gewichtsverlust eingetauchter Körper. Die einfachste und genaueste dieser Methoden ist die, daß man einen passend gewählten Körper, etwa ein kleines Glasröhrchen, welches unten und oben geschmolzen ist, nachdem man etwas Quecksilber hineingebracht hat, an einem sehr feinen Drahte, wie in Fig. 93, befestigt. Man wiegt denselben einmal in Wasser und bestimmt dann seinen Gewichtsverlust einmal, wenn er in Wasser

Fig. 92.



taucht ist, und dann, wenn er sich in der zu untersuchenden Flüssigkeit befindet. Diese Gewichtsverluste geben dann die Gewichte von Flüssigkeiten, deren Volumen gleich ist dem des eingetauchten Körpers, die äquivalenten der Gewichtsverluste also das specifische Gewicht der zu untersuchenden Flüssigkeit.

Auch das Nicholson'sche Aräometer kann man, wie leicht ersichtlich ist, dem Zwecke anwenden. Man bestimmt zunächst das Gewicht des Aräometers; dasselbe sei A ; man taucht es dann in Wasser, und damit es genau bei der Marke einsinke, sei ein Gewicht p erforderlich. Da das Aräometer vollständig untergetaucht ist, so ist das Gewicht des dem eingetauchten Theile an Volumen

gleichen Wassers gleich $A + p$. Darauf taucht man es in die zu untersuchende Flüssigkeit, und ist p' das jetzt aufzulegende Gewicht, damit es bis zur Marke einsinkt, so ist $A + p'$ das Gewicht einer der vorigen Wassermenge an Volumen gleichen Flüssigkeitsmenge. Der Quotient beider oder

$$\frac{A + p'}{A + p} = s$$

ist gleich dem specifischen Gewichte der Flüssigkeit.

Fig. 93.



Da es im praktischen Leben sehr häufig notwendig ist, das specifische Gewicht von Flüssigkeiten zu bestimmen, ohne daß eine möglichst große Genauigkeit erfordert wird, so hat man noch ein anderes Verfahren ersonnen, um leicht und schnell das Geforderte zu leisten; man bestimmt nämlich die Dichtigkeit von Flüssigkeiten mittels Aräometer von veränderlichem Volumen. Während man mittels des Nicholsonschen Aräometers die Dichtigkeit der Flüssigkeiten aus den verschiedenen Gewichten gleicher Volumen ableitet und dann, wenn P das Gewicht der Flüssigkeit von der Dichtigkeit D , p das der Flüssigkeit von der Dichtigkeit d ist, die gesuchte Dichtigkeit aus der Proportion erhält,

$$D : d = P : p,$$

verfährt man bei den jetzt zu betrachtenden Apparaten so, daß man ein konstantes Gewicht P in verschiedene Flüssigkeiten eintaucht und das Volumen beobachtet, welches dieses aus der Stelle drängt. Der Körper sinkt stets so tief ein, daß die verdrängte Flüssigkeit seinen Gewichte P gleich ist. Sinkt er nun in die Flüssigkeit von der Dichtigkeit D so tief ein, daß er ein Volumen V aus der Stelle drängt, so ist

$$P = V \cdot D.$$

Drängt er in einer andern Flüssigkeit das Volumen v aus der Stelle, so ist

$$P = v \cdot d$$

und daher

$$v \cdot d = V \cdot D; \quad d : D = V : v.$$

Nehmen wir also z. B. eine cylindrische Glasröhre, welche unten und oben, nachdem etwas Quecksilber hineingebracht, zugeschmolzen ist, um zu bewirken, daß sie stets aufrecht schwimmt, und daß sie bis zu einem bestimmten, etwa in der Mitte der Röhre liegenden Punkte in Wasser einsinkt, so ist es leicht, aus dieser ein Aräometer zu machen, bei welchem eine einfache Ablesung genügt, um die Dichtigkeit der Flüssigkeit, in die es getaucht ist, zu erhalten. Man bezeichnet die Stelle, bis zu welcher die Röhre (Fig. 94) in Wasser einsinkt, durch eine Marke, setzt daneben die Zahl 100 und teilt nun die Länge der Röhre von diesem Teilstriche aus nach unten hin in 100 gleiche Teile, und trägt ebenso die Teilung auch noch nach oben hin fort. Der Rauminhalt zwischen zwei Teilstrichen entspricht dann, da wir die Röhre als cylindrisch voraussetzen, $\frac{1}{100}$ des Rauminhaltes der Röhre von unten bis zum Teilstriche 100. Tauchen wir nun diese Röhre in eine Flüssigkeit, in welche sie bis zum Teilstriche 80 einsinkt, so schliessen wir daraus, da sie eine ihrem Gewichte gleiche Flüssig-

enge aus ihrer Stelle drängt, daß 80 Volumteile dieser ebensoviel als 100 Volumteile Wasser. Wir haben demnach für das spezifische Gewicht dieser Flüssigkeit s

$$s : 1 = 100 : 80,$$

$$s = \frac{100}{80} = 1,25;$$

die Röhre dagegen bis zum Teilstriche 120 ein, so ist

$$s = \frac{100}{120} = 0,833;$$

überhaupt die Röhre in irgend eine Flüssigkeit bis zum Teilstrich n haben wir für ihr spezifisches Gewicht $\frac{100}{n}$.

Diese Aräometer bestimmen demnach das spezifische Gewicht einer Flüssigkeit aus der Vergleichung des Volumens derselben mit dem Volumen einer gleichen Menge Wasser. Sie führen daher den Namen *Aräometer*.

Man gibt ihnen meist eine andere Form (Fig. 95). Man stellt klar, daß die Apparate eine um so größere Genauigkeit liefern, je weiter zwei Teilstriche von einander entfernt sind. Zu dem Ende wählt man sehr dünne Röhren, und damit sie dann nicht zu lang und somit zerbrechen können, setzt man unten ein Stück einer dickeren Röhre daran. Die Teilung kann dann nur aufgetragen werden; man verfährt folgendermaßen.

Man bringt in die Röhre etwas Quecksilber, so daß das Gewicht des Apparates gleich p wird, taucht ihn in Wasser und bezeichnet die Stelle, bis zu welcher er sinkt, mit 50. Darauf vermehrt man durch Hinzufügen von Quecksilber sein Gewicht auf $2p$, $3p$ und taucht ihn wieder in Wasser. Das doppelte und dreifache Gewicht verdrängt die doppelte und dreifache Menge Wasser, der Apparat sinkt also tiefer ein. Die Teilung wird nun so gemacht, daß der Raum zwischen 50 und 100, der Raum zwischen 100 und 150, in 50 gleiche Teile geteilt ist.

Der Raum zwischen 50 und 100 ist die Hälfte von dem Raum, den das Instrument ausfüllt, wenn es bis zu 100 sinkt; der Raum zwischen zwei Teilstrichen also die Hälfte dieses Raumes. Man gibt nun schließlich dem Apparat das Gewicht $2p$ und schließt ihn dann oben.

Im Wasser taucht derselbe bis zum Teilstriche 100 ein; wir können ihn daher jetzt so benutzen wie das einfachere Aräometer; taucht er in eine Flüssigkeit bis zum Teilstriche n , so ist $\frac{100}{n}$ ihr spezifisches Gewicht.

Obwohl auch so erhält der Apparat immer noch eine bedeutende Länge, wird dadurch zum praktischen Gebrauche unbequem. Man verfertigt selten Apparate, welche zugleich dazu dienen, das spezifische Gewicht

Fig. 94. Fig. 95.



von Flüssigkeiten zu bestimmen, welche schwerer oder leichter sind als Wasser, sondern meist solche, welche nur für die eine oder andere Art von Flüssigkeiten bestimmt sind.

Ist das Instrument für schwerere Flüssigkeiten bestimmt, so bezeichnet man den Punkt oben an der Röhre, bis zu welchem sie beim Gewichte $2p$ in Wasser einsinkt, mit 100, und ganz unten über der weitem Röhre beim Gewicht p mit 50, gibt dem Apparate das Gewicht $2p$ und graduiert wie vorhin. Ist es für die Bestimmung des specifischen Gewichtes leichterer Flüssigkeiten bestimmt, so richtet man das Gewicht p des Apparates so ein, daß er in Wasser getaucht bis gerade über die weite Röhre eintaucht, und bei dem Gewichte $2p$ bis oben. Der Apparat erhält dann das Gewicht p , und der untere Punkt wird mit 100, der obere mit 200 bezeichnet; das specifische Gewicht ergibt sich dann wie vorhin.

Häufig findet man auch auf den Aräometerskalen anstatt oder neben der der Teilung entsprechenden Zahl die Angabe des specifischen Gewichtes verzeichnet, welche dem nebenstehenden Teilstriche entspricht; also neben dem Teilstriche 100—1, neben dem 120 dann 0,833, 150—0,666, 200—0,5; eine einfache Ablesung ergibt dann das gesuchte specifische Gewicht.

Aräometer für besondere Flüssigkeiten. Wenn zwei Flüssigkeiten verschiedenen specifischen Gewichtes, die sich mit einander mischen, zusammengegossen werden, so hängt das specifische Gewicht des Gemisches von den Mengenverhältnissen der einzelnen Flüssigkeiten ab. Kennt man daher für alle Mischungen ihre specifischen Gewichte, so kann man mittels der Aräometer die Bestandteile des Gemisches kennen lernen. Für einzelne Flüssigkeiten sind diese Untersuchungen durchgeführt und am genauesten für Alkohol, da es im praktischen Leben vielfach von Wichtigkeit ist, den Procentgehalt eines Weingeistgemisches mit Schnelligkeit bestimmen zu können. Auf den ersten Blick sollte man glauben, daß nichts einfacher sei, als aus dem specifischen Gewichte eines Flüssigkeitsgemisches den Gehalt desselben an der einen oder andern zu bestimmen, indem man das specifische Gewicht aus den Mengenverhältnissen berechnet. Darnach würde z. B. ein Gemisch von 50 Volumen Wasser und 50 Volumen Alkohol ein Gemisch von 100 Volumen geben, dessen specifisches Gewicht gerade in der Mitte dessen des Alkohols oder des Wassers läge, also, da das des Alkohols gleich 0,794, das des Wassers bei 15° C. gleich 0,9991 ist, gleich 0,8866 sein würde.

Dem ist jedoch nicht so, und zwar deshalb nicht, weil bei der Mischung zweier Flüssigkeiten meist eine Änderung des Volumens eintritt.

Gießt man z. B. Alkohol und Wasser zu gleichen Teilen zusammen, so ist das Volumen des Gemisches nicht gleich der Summe der Volumina, sondern kleiner. Es tritt eine Kontraktion der Flüssigkeiten ein; das specifische Gewicht ist demnach größer als das vorhin berechnete.

Nach den neuesten Versuchen von Baumhauer¹⁾ geben:

¹⁾ von Baumhauer, Mémoire sur la densité etc. des mélanges d'alcool et d'eau. Amsterdam, 1860. Etwas von diesen verschiedene Werte ergeben sich aus den Versuchen von Mendelejeff, Poggend. Ann. Bd. CXXXVIII.

Wasser.	Weingeist.	Mischung.	Volume	Wasser.	Weingeist.	Mischung.
100	0	100	40	60	94,8	
90	10	99,4	30	70	96,2	
80	20	98,2	20	80	96,7	
70	30	97,2	10	90	97,7	
60	40	96,4	0	100	100	
50	50	96,0				

Daraus ergibt sich das spezifische Gewicht s bei 15° C.:

Mischung aus Volumen.		
Wasser.	Weingeist.	s
100	0	0,9991
90	10	0,9857
80	20	0,9750
70	30	0,9645
60	40	0,9511
50	50	0,9338
40	60	0,9131
30	70	0,8897
20	80	0,8635
10	90	0,8338
0	100	0,7941

Wenn man nun ein Volumeter so einrichtet, daß es in Wasser genau bis zu einem mit 0 bezeichneten Punkte eintaucht, so wird es in einem Gemisch aus Alkohol und Wasser tiefer eintauchen. Bezeichnet man die Punkte, bis zu denen es in Flüssigkeiten vom spezifischen Gewichte 57, 0,9750 etc. einsinkt, mit 10, 20 etc., so erhält man ein Alkoholometer, welches in ein Weingeistgemisch eingetaucht durch eine einfache Ablesung angibt, wieviel Volumprocente das Gemisch an reinem Alkohol enthält.

So sind die Alkoholometer von Tralles¹⁾ eingerichtet, welche in Deutschland meist gebraucht werden, um den Alkoholgehalt des käuflichen Spiritus zu bestimmen.

Es ist jedoch zu bemerken, daß die Zahlen für das spezifische Gewicht Alkohols, wie schon erwähnt, und so auch die der Gemische nur für bestimmte Temperatur gelten, nämlich für 15° C. Deshalb gelten auch Angaben der Alkoholometer nur für diese oder eine andere Temperatur, der sie graduirt sind. Um jedoch den Apparat auch für andere Temperaturen brauchbar zu machen, hat Tralles eine Tabelle aufgestellt²⁾, aus welcher man für jede Temperatur den Alkoholgehalt eines Gemisches entnehmen kann, wenn man beobachtet hat, bis zu welchem Punkte bei dieser Temperatur der Apparat in das Gemische eintaucht. Deshalb ist an den meisten Alkoholometern auch ein Thermometer angebracht.

Vielfach ist auch an den Alkoholometern selbst die Korrektion bemerkt, die man für die verschiedenen Temperaturen anzubringen hat. In der oberen Röhre am untern Teile des Apparates ist neben dem Thermometer

¹⁾ Tralles, Gilbert Annalen XXXVIII. 349—431.

²⁾ Tralles a. a. O.

eine Skala befestigt, auf der dann neben dem normalen Thermometerstand, für welchen das Instrument graduirt ist, 0 verzeichnet ist und darüber oder darunter, wieviel Procente man von der Angabe des Alkoholometers abziehen oder derselben hinzufügen muß, wenn das Thermometer einen höhern oder tiefern Stand hat.

Außer den Alkoholometern müssen wir noch die Aräometer von Beaumé erwähnen, welche vielfach in Gebrauch sind, obwohl sie direkt weder etwas über die Dichtigkeit der Flüssigkeiten, noch über ihre Zusammensetzung aussagen. Beaumé konstruirte zwei Aräometer, das erste graduirte er so, daß er den Punkt, bis zu dem es in Wasser eintauchte, mit 0, und den, bis zu welchem es in einer Lösung von 15 Theilen Kochsalz auf 85 Wasser eintauchte, mit 15 bezeichnete. Die Teilung wurde dann weiter nach unten fortgesetzt. Der Apparat gibt in Schwefelsäure-Hydrat 66 Grade an und in konzentrierter Salpetersäure 36.

Für Flüssigkeiten, welche leichter sind als Wasser, wurde der Punkt, bis zu welchem der Apparat in eine Lösung von 10 Theilen Kochsalz auf 90 Wasser taucht, mit 0, in Wasser mit 10 bezeichnet und die Teilung nach oben hin fortgesetzt. In käuflichem, meist 80—90procentigem Spiritus zeigt der Apparat 34—38 Grade¹⁾.

§ 70.

Molekularwirkungen zwischen flüssigen und festen Körpern.

In unseren bisherigen Entwicklungen über die Gesetze des Gleichgewichts der flüssigen Körper haben wir keine Rücksicht genommen auf die Wirkung von Kräften, welche an den Gefäßwänden zwischen den Molekülen der festen Wand und denen des flüssigen Körpers thätig sind, also gemäß unserer Benennung in § 58 und 46 auf die Wirkung der Adhäsion der flüssigen an die festen Körper und die Kohäsion der Flüssigkeiten.

Von dem Dasein beider Kräfte kann man sich leicht überzeugen. Taucht man ein reines Glasstäbchen in Wasser und zieht es dann heraus, so sieht man, daß eine Wasserschicht an demselben haftet. Hält man es vertikal, so sammelt sich an seinem untern Ende ein Tropfen an, der nicht herabfällt, sondern der Wirkung der Schwere entgegen an dem Stäbchen haften bleibt. Diese einzige Thatsache beweist das Dasein der Adhäsion des flüssigen Körpers an den festen sowohl als auch das der Kohäsion der einzelnen Teile der Flüssigkeit. Denn die zunächst am Glase anhängende Wasserschicht wird durch die Adhäsion des Wassers am Glase getragen und der übrige Teil des Tropfens durch die Kraft, mit welcher die einzelnen Wasserteilchen an einander haften.

Aus diesem Versuche geht zugleich hervor, daß in diesem Falle sowohl die Kohäsion der Flüssigkeit als auch die Adhäsion derselben am Glase größer ist als die Wirkung der Schwere; denn nur dann ist es möglich, daß der Tropfen, der Schwere entgegen, getragen wird. Der Versuch zeigt aber weiter, daß hier auch die Adhäsion des Wassers am Glase größer ist als die Kohäsion der Wasserteile unter einander; denn beim Heraus-

¹⁾ Weiteres *Meissner*, Die Aräometrie in ihrer Anwendung auf Chemie und Technik. Wien, 1816.

sehen des Stabes wurden die an dem Stabe haftenden Wasserteile von ihrer Umgebung losgerissen, mit welcher sie durch die Kohäsion zusammenhängen.

Nicht immer ist das jedoch der Fall; denn wenn wir den Glasstab in Quecksilber tauchen, so bleibt kein Quecksilber daran haften, er wird von demselben nicht benetzt. Dafs aber auch hier eine Adhäsion des Quecksilbers am Glase vorhanden ist, läfst sich durch einen andern Versuch zeigen. Hängt man nämlich eine Platte mittels dreier Fäden an dem einen Arm einer Wage horizontal auf und äquilibriert sie durch Gewichte, welche auf die andere Wagschale gelegt werden, so bringt das geringste Übergewicht, auf die Wagschale gelegt, eine Erhebung der Glasplatte hervor. Sichert man aber der Platte von unten ein weites, mit Quecksilber gefülltes Gefäfs so weit, dafs die untere Fläche der Glasplatte die Oberfläche des Quecksilbers gerade berührt, so bedarf es auf der andern Wagschale bedeutender Zulage, um die Platte von dem Quecksilber loszureißen, ein Beweis, dafs sie mit einer gewissen Kraft am Quecksilber haftet, dafs also auch das Quecksilber am Glase adhärirt.

Die Kohäsion der verschiedenen Flüssigkeiten sowohl als die Adhäsion derselben Flüssigkeit an verschiedene feste Körper ist verschieden. Während Quecksilber Glas nicht benetzt, also an Glas nicht so stark adhärirt, dafs die Kohäsion der Quecksilberteile überwunden werden kann, wird Gold vom Quecksilber benetzt. Während reines Glas vom Wasser benetzt wird, vermag eine fettige Glasscheibe die Kohäsion der Wasserteile nicht zu überwinden.

Bei denjenigen Substanzen, bei welchen die Adhäsion an feste Körper gröfser ist als die Kohäsion der flüssigen Teile, kann obiges Verfahren, welches wir anwandten, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase nachzuweisen, dazu dienen, die Kohäsion der Flüssigkeit zu messen. Gay-Lussac¹⁾ hat für einige Flüssigkeiten, welche am Glase adhärirten, dieses Verfahren angewandt und mit einer Scheibe von 118,366 Millim. Durchmesser folgende Resultate erhalten:

Flüssigkeit	Specifisches Gewicht	Gewichte
Wasser bei 8°,5 C.	1	59,40 gr.
Alkohol " " "	0,8196	31,08 "
Alkohol " 10° "	0,8595	32,87 "
Alkohol " 8 " "	0,9415	37,15 "
Terpentin-Öl " 8 " "	0,8694	34,10 "

Die angegebenen Gewichte sind diejenigen, welche bei langsamem Auflegen der Gewichte gerade die benetzte Platte loszureißen imstande waren. Ganz dieselben Resultate erhielt Gay-Lussac, als er die Glasscheibe der vorigen Versuche durch eine Kupferscheibe ersetzte, was einen neuen Be-

¹⁾ Gay-Lussacs Versuche in La Place Supplément à la Théorie de l'action capillaire. II. Supplément zum 10. Buche der Mécanique céleste. Daraus Gilbert, Annalen Bd. XXXIII. p. 320 ff.

weis dafür liefert, daß durch diese Versuche wirklich die Kohäsion der Flüssigkeiten gemessen wird.

Bei Flüssigkeiten, welche nicht benetzen, kann man dieses Verfahren benutzen, um die Adhäsion zu messen. Gay-Lussac stellte derartige Versuche an, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase zu erhalten; die Zahlen jedoch, welche er erhielt, schwankten um ein Bedeutendes, zwischen 158^{gr.} und 296^{gr.}, je nachdem er die Übergewichte rasch oder langsam auflegte. Der Grund dieser Schwankung liegt zum Teil in der Reibung des Quecksilbers am Glase, wie wir später nachweisen werden.

§ 71.

Normaldruck in der Oberfläche der Flüssigkeiten. Aus den im vorigen Paragraphen mitgeteilten Thatsachen folgt erstens, daß die benachbarten Moleküle einer Flüssigkeit sich anziehen, und zweitens, daß die Moleküle eines in eine Flüssigkeit getauchten festen Körpers ebenfalls die benachbarten Teile der Flüssigkeit anziehen. Bei der Bestimmung des Gleichgewichtszustandes einer Flüssigkeit müssen wir daher auf diese beiden Kräfte Rücksicht nehmen; es wird daher zunächst unsere Aufgabe sein, zu untersuchen, in welcher Weise sie Änderungen des von uns bisher betrachteten Zustandes hervorbringen können. Beginnen wir mit der Anziehung der Flüssigkeitsteile auf einander, und setzen wir bei dieser wie bei der zweiten Art von Kräften voraus, daß die Kräfte sich nur auf unmeßbare Entfernungen erstrecken, daß sie unmerklich werden, sobald die Entfernungen meßbar sind¹⁾.

Betrachten wir zu dem Ende eine flüssige Masse, welche durch irgend eine Oberfläche MN (Fig. 96) begrenzt ist, und untersuchen die Resultierende aller auf die Moleküle m, m', m'' von den benachbarten Molekülen ausgeübten Anziehungen. Seien zu dem Ende die mit den Radien r , welche als unendlich klein vorausgesetzt werden, um die betreffenden Moleküle beschriebenen Kugeln die Anziehungssphären derselben, so daß also auch nur die in dieser Kugel befindlichen Moleküle anziehend auf m, m', m'' wirken.

Fig. 96.



Auf das Molekül m wirken die ringsum ganz gleichmäßig verteilten Moleküle der Flüssigkeit anziehend ein; dasselbe wird also nach allen Richtungen des Raumes mit gleicher Stärke angezogen, die auf m wirkenden Kräfte halten sich daher das Gleichgewicht, das Molekül verhält sich gerade so, als wenn keine Kräfte auf dasselbe einwirkten.

¹⁾ La Place, Théorie capillaire im Supplement zum 10. Buche der Mécanique céleste, daraus Gilbert, Annalen XXXIII.

Das Molekül m'' , welches gerade in der Oberfläche der Flüssigkeit liegt, wird jedoch nicht nach allen Richtungen mit gleicher Stärke angezogen. Nur die untere Hälfte seiner Anziehungssphäre ist mit Flüssigkeitsmolekülen angefüllt, die obere nicht. Die anziehenden Kräfte der die untere Halbkugel ausfüllenden Moleküle haben nun, wie unmittelbar klar ist, eine zur Oberfläche MN senkrechte Resultierende R , da in den der Oberfläche parallelen Schichten die Moleküle rings um m'' ganz gleichmäßig verteilt sind. Das Molekül m'' und somit alle in der Oberfläche befindlichen Flüssigkeitsmoleküle werden durch eine gegen die Oberfläche senkrechte Kraft gegen das Innere der Flüssigkeit gedrückt.

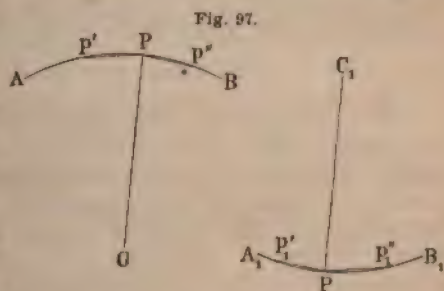
Ähnliches gilt für das Molekül m' , welches um weniger als r unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegt. Auch dessen Anziehungssphäre ist zum Teil mit Flüssigkeit angefüllt, und unterhalb st wirkt eine Quantität Flüssigkeit auf dasselbe ein, deren Anziehung nicht durch eine nach oben gerichtete Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird; auch an m' greift daher eine zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte, gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Kraft R' an, die jedoch kleiner ist als R .

Dasselbe ist der Fall mit allen Molekülen, welche um weniger als r unter der Oberfläche liegen, deren Anziehungssphären also zum Teil mit Flüssigkeit angefüllt sind. Legen wir daher parallel der Oberfläche im Innern der Flüssigkeit eine Fläche, welche von der Oberfläche um r absteht, so werden alle in dieser Schicht liegenden Moleküle nach außen gezogen. Diese Schicht wird also z. B. auf eine Flüssigkeitskugel wirken wie ein elastisches Häutchen, welches sich zusammenzuziehen sucht, und auf jede Flüssigkeit, die in einem Gefäße steht, einen rings gegen das Innere der Flüssigkeit gerichteten Druck ausüben, da sie auch an den Gefäßwänden begrenzten Flächen vorhanden sein muß. Man nennt daher diese Schicht das Flüssigkeitshäutchen und diesen Druck den Normaldruck.

Dieser Normaldruck der Flüssigkeiten muß verschieden sein je nach der Gestalt der Oberfläche. Während nämlich in ebenen Oberflächen die Flüssigkeit nur durch die betrachten

Molekularwirkungen nach außen gezogen wird, tritt in gekrümmten Oberflächen durch die in der Oberfläche vorhandenen Moleküle noch eine eigentümliche Anziehung hinzu, welche den Normaldruck vermehrt oder vermindert. Eine Vermehrung tritt dann ein, wenn die Oberfläche nach außen konvex, eine Verminderung ein, wenn die Oberfläche nach innen konkav ist.

Denn ist AB (Fig. 97) ein Durchschnitt durch eine konvexe, A_1B_1 ein solcher durch eine konkave Oberfläche, so erkennt man leicht, daß die gegenseitigen Anziehungen der in der Oberflächenschicht liegenden Flüssigkeitsteilchen eine der Normale parallele Komponente liefern, welche bei den konkaven Flächen nach außen, bei den konvexen Flächen nach innen gerichtet ist. Man nennt diese von der Form der Oberfläche abhängige Komponente die Oberflächenspannung.



weis dafür liefert, daß durch diese Versuche wirklich die Kohäsion der Flüssigkeiten gemessen wird.

Bei Flüssigkeiten, welche nicht benetzen, kann man dieses Verfahren benutzen, um die Adhäsion zu messen. Gay-Lussac stellte derartige Versuche an, um die Adhäsion des Quecksilbers am Glase zu erhalten; die Zahlen jedoch, welche er erhielt, schwankten um ein Bedeutendes, zwischen 158^{gr.} und 296^{gr.}, je nachdem er die Übergewichte rasch oder langsam auflegte. Der Grund dieser Schwankung liegt zum Teil in der Reibung des Quecksilbers am Glase, wie wir später nachweisen werden.

§ 71.

Normaldruck in der Oberfläche der Flüssigkeiten. Aus den im vorigen Paragraphen mitgeteilten Thatsachen folgt erstens, daß die benachbarten Moleküle einer Flüssigkeit sich anziehen, und zweitens, daß die Moleküle eines in eine Flüssigkeit getauchten festen Körpers ebenfalls die benachbarten Teile der Flüssigkeit anziehen. Bei der Bestimmung des Gleichgewichtszustandes einer Flüssigkeit müssen wir daher auf diese beiden Kräfte Rücksicht nehmen; es wird daher zunächst unsere Aufgabe sein, zu untersuchen, in welcher Weise sie Änderungen des von uns bisher betrachteten Zustandes hervorbringen können. Beginnen wir mit der Anziehung der Flüssigkeitsteile auf einander, und setzen wir bei dieser wie bei der zweiten Art von Kräften voraus, daß die Kräfte sich nur auf unmeßbare Entfernungen erstrecken, daß sie unmerklich werden, sobald die Entfernungen meßbar sind¹⁾.

Betrachten wir zu dem Ende eine flüssige Masse, welche durch irgend eine Oberfläche MN (Fig. 96) begrenzt ist, und untersuchen die Resultierende aller auf die Moleküle m, m', m'' von den benachbarten Molekülen ausgeübten Anziehungen. Seien zu dem Ende die mit den Radien r , welche als unendlich klein vorausgesetzt werden, um die betreffenden Moleküle beschriebenen Kugeln die Anziehungssphären derselben, so daß also auch nur die in dieser Kugel befindlichen Moleküle anziehend auf m, m', m'' wirken.

Fig. 96.



Auf das Molekül m wirken die ringsum ganz gleichmäßig verteilten Moleküle der Flüssigkeit anziehend ein; dasselbe wird also nach allen Richtungen des Raumes mit gleicher Stärke angezogen, die auf m wirkenden Kräfte halten sich daher das Gleichgewicht, das Molekül verhält sich gerade so, als wenn keine Kräfte auf dasselbe einwirkten.

¹⁾ La Place, Théorie capillaire im Supplement zum 10. Buche der Mécanique céleste, daraus Gilbert, Annalen XXXIII.

Das Molekül m'' , welches gerade in der Oberfläche der Flüssigkeit liegt, wird jedoch nicht nach allen Richtungen mit gleicher Stärke angezogen. Nur die untere Hälfte seiner Anziehungssphäre ist mit Flüssigkeitsmolekülen angefüllt, die obere nicht. Die anziehenden Kräfte der die untere Halbkugel ausfüllenden Moleküle haben nun, wie unmittelbar klar ist, zur Oberfläche MN senkrechte Resultierende R , da in den der Oberfläche parallelen Schichten die Moleküle rings um m'' ganz gleichmäßig verteilt sind. Das Molekül m'' und somit alle in der Oberfläche befindlichen Flüssigkeitsmoleküle werden durch eine gegen die Oberfläche senkrechte Kraft gegen das Innere der Flüssigkeit gedrückt.

Ähnliches gilt für das Molekül m' , welches um weniger als r unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegt. Auch dessen Anziehungssphäre ist nicht ganz mit Flüssigkeit angefüllt, und unterhalb m' wirkt eine Quantität Flüssigkeit auf dasselbe ein, deren Anziehung nicht durch eine nach oben gerichtete Anziehung das Gleichgewicht gehalten wird; auch an m' greift daher eine zur Oberfläche der Flüssigkeit senkrechte, gegen das Innere derselben gerichtete Kraft R' an, die jedoch kleiner ist als R .

Dasselbe ist der Fall mit allen Molekülen, welche um weniger als r unter der Oberfläche liegen, deren Anziehungssphären also zum Teil mit Flüssigkeit angefüllt sind. Legen wir daher parallel der Oberfläche im Innern der Flüssigkeit eine Fläche, welche von der Oberfläche um r absteht, so werden alle in dieser Schicht liegenden Moleküle nach unten gezogen. Diese Schicht wird also z. B. auf eine Flüssigkeitskugel wirken wie ein elastisches Häutchen, welches sich zusammenzuziehen sucht, und auf jede Flüssigkeit, die in einem Gefäße steht, einen rings gegen das Innere der Flüssigkeit gerichteten Druck ausüben, da sie auch an den den Wänden begrenzten Flächen vorhanden sein muß. Man nennt daher diese Schicht das Flüssigkeitshäutchen und diesen Druck den Normaldruck.

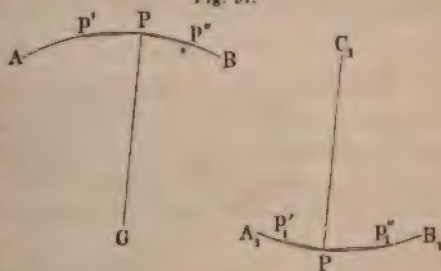
Dieser Normaldruck der Flüssigkeiten muß verschieden sein je nach der Gestalt der Oberfläche. Während nämlich in ebenen Oberflächen die Flüssigkeit nur durch die betrachten-

Molekularwirkungen nach unten gezogen wird, tritt in gekrümmten Oberflächen durch die in der Oberfläche vorhandenen Moleküle noch eine eigentümliche Anziehung hinzu, welche den Normaldruck vermehrt oder vermindert.

Eine Vermehrung tritt dann ein, wenn die Oberfläche nach unten konvex, eine Verminderung ein, wenn die Oberfläche nach oben konvex ist.

Denn ist AB (Fig. 97) ein Durchschnitt durch eine konvexe, A_1B_1 ein solcher durch eine konkave Oberfläche, so erkennt man leicht, daß die gegenseitigen Anziehungen der in der oberflächennächsten Flüssigkeitsteilen eine der Normale parallele Komponente liefern, welche bei den konkaven Flächen nach außen, bei den konvexen Flächen nach innen gerichtet ist. Man nennt diese von der Form der Oberfläche abhängige Komponente die Oberflächenspannung.

Fig. 97.



Um die Größe dieser Oberflächenspannung und ihre Abhängigkeit von der Gestalt der Oberfläche zu bestimmen¹⁾, sei Fig. 97 P ein Punkt der Oberflächenschicht, welche in dem Schnitt AB derselben liege, und sei m das im Punkte P vorhandene Massenteilchen der Flüssigkeit. Ein im Punkte p' vorhandenes Massenteilchen m' , welches von m die äußerst kleine Strecke r entfernt ist, wird dann auf das Massenteilchen m mit einer Kraft wirken, welche wir dem Produkte der Massen $m \cdot m'$ und irgend einer Funktion der Entfernung $f(r)$ proportional, also gleich $m \cdot m' \cdot f(r)$ setzen können; von der Funktion $f(r)$ wissen wir nur, daß sie verschwindet, sobald r größer als der Radius der Wirkungssphäre wird. Ein in demselben Schnitt in derselben Entfernung r bei p'' gelegenes Massenteilchen m' wird dann auf das Massenteilchen m genau dieselbe Wirkung $mm'f(r)$ ausüben. Diese Wirkungen sind nach den Verbindungslinien Pp' resp. Pp'' gerichtet.

Zerlegen wir diese Wirkungen jede in zwei Komponenten, die eine senkrecht, die andere parallel der im Punkte P errichteten Normale der Oberfläche, so heben sich die senkrecht zur Normale wirkenden Komponenten als einander gleich und entgegengesetzt gerichtet auf. Die der Normale parallel gerichteten Komponenten dagegen summieren sich, sie geben also eine auf das bei P liegende Massenteilchen m wirkende Kraft

$$2 \cdot m \cdot m' \cdot f(r) \cdot \cos p'PC.$$

In der Nähe des Punktes P , und soweit die Wirkungssphäre der Moleküle reicht, fällt, welches auch die Gestalt der Oberfläche ist, der Schnitt AB mit einem Kreisbogen zusammen, dessen Mittelpunkt in C liegt, dessen Radius ϱ der Krümmungsradius des Schnittes AB im Punkte P ist. Daraus folgt, da das über dem Durchmesser eines Kreises beschriebene Dreieck, dessen dritte Ecke in der Peripherie liegt, an dieser dritten Ecke rechtwinklig ist, daß

$$\cos p'PC = \frac{p'C}{2PC} = \frac{r}{2\varrho},$$

somit daß die aus der Wirkung von p' und p'' auf P resultierende der Normale parallele Komponente gleich ist

$$2mm'f(r) \cdot \frac{r}{2\varrho} = mm'f(r) \cdot \frac{r}{\varrho}.$$

Die Wirkung aller Flüssigkeitsteilchen in dem Normalschnitt AB auf das Massenteilchen m bei P erhalten wir, wenn wir für alle je zwei in gleicher Entfernung liegenden Massenteilchen, deren Abstand von P zwischen o und dem Radius der Wirkungssphäre enthalten ist, denselben Ausdruck bilden und alle diese Ausdrücke summieren, also in der Summe

$$\sum mm'f(r) \cdot \frac{r}{\varrho}.$$

Da jedes Glied dieser Summe den Faktor $\frac{1}{\varrho}$ hat, so können wir diesen Faktor ausschreiben und erhalten dann

$$\frac{1}{\varrho} \sum mm'f(r) \cdot r = \frac{h}{\varrho},$$

wenn wir die Summe mit dem Zeichen h bezeichnen.

¹⁾ Man sehe Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXV. p. 622.

Denken wir uns jetzt einen zweiten Normalschnitt durch den Punkt P der Oberfläche gelegt, welcher senkrecht zu dem Normalschnitt AB ist und den Krümmungsradius ϱ' hat, so gilt für diesen ganz dieselbe Entwicklung. Wir erhalten deshalb für die Wirkung der in diesem Schnitt der Oberfläche liegenden Flüssigkeitsteilchen auf das Teilchen bei P

$$\frac{h}{\varrho'}$$

und für die Wirkung beider Schnitte

$$h \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} \right).$$

Denken wir uns jetzt die ganze Oberfläche um den Punkt P durch unzählig viele Paare von je zwei zu einander senkrechten durch den Punkt P gelegter Normalschnitte gegeben, so wird die gesamte durch die Gestalt der Oberfläche bewirkte Spannung gleich sein der Summe aller der Spannungen, die wir für jedes Schnittpaar erhalten. Für irgend ein beliebiges Schnittpaar, deren Krümmungsradien ϱ_n und ϱ'_n sind, wird die Spannung sein

$$h \left(\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n} \right),$$

und die ganze Summe können wir dann bezeichnen mit

$$\Sigma h \left(\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n} \right).$$

Bezeichnen wir nun mit R den Radius der stärksten Krümmung, also den kleinsten Krümmungsradius, mit R_1 den Radius der schwächsten Krümmung, also den größten bei den Schnitten vorkommenden Krümmungsradius, so ist nach einem von Euler bewiesenen Satze immer

$$\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho'_n} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1},$$

oder die Summe der reciproken Werte der Krümmungsradien zweier zu einander senkrechter Schnitte hat bei einer gegebenen Oberfläche immer denselben Wert und ist gleich der Summe der reciproken Werte des größten und kleinsten Krümmungsradius. Wir können demnach aus obiger die Oberflächenspannung darstellenden Summe den konstanten Faktor herauschreiben und erhalten dann für dieselbe

$$\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \cdot \Sigma h.$$

Die in diesem Ausdrucke vorkommende Summe Σh können wir noch in folgender Weise näher definieren. Wir bezeichnen den auf die Flächeneinheit einer Kugeloberfläche vom Radius 1 infolge der Oberflächenspannung resultierenden Druck mit H . Indem wir dann den eben abgeleiteten Ausdruck für die Oberflächenspannung auf die Einheit der Oberfläche beziehen unter der Voraussetzung, daß die Fläche überall dieselbe Krümmung hat als im Punkte P , erhalten wir aus demselben die Oberflächenspannung der Kugel vom Radius 1, indem wir $R = R_1 = 1$ setzen, somit

$$2 \cdot \Sigma h = H; \quad \Sigma h = \frac{H}{2}.$$

Damit wird dann die Oberflächenspannung für eine irgendwie gekrümmte Fläche

$$\frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

In einer Ebene ist eine solche Oberflächenspannung nicht vorhanden, da dort die zur Normale parallelen Komponenten gleich Null werden. Es gibt auch unser Ausdruck zu erkennen; denn bei einer Ebene werden sowohl R als R_1 unendlich groß, ihre reciproken Werte also gleich Null.

Bei einer nach außen konvexen Oberfläche tritt diese Oberflächenspannung zu dem in einer ebenen Oberfläche derselben Flüssigkeit vorhandenen Normaldruck hinzu, indem der aus dieser Oberflächenspannung resultierende Druck, der in jedem Normalschnitt gegen den Mittelpunkt der Krümmung gerichtet ist, gegen das Innere der Flüssigkeit wirkt.

Bei einer nach außen konkaven Fläche $A_1 B_1$ Fig. 97 ist der Normaldruck um diese GröÙe kleiner als in der Ebene, da die auch hier gegen die Fläche gerichtete Oberflächenspannung nach außen wirkt. Nennen wir den auf die Flächeneinheit bezogenen Normaldruck in einer ebenen Oberfläche derselben Flüssigkeit K , so erhalten wir für den in einer gekrümmten Fläche vorhandenen Normaldruck¹⁾

$$P = K \pm \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right),$$

worin das positive Vorzeichen für konvexe, das negative Vorzeichen für konkave Flächen gilt. Unterscheiden wir die Krümmung der Oberfläche in konvex oder konkav, dadurch, daß wir die Vorzeichen der Radien R für konvexe, negativ für konkave Radien wählen, so können wir in unserem Ausdrucke dem zweiten Gliede allgemein das positive Vorzeichen geben, also setzen

$$P = K + \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Daß ein solcher Unterschied des Normaldruckes in nach außen konvexen und nach außen konkaven Flächen in der That vorhanden ist, ist eine bekannte Erscheinung an Seifenblasen. Die Wände einer kugelförmigen mit Luft gefüllten Seifenblase sind auf der äußeren Seite konvex, auf der inneren konkav gekrümmt. Auf der äußeren Seite ist daher, wenn wir den Radius der Seifenblase mit R bezeichnen, der gegen den Mittelpunkt der Kugel gerichtete Druck

$$P = K + H \frac{1}{R},$$

auf der inneren Seite der von dem Mittelpunkt fortgerichtete Druck

$$P_1 = K - H \frac{1}{R},$$

¹⁾ Der Satz wurde zuerst abgeleitet von *Thomas Young*, Philosophical Transactions of London Royal Society for 1805 p. 65; von *La Place*: Sur l'action capillaire. Supplément au X livre du traité de mécanique céleste; von *Poisson*: Nouvelle théorie de l'action capillaire. Paris 1831; von *Gauss*: Principia generalis theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrilii. Commentat. societ. reg. Gotting. T. VII. 1832 p. 43 ff. Man sehe auch *Mousson* Poggend. Ann. Bd. CXLII. p. 4

Man wir den Radius der innern Kugelfläche wegen der sehr geringen Dicke der flüssigen Hülle gleich dem der äußern Kugelfläche setzen. Die beiden Drucke liefern als Resultierende einen gegen den Mittelpunkt gerichteten Druck

$$P - P_1 = 2H \frac{1}{R}.$$

Man kann diesen Druck leicht wahrnehmen. Denn schließt man das Rohr, durch welches man die Blasen dargestellt hat, mit dem Finger, so behält die Blase ihre ursprüngliche Gröfse; wenn man das Rohr aber öffnet, so sieht man, wie die Kugel allmählich kleiner wird, indem jetzt die in der Blase vorhandene Luft jenem Drucke folgen und aus dem Rohr entweichen kann.

§ 72.

Einfluss der Wände. Auch die festen Körper üben, wie wir sahen, auf die Flüssigkeitsteilchen eine anziehende Wirkung aus, es mufs also an den Wänden eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefäßes zwischen den Theilen der festen Wand und den Flüssigkeitsteilchen eine Wechselwirkung stattfinden. Diese Einwirkung mufs sich in doppelter Weise geltend machen.

Zunächst mufs, worauf Poisson¹⁾ zuerst aufmerksam machte, in der Nähe einer in eine Flüssigkeit eingetauchten Wand eine Änderung in der Dichtigkeit der Flüssigkeiten bewirkt werden. Wenn die Lage der einzelnen Moleküle im Innern der Flüssigkeit von den Anziehungen der umgebenden Moleküle abhängt, so mufs, wenn die Anziehung der Wandschicht eine andere ist als die Anziehung einer an derselben Stelle gedachten Flüssigkeitsschicht, die Verteilung der Moleküle in derselben eine andere werden, als inmitten der Flüssigkeit. Ist die Anziehung der Wand auf die Flüssigkeitsschichtmoleküle eine stärkere, so müssen in der der Wand nächsten Flüssigkeitsschicht mehr Moleküle sich ansammeln als in anderen parallel dieser im Innern der Flüssigkeit liegenden Schichten. Die der Wand zunächst liegende Flüssigkeitsschicht mufs demnach eine gröfsere Dichtigkeit erhalten als die übrige Flüssigkeit. Diese Verdichtung mufs sich bis auf eine gewisse Entfernung von der Wandfläche erstrecken, denn die unmittelbar an der Wand anliegende verdichtete Schicht mufs eine ähnliche Wirkung auf die folgende Schicht ausüben, als die Wand auf die erste Schicht, welche indes nicht ganz so stark sein kann als die Anziehung der Wand selbst. In dieser Weise erkennt man, dafs die Verdichtung an der Wand am gröfsten sein mufs, und dafs mit Entfernung von der Wand die Dichtigkeit allmählich abnehmen mufs, bis sie in einem gewissen Abstände von derselben die normale der Flüssigkeit wird.

Das Entgegengesetzte mufs eintreten, wenn die Anziehung der Wand auf die Flüssigkeit eine kleinere ist als jene einer an der Stelle der Wand gedachten Schicht derselben Flüssigkeit.

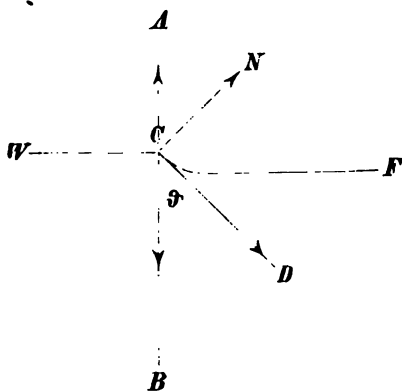
Die in der Nähe der Wand befindlichen Moleküle erhalten dann gegen die Flüssigkeit hin einen stärkeren Antrieb als gegen die Wand, es können deshalb in der Nähe der Wand nicht so viele Moleküle vorhanden sein, als in entsprechenden Schichten im Innern der Flüssigkeit.

^{1) Poisson, Nouvelle theorie de l'action capillaire. Paris 1831. Im Auszuge von Link, Poggend. Ann. XXV und XXVII.}

Zweitens aber muß in der Nähe der Wand eine Krümmung der Oberfläche der Flüssigkeit eintreten, es kann die Flüssigkeit, wenn wir etwa in eine solche, deren Oberfläche horizontal ist, eine vertikale Wand eintauchen, nicht bis an die Wand hin eine horizontale ebene Oberfläche erhalten, welche die Wand unter einem rechten Winkel schneidet, sie muß vielmehr die Wand unter einem andern Winkel schneiden, welcher von den Anziehungen der Wand zur Flüssigkeit und von der Kohäsion der Flüssigkeit abhängig ist.

Um das zu erkennen, und zugleich zu bestimmen, von welchen Umständen die Größe dieses Winkels abhängt, sei Fig. 98 AB eine feste vertikale Wand, welche in eine Flüssigkeit eintaucht, deren Oberfläche in

Fig. 98.



hinreichendem Abstände von der Wand horizontal sei. Die Oberfläche der Flüssigkeit sei in der Nähe der Wand nach außen konkav gekrümmt, und das letzte an der Wand anliegende Flüssigkeitselement schneide die Wandfläche unter dem Winkel $BCD = \vartheta$. Es sei also CD Tangente an der Flüssigkeitsoberfläche im Schnittpunkte.

Auf das letzte Flüssigkeitselement in der Oberfläche wirken dann eine Reihe von Kräften, welche bei der Beweglichkeit der Flüssigkeitsteilchen sich sämtlich aufheben müssen, wenn das Teilchen im Gleichgewicht sein soll.

Diese Kräfte sind erstens ein gewisser Zug in der Richtung CN , normal zur Oberfläche in C , herrührend von der Oberflächenspannung der gegen die Wand gekrümmten Flüssigkeit, zweitens ein Zug nach der Richtung der Tangente CD , welche die Tangentialkomponente der in der Oberfläche wirkenden Kräfte ist. Bei der Betrachtung der in der Oberfläche thätigen Kräfte im vorigen Paragraphen fiel diese Kraft heraus, weil in der freien Oberfläche der Flüssigkeit diese Kräfte rings um den betrachteten Punkt dieselben waren, somit sich gegenseitig aufhoben. Hier aber, wo das in C befindliche Flüssigkeitselement nur nach der Seite der Flüssigkeit hin eine Anziehung von in der Oberfläche befindlichen Flüssigkeitsteilchen erfährt, ist diese Tangentialkomponente der oberflächlichen Anziehungen sehr erheblich. Drittens üben die in dem Winkel ϑ vorhandenen Moleküle der Flüssigkeit einen Zug aus, dessen Richtung innerhalb des Winkels ϑ liegt, und dessen Stärke wesentlich abhängt von der Verdichtung der Flüssigkeit an der Oberfläche der Wand. Dazu kommt viertens die Anziehung der festen Wand, also aller Moleküle, welche in einer von C aus mit dem Radius der Wirkungssphäre in das Innere des festen Körpers beschriebenen Halbkugel liegen, auf das Flüssigkeitselement. Die Richtung des sich hieraus ergebenden resultierenden Zuges würde einfach die zur Wand normale Richtung CW sein, wenn wir die Wand als ganz homogen betrachten dürfen. Das wird indes nicht der Fall sein, vielmehr wird die in die Flüssigkeit tauchende Wandschicht durch die Anziehung

ssigkeit eine Lockerung erfahren haben, infolge deren die Anziehung ernen Hälfte der Halbkugel ohne Zweifel eine etwas andere geworden diejenige der obern Hälfte. Die Richtung der Resultierenden wird in den Winkel WCA fallen.

1 diesen molekularen Anziehungen würde dann noch die Wirkung hwere kommen, welche wir indes gegenüber den molekularen Anzen nach den Bemerkungen des § 70 als verschwindend klein außer assen dürfen.

Wir bilden nun von allen diesen Kräften ihre Komponenten erstens l CD , sei diese Komponente gleich F_1 , zweitens parallel AB , sei gleich F_2 , und zwar positiv, wenn dieselbe nach A hin, also von der keit nach aufsen gerichtet ist und drittens parallel CW , sei diese F_3 .

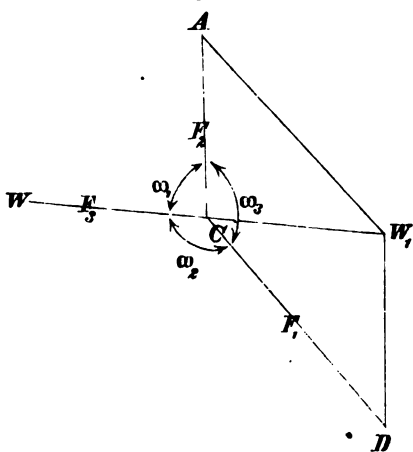
ie Resultierende F_1 hängt nur von der Anziehung der Flüssigkeit s betrachtete Element ab, dieselbe wird deshalb einfach proportional i vorigen Paragraphen abgeleiteten Oberflächenspannung respektive nstanten H gesetzt werden dürfen, da der hauptsächlichste Teil dieser ierenden die tangentielle Komponente der in der Oberfläche liegenden gkeitsteilchen ist, welche nach der Bezeichnung des vorigen Para- n proportional $\Sigma mm' f(r)$ ist. Die Kräfte F_2 und F_3 dagegen hängen lich von der Anziehung des Festen und des Flüssigen ab, also von lhasion des Flüssigen zum Festen.

ie Bedingung des Gleichgewichtes ist nun, dafs diese an dem Flüssig- emente wirkenden Kräfte sich aufheben. Stellen F_1, F_2, F_3 (Fig. 99) össe und Richtung nach die drei resultierenden Kräfte dar, so er- man sofort aus der Bedingung ichgewichtes, dafs je zwei der- eine Mittelkraft geben müssen, der dritten an Gröfse gleich, der Richtung nach entgegen- sein mufs, dafs die drei Kräfte erhalten müssen wie die Seiten Dreiecks, welches aus den Kräf- ten Nebenwinkeln der Winkel, mit einander bilden, konstruiert Denn bilden wir mit den Kräften l F_2 das Kräfteparallelogramm, ls, wenn Gleichgewicht vorhand- n soll, die Diagonale $CW_1 = CW$ d WW_1 mufs eine gerade Linie

Demnach ist in dem Dreieck , der Winkel ACW_1 der Neben- des Winkels ω_1 , welchen F_2 , mit einander bilden, der Winkel $AW_1C = DCW_1$ ist Nebenwinkel inkels ω_2 , den F_1 und F_3 einschließen, und schliesslich CAW_1 ist inkel von ω_3 . Da nun in einem Dreiecke sich die Seiten verhalten s Sinus der Gegenwinkel, so können wir die Gleichgewichtsbedingung en

$$\frac{F_1}{\sin \omega_1} = \frac{F_2}{\sin \omega_2} = \frac{F_3}{\sin \omega_3},$$

Fig. 99.



wo wir an Stelle der Sinus der Dreieckswinkel die Sinus der Nebenwinkel, welche die Kräfte mit einander einschließen, geschrieben haben.

Nennen wir den Nebenwinkel von ω_3 , den Winkel, welchen das letzte Oberflächenelement mit der Wandfläche bildet, ϑ , so ist nach dem verallgemeinerten pythagoräischen Lehrsatz

$$C W_1^2 = F_3^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos \vartheta,$$

somit die Bedingung des Gleichgewichtes für den Winkel ϑ

$$\cos \vartheta = \frac{F_1^2 + F_2^2 - F_3^2}{2 F_1 F_2}.$$

In unserem specielleren Falle ist der der Seite F_1 gegenüberliegende Winkel, da wir F_2 parallel der Wandfläche F_3 senkrecht zu derselben genommen haben, ein Rechter, somit

$$F_1^2 - F_3^2 = F_2^2,$$

und demnach

$$\cos \vartheta = \frac{F_2}{F_1}.$$

Es folgt somit, daß der Winkel ϑ , unter welchem die Oberfläche der Flüssigkeit die Wandfläche schneidet, nur von dem Verhältnis der beiden Kräfte F_2 und F_1 abhängig ist, von denen die zweite nur von der Kohäsion der Flüssigkeit, welche nach der vorhin gemachten Bemerkung der Konstanten in dem Ausdrücke für die Oberflächenspannung gleich gesetzt werden kann, und F_2 wesentlich von der Adhäsion des Flüssigen zum Festen abhängt. Es folgt somit, daß ein und dieselbe Flüssigkeit Wandfläche eines und desselben festen Körpers immer unter demselben Winkel, den man als den Randwinkel bezeichnet, schneiden muß.

Die Krümmung der Oberfläche gegen den festen Körper hin kann sich nicht auf das letzte Flüssigkeitselement beschränken, sie muß vielmehr sich bis zu einem gewissen Abstände von der Wandfläche erstrecken, der erheblich größer ist als der Radius der Wirkungssphäre. Je weiter wir uns aber von der Wand entfernen, um so mehr muß der Winkel ϑ sich einem Rechten nähern, die Oberfläche muß allmählich in die ebene übergehen. Zunächst erkennt man, daß mit einer Entfernung von der Wand innerhalb des Radius der Wirkungssphäre des festen Körpers F_2 kleiner werden muß, er wird aber noch nicht in einem dem Radius der Wirkungssphäre gleichem Abstände zur Null, da, wie wir sahen, in der Nähe der festen Wand eine Änderung in der Dichtigkeit der Flüssigkeiten eintritt. Die in der Dichtigkeit geänderten Flüssigkeitsschichten wirken aber auf die in der Richtung gegen die Flüssigkeiten weiter folgenden in demselben Sinne nur schwächer ein als die feste Wand auf die nächstliegenden, deshalb nimmt der Zahlen des Ausdrucks für $\cos \vartheta$ mit Entfernung von der Wand stetig ab. Von da ab, wo derselbe gleich Null geworden ist, treten wieder die gewöhnlichen Gleichgewichtsbedingungen der Flüssigkeit ein, es bleibt nur der in der Ebene vorhandene Normaldruck übrig, dem die elastische Reaktion der unter der Oberfläche liegenden Flüssigkeit das Gleichgewicht hält, die Oberfläche stellt sich wieder normal zu den wirksamen Kräften.

Der Winkel ϑ ist ein spitzer, wenn F_2 positiv ist, wenn also die sämtlichen parallel der Wand gerichteten Kräfte von der Oberfläche der

keit nach außen gerichtet sind, es ist das stets der Fall, wenn die Flüssigkeit die Wand benetzt, wie wir schon daraus schließen können, daß in dem Falle an einer vertikal aus der Flüssigkeit gezogenen Wand die Flüssigkeit mit emporheben können. Deshalb sieht man auch stets, daß die an der Wand benetzende Flüssigkeit sich an der Wand emporzieht. Die Oberfläche nimmt die Fig. 98 dargestellte Gestalt an.

Der Winkel ϑ ist ein stumpfer, wenn F_2 negativ ist, das heißt wenn die tangentialen der Wand parallelen Komponenten der Kräfte, welche wir in der vorigen Zerlegung erhalten, gegen das Innere der Flüssigkeit, in der Zeichnung also nach unten gerichtet sind. Es ist das dann der Fall,

wenn die Wand nicht von der Flüssigkeit benetzt wird, wenn also eine in die Flüssigkeit eingetauchte

vertikale Wand keine Flüssigkeit mit emporheben imstande ist. In dem Falle, z. B. wenn wir eine Glaswand in Quecksilber tauchen, wird auch, daß die Oberfläche in der Nähe der Wand herabgedrückt wird, sie nimmt die in Fig. 99 dargestellte Form an, sie ist in der Nähe der Wand nach außen konvex gekrümmt.

Hier durchgeführten Betrachtungen zeigen, daß in zwei Fällen an einer festen Wand über keinen Gleichgewichtszustand eintreten kann, erstens wenn $F_2 > F_1$, denn in dem Falle würden wir für den $\cos \vartheta$ einen Wert, der größer als 1, und zweitens, wenn die Summe der zur Wand normalen Komponenten negativ ist, die

berührende F_2 also von der Wand gegen die Flüssigkeit gerichtet ist. Welche Bedingungen dann eintreten müssen, werden wir später kurz besprechen.

Wenn wir der einen festen Wand in einer Flüssigkeit eine andere in einer kleinen Entfernung gegenüberstellen, oder wenn wir in die Flüssigkeit eine enge, sogenannte kapillare Röhre eintauchen, so muß die ganze Oberfläche im Innern gekrümmt werden. Wenn die Flüssigkeit die Wand benetzt, so muß die Oberfläche in der Röhre rings an der Wand herabziehen und ein Durchschnitt durch die Oberfläche muß die Gestalt MON Fig. 101 A annehmen. Wird die Wand von der Flüssigkeit nicht benetzt, so muß diese rings an der Wand herabgedrückt werden, ein Durchschnitt durch die Oberfläche muß die Gestalt $M_1O_1N_1$ Fig. 101 B annehmen.

In Röhren von kreisförmigem Querschnitt muß diese Fläche eine Kugelfläche werden, da dann jeder Durchschnitt durch die Oberfläche der Röhre dieselbe Gestalt haben muß. Ist der Durchmesser der Röhre sehr groß, so ist die Fläche sehr nahe eine Kugelfläche, wir wollen sie als Segment einer solchen betrachten¹⁾.

Die Annahme ist strenge genommen nur für sehr enge Röhren gültig. Über das darüber außer Poisson a. a. O. Hagen, Poggend. Ann. Bd. LXVII p. 1.

Fig. 100.

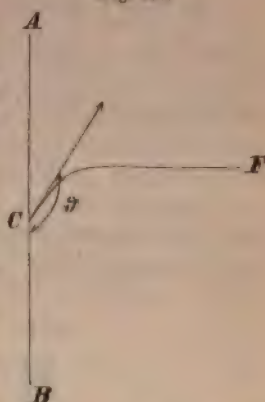
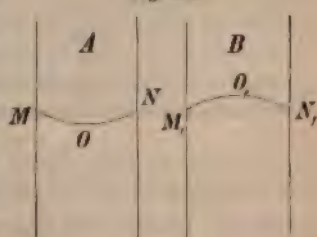


Fig. 101.



Wir haben bei der Bestimmung des Winkels ϑ erwähnt, daß die Wirkung der Schwere bei Betrachtung der an der Wand wirkenden Kräfte außer Acht gelassen werden kann. Es folgt daraus, daß der als ϑ bezeichnete Winkel bei derselben Flüssigkeit und derselben Gestalt der Wandfläche auch immer derselbe sein muß. Wir werden sehen, daß die Erfahrung diese Folgerung bestätigt¹⁾.

Wir wollen den konstanten Randwinkel stets mit ϑ , seinen Normalwinkel, wenn wir denselben in unsere Gleichungen einführen, zum Unterschied mit dem großen griechischen Buchstaben Θ bezeichnen.

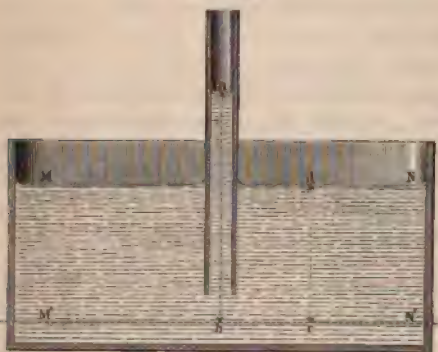
§ 73.

Niveauveränderungen in kapillaren Röhren. Da, wie wir in § 71 sahen, der molekulare Druck, den eine Flüssigkeitsoberfläche auf sich selbst erfährt, verschieden ist je nach der Gestalt der Oberfläche, so folgt, daß durch die Veränderung der Oberfläche das Niveau einer Flüssigkeit in engen Röhren ein anderes sein muß als in damit kommunizierenden weiten Röhren oder als in einem mit Flüssigkeit gefüllten Gefäß, in welches die enge Röhre eingetaucht ist.

Beginnen wir mit dem Falle, wo die Röhre benetzt wird, die Flüssigkeitsoberfläche also konkav ist.

Wenn die Oberfläche einer Flüssigkeit konkav ist, so ist, wie wir in § 71 sahen, der Druck, den die Flüssigkeitshaut nach dem Innern der Flüssigkeit ausübt, kleiner als der in ebenen Flächen.

Fig. 102.



Wird nun eine Flüssigkeitsmasse auf einer ebenen Oberfläche MN (Fig. 102, z. B. Wasser, eine enge Röhre stellt, deren Wände benetzt werden, so ist außerhalb der Röhre der vertikale Druck g der aus der Schwere der Flüssigkeit und dem Normaldruck zusammengesetzt ist, größer als im Innern der Röhre. Auswärts wenn wir mit g den aus der Wirkung der Schwere hervorgehenden Druck bezeichnen, der

vertikal abwärts gehende Druck in jedem der Einheit gleichen Stücke der Oberfläche gleich $g + K$, im Innern der Röhre aber gleich $g + K - q$, wenn

E. Desains, Annales de chim. et de phys. 3. Série. T. LI. *Wertheim*, Annales de chim. et de phys. 3. Série. T. LXIII.

¹⁾ Der Satz von der Konstanz des Randwinkels wurde zuerst von *T. Young* lectures on natural philosophy II p. 685. 1807. *Young works* I p. 1 (Encycl. Britt. 1816) abgeleitet. Man sehe *Quincke*, Annalen der Physik Chemie, neue Folge, Bd. II, p. 147 ff. Ähnlich leitet ihn ab *Moutier* C. R. p. 612. In anderer Weise gelangen *La Place*, Théorie capillaire im Suppl. zum 10. Buche der Mécanique céleste, daraus *Gilbert*, Annalen Bd. XI *Poisson*, Nouvelle théorie de l'Action capillaire, Paris 1831, *Gauss*, præ generalia theoriæ figuræ fluidorum in statu æquilibrii. Com. soc. reg. Götting. T. VII. p. 43 ff. 1832, *Mousson*, Poggend. Ann. Bd. CXLVII, p. 405 ff. zu sehen Resultate.

die Oberflächenspannung mit q bezeichnen. Legen wir durch die Flüssigkeit eine mit der Oberfläche parallele Ebene $M'N'$, so muß über dieser in der Röhre die Flüssigkeit soviel höher stehen als außerhalb, daß das Gewicht der über dem äußeren Niveau gehobenen Flüssigkeit gleich ist der Differenz zwischen dem vertikal abwärts gerichteten Drucke in einem dem Querschnitt der Röhre gleichen Flächenstücke des äußeren ebenen Niveaus und demselben in der Oberfläche der Flüssigkeit im Innern der Röhre. Denn wir wissen, daß eine der Schwere unterworfenen Flüssigkeit nur dann im Gleichgewicht sein kann, wenn der Druck in allen Punkten einer horizontalen Schicht derselbe ist. Denken wir uns nun in c ein dem Querschnitt der Röhre gleiches Flächenstück, so ist der dort wirksame Druck, wenn wir gleichzeitig mit s die Dichtigkeit der Flüssigkeit bezeichnen,

$$s \cdot f \cdot cd + f \cdot K.$$

Im Punkte b senkrecht unter der Röhre wirkt das Gewicht der Flüssigkeitssäule ba vom Querschnitt f , das Gewicht des Meniskus, welcher über a durch a gelegten Ebene gehoben ist, das mit m bezeichnet werde, und die Vertikalkomponente der in der gekrümmten Fläche wirkenden Oberflächenspannung. Um zunächst die letztere zu bestimmen, denken wir uns ein Flächenelement df in der Oberfläche, welches mit der Horizontalebene einen Winkel φ bildet. Der Normaldruck in diesem Elemente $(K - q)df$ bildet dann mit der Vertikalen denselben Winkel φ , und die vertikale Komponente ist somit

$$\cos \varphi (K - q) df.$$

$\cos \varphi \cdot df$ ist nun aber die horizontale Projektion des Flächenelements df ; somit ist die vertikale Komponente der in dem Flächenelement wirkenden Oberflächenspannung gleich dem Produkte aus dieser Spannung mit der horizontalen Projektion des Flächenelements. Was für dieses Element gilt, gilt für alle; somit ist die vertikale Komponente der Oberflächenspannung einfach gleich $(K - q) \cdot f$, da der Querschnitt der Röhre die horizontale Projektion der Oberfläche in der Röhre ist.

Der in b wirksame Druck ist somit

$$s \cdot f \cdot ab + m + (K - q) \cdot f,$$

und die Bedingung des Gleichgewichtes wird

$$s \cdot f \cdot ab + m + (K - q) \cdot f = s \cdot f \cdot cd + f \cdot K$$

oder

$$s \cdot f (ab - cd) + m = q \cdot f.$$

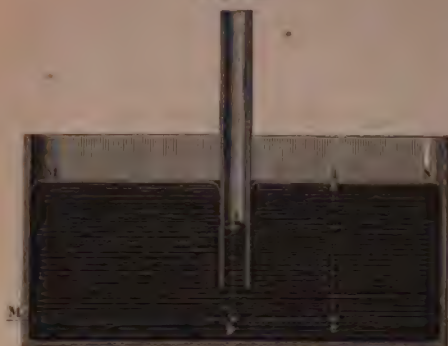
Wird die Röhre von der Flüssigkeit nicht benetzt, tauchen wir z. B. eine Glasröhre in Quecksilber, so ist die Oberfläche der Flüssigkeit in der Röhre konvex (Fig. 103). Dadurch ist nach dem Früheren der vertikal abwärts gehende Druck im Innern der Röhre größer als außerhalb, und es ist klar, daß deshalb die Höhe der Flüssigkeit in der Röhre kleiner sein muß als außerhalb.

In ganz gleicher Weise wie vorhin folgt dann wieder, daß der Gewichtsdifferenz der Flüssigkeitssäulen $cd \cdot s \cdot f$ und $ab \cdot s \cdot f + m$ der Differenz der vertikalen Drucke bei a und d gleich sei; es muß

$$s \cdot f (ab - cd) + m = - qf.$$

Diese Folgerungen lassen sich leicht durch den Versuch bestätigen. Tauchen wir eine enge Glasröhre in eine Flüssigkeit, welche die Röhrenwände benetzt, so wird im Innern derselben die Oberfläche der Flüssigkeit

Fig. 103.



konkav, und die Flüssigkeit erhebt sich bedeutend über das Niveau der äußern Flüssigkeit. Umgekehrt zeigt sich eine Depression bei konvexer Oberfläche beim Eintauchen einer Röhre in das sie nicht benetzende Quecksilber. Man kann diese Thatsache sehr anschaulich machen bei Anwendung U-förmig gebogene Glasröhren (Fig. 104), deren einer Schenkel sehr weit, der andere aber sehr eng ist. Füllt man ein solches Rohr mit Wasser, so sieht man, wie in Fig. 104, daß das

Wasser in dem engen Schenkel um vieles höher steht als im weiten, während die Oberfläche der Flüssigkeit in dem weiten Rohre eine viel geringere Krümmung besitzt als in dem engen Rohre. Das Umgekehrte zeigt sich wenn man in dasselbe Glasrohr Quecksilber gießt. Das Quecksilber steht dann, wie Fig. 105, im engen Rohre viel tiefer als im weiten Rohre.

Durch einen andern Versuch kann man es sehr deutlich bestätigen, daß, wie wir soeben nachwiesen, die Erhebung der Flüssigkeiten bei benetzenden, die Depression bei nicht benetzenden

Fig. 104.



Fig. 105.



nur von der Krümmung der Oberfläche abhängen ist. Versieht man ein anderes Gefäß (Fig. 106) mit einer engen Röhre *a*, und taucht dieselbe so weit in Wasser, daß das untere Ende der engen Röhre unter die Oberfläche des Wassers reicht, so steigt das Wasser bis zu einer gewissen Höhe *b* über dem äußern Niveau; zieht man nun das Gefäß aus der Flüssigkeit allmählich heraus, so muß in der engen Röhre das Wasser immerfort die Höhe *b* über dem Niveau des äußern Wassers besitzen, weil, wie wir sahen, die Höhe, bis zu der die Flüssigkeit ansteigt, proportional ist der durch

die Krümmung der Oberfläche entstehenden Druckdifferenz. Und das muß selbst der Fall sein, wenn ein Teil des weiten Gefäßes aus der Flüssigkeit hervorragt. Denn der Druck in *b* hängt, wie wir früher sahen, nicht ab von der Form des Gefäßes, sondern nur von der Höhe *ba* der Flüssigkeit über *b*. Wie der Versuch zeigt, kann man auf diese Weise ziemlich große Flüssigkeitssäulen heben.

Taucht man dieses Gefäß umgekehrt, wie in Fig. 107, in Quecksilber, so ist die Depression *ab* des Quecksilbers dieselbe, als wenn man eine Glasröhre von der Weite der engen angesetzten Röhre in Quecksilber eintauchen würde, wie es nach dem Vorigen die Theorie verlangt.

Einen noch evidenteren Versuch führt La Place in seiner „Théorie capillaire“ an.

Taucht man ein heberförmiges Glasröhrchen, wie ABC (Fig. 108), senkrecht so tief in Wasser, daß der kürzere Schenkel ganz untergetaucht ist, so steigt das Wasser in dem längern Schenkel bis zu einer gewissen Höhe a über das Niveau der äußern Flüssigkeit AJ . Zieht man nun das

Fig. 106.



Fig. 107.



Röhrchen heraus, so bildet sich bei A ein konvexer Tropfen, und sofort sieht man, wie die Flüssigkeit in dem längern Schenkel höher steigt bis b , weil jetzt in der konvexen Oberfläche bei A der vertikal abwärts gerichtete Druck größer ist als vorher in der ebenen Oberfläche der äußern Flüssigkeit. Nimmt man nun den Tropfen vorsichtig fort, so wird die Konvexität bei A kleiner, und man sieht dann, daß dem entsprechend die Flüssigkeit in BC sinkt; hat man schließlich die Begrenzungsfläche der Flüssigkeit in A durch fortgesetzte Wegnahme des Tropfens eben gemacht, so ist die Höhe der Flüssigkeit in BC wieder ebenso, wie sie war, als das Röhrchen in das Wasser eingetaucht war. Wenn man dann durch vorsichtiges Zuliegen von Tröpfchen in A die frühere Konvexität wieder herstellt, so steigt auch das Wasser in BC wieder zu seiner frühern Höhe an.

Fig. 108.

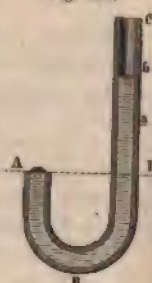


Fig. 109.



Einen ähnlichen Versuch gibt La Place an, um zu zeigen, daß die Depression und Erhebung der Flüssigkeit der gleichen Ursache angehören.

Gießt man in eine Glasröhre (Fig. 109), bei welcher der weitere Schenkel länger ist als der enge, Alkohol, so wird zunächst der Alkohol in dem engen Schenkel höher stehen als im weiten. Durch langsames und vorsichtiges Nachtröpfeln von Alkohol bewirkt man nun, daß die Flüssigkeit in dem engen Schenkel gerade das Ende erreicht; zunächst bleibt die Oberfläche konkav, und der Alkohol steht im weitem Schenkel gerade soviel höher als vorher. Durch weiteres vorsichtiges Nachtröpfeln kann man dann bewirken, daß die Oberfläche der Flüssigkeit bei b erst eben, dann wie bei den vorigen Versuche ein konvexer Tropfen wird. Man beobachtet dann noch, daß bei ebener Begrenzung in b die Flüssigkeit im weiten Schenkel eben die gleiche Höhe hat als im engen, und bei konvexer, daß die

Flüssigkeit in dem weiten viel höher steht; ein Beweis, daß die Erhebung oder Depression in einer Röhre nur von der Gestalt der Oberfläche und somit von der Oberflächenspannung abhängt.

§ 74.

Steighöhen in verschiedenen Räumen. Wir gelangten vorhin zu dem Resultat, daß in einer kapillaren Röhre das Gewicht der gehobenen oder deprimierten Flüssigkeit gleich sein muß der Druckdifferenz in der gekrümmten Oberfläche der Flüssigkeit im Innern der Röhre und in einem dem Querschnitt der Röhre gleichen Flächenstücke der ebenen Oberfläche.

Behalten wir die vorhin gebrauchte Bezeichnung bei und setzen die Differenz $ab - cd$, die Steighöhe der Flüssigkeit gleich h , so erhalten wir zur Bestimmung derselben

$$sfh + m = \pm qf,$$

wobei zu beachten ist, daß q die mittlere Oberflächenspannung der flüssigen Oberfläche in der Röhre ist, das heißt die Oberflächenspannung für die Einheit der Fläche, vorausgesetzt, daß dieselbe an allen Punkten der Oberfläche die gleiche ist. Wenn wir das Vorzeichen von q wie im § 71 bestimmen, also positiv setzen, wenn die Fläche konvex nach außen, dagegen negativ, wenn die Fläche nach außen konkav ist, können wir das doppelte Vorzeichen auf der rechten Seite fortlassen und schreiben

$$sfh + m = - qf.$$

Nehmen wir Röhren von kreisförmigem Querschnitt und solchem Durchmesser, daß die Oberfläche im Innern derselben ein Kugelsegment ist, so erhalten wir aus der allgemeinen Gleichung der Oberflächenspannung

$$q = \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right),$$

da in einer Kugel alle Krümmungsradien und an allen Stellen gleich und gleich dem Radius ϱ der Kugel sind,

$$q = \frac{H}{\varrho},$$

somit für das Gewicht der in einer solchen Röhre gehobenen Flüssigkeit

$$sfh + m = - \frac{H}{\varrho} f \dots \dots (1)$$

Das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit hängt somit ab von dem Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche und dem Querschnitt der Röhre. Dieser Krümmungsradius der Flüssigkeitsoberfläche läßt sich direkt aus dem Radius der Röhre bestimmen. Ist ab (Fig. 110) die Röhre und ucl die Oberfläche der Flüssigkeit, o der Mittelpunkt der kugelförmigen Oberfläche und der Radius der Röhre gleich r , so ist

$$ou = \varrho = \frac{uv}{\cos ouv} = \frac{r}{\cos ouv}.$$

Legen wir nun im Punkte u an die Oberfläche der Flüssigkeit eine Tangente, so bildet diese mit der Röhrenwand nach der Seite der Flüssigkeit hin den Winkel ϑ , welcher für dieselbe Flüssigkeit und für dasselbe

al der Röhrenwand konstant ist, da ϑ der, wie wir sahen, unter dieser
setzung konstante Winkel ist, unter welchem die Oberfläche der
keit die Wand der Röhre schneidet. Da nun ou senkrecht zur
te und uv senkrecht zur Röhrenwand ua in u ist, so folgt, daß der
vuo das Supplement von ϑ , also gleich Θ ist, somit

$$ou = \rho = \frac{r}{\cos \Theta}.$$

etzen wir diesen Ausdruck in die oben erhaltene Gleichung für das
t der gehobenen Flüssigkeit ein, so wird

$$sfh + m = -H \cdot \cos \Theta \cdot \frac{f}{r} = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{f}{r} \dots \dots (2).$$

ie Gleichung zeigt unmittelbar, daß, wenn der Randwinkel $\vartheta < 90^\circ$,
ssigkeit in der engen Röhre höher steht, da dann $\cos \vartheta$ und damit
positiven Wert hat, daß dagegen, wenn $\vartheta > 90^\circ$ eine Depression
ssigkeit stattfindet.

der Querschnitt der Röhre

$$f = r^2 \pi,$$

nach

$$sfh + m = H \cdot \cos \vartheta \cdot \pi \cdot r,$$

$$\frac{sfh + m}{2\pi r} = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta \dots \dots (3).$$

er Nenner auf der linken Seite ist der innere Um-
er Röhre; den Quotienten aus dem Gewichte der
nen Flüssigkeit und dem Röhrenumfang können
nit bezeichnen als das von der Längeneinheit der
ungslinie zwischen Flüssigkeit und fester Wand
ne Flüssigkeitsgewicht, und gelangen dann zu dem
daß dieses Gewicht unabhängig ist von der Weite
hre und nur abhängt von der Beschaffenheit der
keit und derjenigen der festen Wand, da die Kon-
 H und ϑ nur von dieser abhängen.

ividieren wir die Gleichung (2) durch f , so wird

$$sh + \frac{m}{f} = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{r};$$

vorausgesetzten engen Röhren können wir nun das Gewicht des
as vernachlässigen und erhalten dann

$$sh = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{r}$$

$$h = \frac{H}{s} \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{r} = a^2 \cos \vartheta \cdot \frac{1}{r},$$

vir, nach der von Poisson eingeführten Bezeichnung, $\frac{H}{s} = a^2$ setzen.

s folgt also, daß bei hinreichend engen cylindrischen Röhren des-
Materials die Steighöhen oder Depressionen einer Flüssigkeit dem
asser der Röhren umgekehrt proportional sind.

Fig. 110.



Dieser Satz, den schon ältere Physiker aus ihren Beobachtungen ableiteten, so der Jesuit Honoratius Fabry¹⁾ um die Mitte des 17. Jahrhunderts, ist in neuerer Zeit durch sehr genaue Beobachtungen bestätigt worden, zunächst von Gay-Lussac, welcher auf Anregung von La Place Versuche zur Prüfung der Theorie anstellte²⁾. Die Röhren, welche Gay-Lussac anwandte, waren sorgfältig kalibriert und ihr Durchmesser aus dem Gewichte eines Quecksilberfadens von gemessener Länge folgendermassen bestimmt. Ist die Länge des Quecksilberfadens in der Röhre gemessen gleich l , das Gewicht desselben gleich g , das spezifische Gewicht des Quecksilbers gleich s und der Radius der Röhre gleich r , so ist

$$g = r^2 \pi l s$$

$$r = \sqrt{\frac{g}{\pi l s}}.$$

Die Röhren, in welchen die Steighöhen verglichen wurden, waren zugleich in einer durchbohrten Metallplatte befestigt, welche auf den eben abgeschliffenen Rand eines grossen Glasgefässes gelegt wurde. Das Gefäss konnte durch Stellschrauben so gerichtet werden, daß die Ebene, auf der die Metallplatte lag, genau horizontal und somit die Röhren genau vertikal waren. Nun wurde das Gefäss mit der zu untersuchenden Flüssigkeit gefüllt, die Röhren im Innern durch mehrmaliges Aufsaugen der Flüssigkeit vorsichtig benetzt und dann die Höhe der Flüssigkeitssäulen in den Röhren gemessen.

Die von Gay-Lussac erhaltenen Resultate sind folgende:

Flüssigkeit	Durchmesser der Röhre $2 \cdot r$	Steighöhe h	$2rh$
Wasser	1,294 Millim.	23,379 Millim.	30,262
	1,903 „	15,903 „	30,263
Alkohol vom specif. Gew. 0,8196	1,294 „	9,398 „	12,164
	1,903 „	6,389 „	12,158

Man sieht, daß die Werte für $2rh$ bei den verschiedenen Beobachtungen fast genau dieselben sind, daß also wirklich die Steighöhen der Flüssigkeit in verschiedenen Röhren desselben Materials dem Durchmesser der Röhren umgekehrt proportional sind.

Dasselbe Resultat bestätigen die Versuche von Brunner³⁾, Desains⁴⁾, Bède⁵⁾, Simon⁶⁾ u. a. für Röhren, deren Querschnitte hinreichend klein sind, so daß die Voraussetzung einer kugelförmigen Oberfläche erfüllt ist.

Die für das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit erhaltene Gleichung

$$shf + m = - qf$$

¹⁾ Gehlers physikalisches Wörterbuch. Artikel Kapillarität.

²⁾ Gay-Lussac, Versuche in *La Place Théorie capillaire*. Suppl. zum 10. Buche der *Mécanique céleste*. *Gilberts Annalen* Bd. XXXIII. p. 316 ff.

³⁾ Brunner, *Poggendorffs Annalen* Bd. LXX.

⁴⁾ E. Desains, *Annales de chim. et de phys.* III. Sér. T. LI.

⁵⁾ Bède, *Mémoires couronnés de l'Académie de Bruxelles*. T. XXX. 1861.

⁶⁾ Simon, *Ann. de chim. et de phys.* III. Sér. T. XXXII.

können wir immer unmittelbar anwenden, wenn in kapillaren Räumen die Krümmung der Oberfläche und damit die Oberflächenspannung an allen Stellen dieselbe ist; es ist das z. B. auch der Fall zwischen zwei einander sehr nahe gegenüber gestellten parallelen Platten. Dort ist die Flüssigkeitsoberfläche ein Teil einer Cylinderfläche, indem nach der einen Richtung in die Flüssigkeit gar keine Begrenzung hat. Ein durch die Flüssigkeitsoberfläche parallel den Platten gelegter Schnitt schneidet die Oberfläche nunmehr in einer geraden Linie, der Krümmungsradius dieses Schnittes ist unendlich groß. Ein senkrecht zu den Platten gelegter Schnitt schneidet die Oberfläche dagegen in einem Kreisbogen, dessen Radius ϱ sei. Die Gleichung für die Oberflächenspannung

$$q = \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right)$$

hat daher in diesen Fällen über in

$$q = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Ist nun (Fig. 111) ab ein Durchschnitt senkrecht zur Ebene der Platten, $ou = \varrho$ der Krümmungsradius des Schnittes, d der Abstand der Platten, so erhalten wir auch hier wieder

$$\varrho = \frac{uv}{\cos ouv} = \frac{d}{2 \cdot \cos \vartheta}$$

$$q = -H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{d} = H \cos \vartheta \frac{1}{d}$$

Das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit wird

$$shf + m = H \cos \vartheta \frac{1}{d} \cdot f.$$

Nehmen wir ein Stück von der Länge l , so ist $l \cdot d = f$ gleich dem Querschnitt des auf dieser Länge zwischen den Platten eingeschlossenen Raumes, und es wird

$$\frac{shf + m}{2l} = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta.$$

Da die Oberfläche der Flüssigkeit jede der beiden Platten in der Länge l berührt, bedeutet die linke Seite der Gleichung wieder das Gewicht der an der Längeneinheit der Berührungslinie gehobenen Flüssigkeit; es ergibt sich für diese somit derselbe Wert wie in kapillaren Röhren, der nur von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und der festen Wand abhängt.

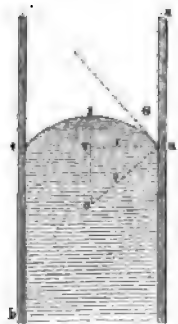
Für die Steighöhe h erhalten wir

$$h + \frac{m}{s} = \frac{H}{s} \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{d} = a^2 \cos \vartheta \frac{1}{d},$$

wo für hinreichend kleine Werte von d das Gewicht m des Meniskus außer Acht gelassen werden kann.

Die Steighöhe zwischen zwei parallelen Platten ist sonach umgekehrt proportional dem Abstände der beiden Platten; oder die Steighöhe zwischen

Fig. 111.



parallelen Platten ist halb so groß als in Röhren gleichen Durchmessers. Der Versuch bestätigt dies; denn Gay-Lussac fand bei den schon vorhin erwähnten Messungen für einen Abstand der Platten von 1,069 Millimeter die Steighöhe des Wassers gleich 13,574 Millimeter, woraus das Produkt $dh = 14,524$ sich ergibt, welches nur wenig von der Hälfte des Wertes von $2rh = 30,262$ abweicht.

Ist die Krümmung der Oberfläche in einem Raume nicht an allen Stellen dieselbe, so läßt sich das Gewicht der ganzen gehobenen Flüssigkeit nicht so einfach berechnen, wohl aber die Steighöhe an irgend einer Stelle dieses Raumes. Denn ist für irgend ein Flächenelement df der größte Krümmungsradius R , der kleinste R_1 , so gilt für dieses unmittelbar die § 73 abgeleitete Gleichung

$$shdf = -\frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) df,$$

da, wenn wir das Flächenelement uns unendlich klein denken, das Gewicht des Meniskus gleich Null ist; es ergibt sich daraus

$$sh = -\frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right) \quad h = -\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Man kann hiernach z. B. sehr leicht die Steighöhen an den verschiedenen Stellen des Zwischenraumes zwischen zwei Platten erhalten, welche (wie Fig. 112) so aufgestellt sind, daß sie sich in einer vertikalen Linie schneiden, so daß also ihre einander zugewandten Flächen mit einander

einen sehr kleinen Winkel bilden. Bezeichnen wir den Abstand a eines Punktes in der Halbierungsebene des Winkels von dem Scheitel des Winkels mit x , so ist der Abstand x der Platten in diesem Punkte

$$d = c \cdot x,$$

wenn c eine Konstante bedeutet, deren Wert von der Neigung der Platten gegen einander abhängt. Da wir den Winkel, den die Platten bilden, als

klein voraussetzen, so ist der Abstand der Platten überall so klein, daß wir den senkrecht zur Halbierungsebene des Winkels durch die Oberfläche geführten Schnitt als einen Kreisbogen ansehen dürfen, dessen Radius dann gerade wie bei parallel gestellten Platten gegeben ist durch

$$\varrho = \frac{d}{2 \cos \Theta} = \frac{cx}{2 \cos \Theta} = -\frac{cx}{2 \cos \vartheta}.$$

Dieser Krümmungsradius ist überall der kleinste; die Halbierungsebene des Winkels schneidet die Oberfläche nach der schwächsten Krümmung, deren Radius ein überall so großer ist, daß wir seinen reziproken Wert gegenüber dem reziproken Wert des eben bestimmten kleinsten Krümmungsradius vernachlässigen dürfen. Dann ergibt sich für die Höhe h in einem Abstände x von der Schnittlinie der Platten

$$h = \frac{a^2 \cos \vartheta}{cx}.$$

Fig. 112.



Es ergibt sich somit, daß die Steighöhen der Entfernung des betrachteten Punktes a von dem Scheitel des Winkels umgekehrt proportional sind, oder daß die Halbierungsebene des Winkels die Oberfläche in einer gleichseitigen Hyperbel schneidet, deren Asymptoten die Vertikale, in welcher die Innenseiten der Platten sich schneiden, und die Horizontale sind, welche der Halbierungsebene der Winkel liegt. Denn es werden

$$\text{für } x = 0 \quad h = \infty \quad \text{und für } h = 0 \quad x = \infty.$$

Eine Messung der zusammengehörigen Werte von h und x bei der Fig. 112 dargestellten Zusammenstellung bestätigt diese Folgerung.

In ähnlicher Weise können wir die Steighöhe an einer vertikalen ebenen Wand, die Gestalt der Oberfläche der an der Wand emporgehobenen Flüssigkeit und das Gewicht dieser Flüssigkeit erhalten. Sei Fig. 113 AB ein Durchschnitt einer vertikalen ebenen Wand, und CD ein Durchschnitt durch die Oberfläche der an der Wand emporgezogenen Flüssigkeit. Die Steighöhe h der Flüssigkeit in einem Punkte ist dann

$$h = -\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

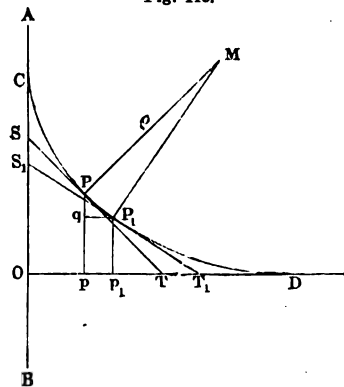
Ist die Wand eben, so schneidet ein an der Wand parallel geführter Schnitt die Oberfläche in einer geraden Linie, der Krümmungsradius dieses Schnittes ist also unendlich groß, sein reziproker Wert somit gleich Null. Wir erhalten daher für die Steighöhe im Punkte P , wenn wir den Krümmungsradius des Schnittes CD im Punkte P mit ϱ bezeichnen,

$$h = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Beziehen wir die Schnittkurve auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Punkte O liegt, wo die passend verlängerte horizontale Flüssigkeitsfläche die Wand schneiden würde, und dessen Achsen die horizontale OD und die vertikale OA sind, so würden wir die Gestalt des Schnittes CD und damit die der flüssigen Oberfläche erhalten, wenn wir den Krümmungsradius der Schnittkurve im Punkte P durch die Koordinaten dieses Punktes $Pp = h$ und $pO = x$ ausdrücken würden. Die Durchführung dieser Rechnung ist aber ohne ausgedehnte Anwendung der höheren Analysis nicht möglich; wir begnügen uns deshalb damit, die Steighöhe in einer etwas andern Weise auszudrücken, welche uns gestattet, die Steighöhe im Punkte C , wo die Schnittkurve die Wand schneidet, und das Gewicht der gehobenen Flüssigkeit zu berechnen.

Wir drücken zu dem Ende den Krümmungsradius ϱ aus durch den Winkel χ , welchen die im Punkte P an die Schnittkurve gelegte Tangente TP mit der Axe OA bildet, also durch den Winkel TSO . Für ein unendlich kleines zwischen den Punkten P und P_1 gelegenes Stück ds der Schnittkurve fällt dieselbe mit dem an P gelegten Krümmungskreise zusammen. Ist also M der Mittelpunkt des Krümmungskreises, und bezeichne

Fig. 113.



wir den Winkel PMP_1 , den die beiden von M nach P und P_1 gezogenen Radien mit einander bilden, mit $d\tau$, so ist

$$ds = \varrho \cdot d\tau$$

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau}.$$

Legen wir nun in dem Punkte P_1 die Tangente S_1T_1 an die Schnittkurve, so ist, da die Tangenten eines Kreises zu den Radien senkrecht sind, der Winkel $d\tau$, den die beiden Radien mit einander bilden, gleich dem, welchen die beiden Tangenten mit einander bilden. Dieser Winkel ist aber gleich der Zunahme, welche der Winkel χ erfährt, welchen die Tangente ST mit OA bildet, wenn dieselbe anstatt an den Punkt P an den folgenden Punkt P_1 gelegt wird. Denn der Winkel $T_1S_1O = \chi + d\chi$ ist Außenwinkel des von den beiden Tangenten gebildeten Dreiecks; der eine Gegenwinkel ist $TSO = \chi$, der andere der Winkel $d\tau$, welchen die beiden Tangenten mit einander bilden. Darnach ist

$$d\tau = d\chi,$$

somit

$$\varrho = \frac{ds}{d\chi}.$$

Ziehen wir nun von dem Punkte P_1 die Senkrechte P_1q auf die Ordinate Pp , so ist in dem rechtwinkligen Dreiecke PP_1q der Winkel $qPP_1 = \chi$, somit

$$\frac{Pq}{PP_1} = \cos \chi.$$

Pq ist die Änderung der Steighöhe h , wenn wir in der Schnittkurve von einem Punkte zu dem nächstfolgenden übergehen. Setzen wir diese Änderung gleich dh , so wird, da $PP_1 = ds$,

$$\frac{dh}{ds} = \cos \chi; \quad ds = \frac{dh}{\cos \chi}.$$

Damit wird dann

$$\varrho = \frac{dh}{\cos \chi d\chi}$$

und

$$h = -\frac{a^2}{2} \cdot \frac{\cos \chi d\chi}{dh},$$

oder

$$2h \cdot dh = -a^2 \cos \chi d\chi.$$

Da sich nun h um dh ändert, wenn sich χ um $d\chi$ ändert, so folgt aus dieser Gleichung nach schon mehrfach benutzten Sätzen der Einleitung und den Regeln E 1 und E 4

$$h^2 = C - a^2 \cdot \sin \chi.$$

Die Konstante C bestimmt sich, wenn wir beachten, daß dort, wo die Flüssigkeit horizontal, somit $\chi = 90^\circ$ ist, die Steighöhe $h = 0$ ist, somit

$$0 = C - a^2; \quad C = a^2.$$

Damit wird

$$h^2 = a^2 (1 - \sin \chi).$$

In dem Punkte C , in welchem die Schnittkurve die Wand schneidet, ist der Winkel χ gleich dem Winkel ϑ ; dort wird somit die Steighöhe h_0

$$h_0 = a \cdot \sqrt{1 - \sin \vartheta} = \sqrt{\frac{H}{s}} (1 - \sin \vartheta).$$

Die Steighöhe hängt also nur ab von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und der festen Wand.

Das Volumen der an einer Wandstrecke von der Länge l gehobenen Flüssigkeit erhalten wir, wenn wir die Fläche CBO mit der Länge l multiplizieren. Die Fläche CBO ist gleich der Summe aller der unendlich kleinen Vierecke Ppp_1P_1 , in welche wir die Fläche zerlegen, wenn wir von allen Punkten P der Kurve die Ordinaten Pp gezogen denken. Nennen wir die Abstände dieser Ordinaten dx , so ist $h \cdot dx$ der Flächeninhalt eines jeden solchen Vierecks, und die Summe aller Produkte $h dx$, wenn h von h_0 dem Werte an der Wand bis zu Null abnimmt, liefert uns nun die ganze Fläche. Ersetzen wir in dem Produkte $h dx$, h durch den s der Gleichung

$$h = - \frac{a^2}{2} \cdot \cos \chi \frac{d\chi}{dh}$$

h ergebenden Wert, so wird

$$h \cdot dx = - \frac{a^2}{2} \cdot \cos \chi \cdot d\chi \cdot \frac{dx}{dh}.$$

In diesem Ausdrucke ist unter Beachtung, daß mit wachsendem x die Höhe h kleiner wird, für ein positives dx also dh negativ ist,

$$\frac{dx}{dh} = \frac{q P_1}{q P} = - \tan \chi;$$

somit wird

$$h dx = - \frac{a^2}{2} \cdot \cos \chi \cdot \tan \chi \cdot d\chi = - \frac{a^2}{2} \sin \chi d\chi,$$

so daß die Fläche CDO wird

$$CDO = \int_{\chi=\vartheta}^{\chi=\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{2} \sin \chi d\chi.$$

dem Werte $x = 0$ oder $h = h_0$ der Wert $\chi = \vartheta$ und dem Werte $h = 0$ der Wert $\chi = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ entspricht. Die Summe wird nach EVIII und E3

$$CDO = - \frac{a^2}{2} \left\{ \cos 90^\circ - \cos \vartheta \right\} = \frac{a^2}{2} \cdot \cos \vartheta.$$

Das für die Länge l gehobene Volumen erhalten wir, wenn wir diese Fläche mit l multiplizieren, und das Gewicht, wenn wir das Volumen mit der Dichtigkeit s der Flüssigkeit multiplizieren. Das für die Längeneinheit gehobene Flüssigkeitsgewicht wird demnach

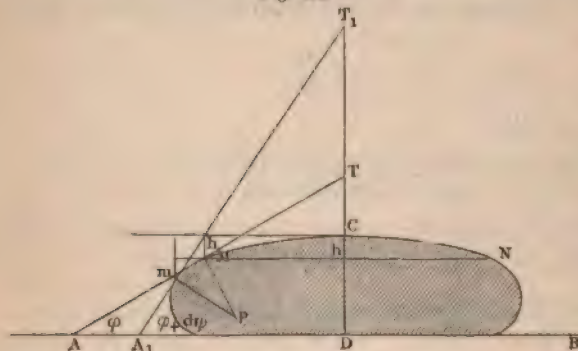
$$G = \frac{a^2 s}{2} \cdot \cos \vartheta = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta.$$

Wir gelangen also auch hier zu demselben Resultat, daß das Gewicht der an der Längeneinheit gehobenen Flüssigkeit nur von den beiden Konstanten H und ϑ abhängig ist, ein Satz, der ganz allgemein gilt, welcher auch die Gestalt des Raumes ist, in welchem die Flüssigkeit emporsteigt.

§ 75.

Bildung von Tropfen auf horizontaler Ebene. Wenn man auf eine horizontale Ebene eine Flüssigkeit möglichst langsam auffließen läßt, so sammelt sich dieselbe auf der Ebene in Form von Tropfen an, deren Gestalt ebenfalls durch die Kohäsion der Flüssigkeit und ihre Adhäsion an der Substanz der Unterlage bedingt ist. Zunächst erkennt man leicht, daß ein solcher Tropfen durch der Ebene parallele Schnitte in Kreisen geschnitten werden muß, daß also seine Oberfläche eine Rotationsfläche sein muß; denn auch bei dem Tropfen ist die Bedingung des Gleichgewichtes,

Fig. 114.



daß in allen Punkten der Oberfläche die normal zu derselben nach innen und nach außen gerichteten Kräfte einander das Gleichgewicht halten müssen. Denken wir uns nun durch einen Tropfen (Fig. 114) eine mit der Unterlage AB parallele Ebene MN gelegt, so ist in den Punkten der Oberfläche, welche von dem Schnitte getroffen werden, der von innen nach außen gerichtete Druck überall derselbe und zwar gleich dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Höhe gleich ist dem Abstände des höchsten Punktes C des Tropfens von der Ebene MN . Es muß deshalb auch in allen Punkten des Schnittes der normal nach innen gehende Druck derselbe, oder es muß die Oberfläche in allen Punkten des Schnittes MN gleich gekrümmt sein. Das ist aber nur der Fall, wenn die Fläche eine Rotationsfläche ist, deren Axe durch den Scheitel C des Tropfens geht.

Zur Untersuchung der Gestalt des Tropfens genügt es deshalb, die Gestalt einer durch die Axe CD des Tropfens gelegten Schnittkurve zu bestimmen.

Wir gelangen dazu in folgender Weise. Der im Punkte M gegen das Innere des Tropfens gerichtete Normaldruck ist bezogen auf die Flächeneinheit

$$P = K + \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Diesem Drucke hält der an derselben Stelle von innen nach außen gerichtete Druck das Gleichgewicht, der sich zusammensetzt aus dem Normaldruck in dem höchsten Punkte des Tropfens und dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule, deren Querschnitt der Flächeneinheit gleich ist, und

ren Höhe gleich ist dem vertikalen Abstände h des höchsten Punktes des Tropfens von dem Punkte M .

Ist der Tropfen nicht zu klein, so ist im Punkte C die Oberfläche des Tropfens eine horizontale Ebene; der Normaldruck ist somit gleich K . Ist die Dichtigkeit der Flüssigkeit gleich s , so ist der von innen nach außen gerichtete Druck

$$P = K + h \cdot s.$$

Damit wird die die Gestalt der Oberfläche liefernde Gleichgewichtsbedingung

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Ist die Tropfengröße ziemlich beträchtlich, so kann man den reziproken Wert des Krümmungsradius jenes Schnittes, den wir in M senkrecht dem Schnitte $MCND$ legen, vernachlässigen; bezeichnen wir dann den Krümmungsradius des Schnittes $MCND$ im Punkte M mit ϱ , so wird die Gleichgewichtsbedingung

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \cdot \frac{1}{\varrho}.$$

Wir können nun, gerade so wie im vorigen Paragraphen, den Wert $n \varrho$ durch h , den Winkel φ , welchen die in M an den Schnitt gelegte Tangente mit der Horizontalen bildet, und den Zuwachs, welchen dieser Winkel φ erfährt, wenn wir vom Punkte M zu dem nachfolgenden Punkte des Schnitts übergehen, dessen Tiefe unterhalb der an C gelegten Tangente $h + dh$ ist, ausdrücken. Ist nämlich die Länge des Elementes Mm sich ds , und der Winkel, den die beiden nach M und m gezogenen Krümmungsradien im Krümmungsmittelpunkte mit einander bilden, $d\tau$, so ist nächst wieder

$$ds = \varrho d\tau.$$

Nun ist $d\tau$ gleich dem Winkel, den die beiden Tangenten AT und A_1T_1 einander bilden, von denen die erste im Punkte M , die zweite im Punkte m an den Schnitt gelegt ist. Dieser Winkel ist aber gleich dem Zuwachs $d\varphi$ des Winkels φ , den die Tangente mit der Horizontalen bildet. Danach ist

$$ds = \varrho d\varphi.$$

Andererseits ist aber

$$\frac{dh}{ds} = \sin \varphi;$$

mit ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\sin \varphi d\varphi}{dh},$$

da

$$2h dh = \frac{H}{s} \cdot \sin \varphi d\varphi.$$

Daraus ergibt sich aber

$$h^2 = - \frac{H}{s} \cdot \cos \varphi -$$

Zur Bestimmung der Konstanten erhalten wir, da für den ob Punkt des Tropfens, für welchen $h = 0$ ist, auch der Winkel φ gleich wird, da die in C an den Schnitt gelegte Tangente horizontal ist,

$$0 = -\frac{H}{s} + \text{const.}$$

$$\frac{H}{s} = \text{const.},$$

somit

$$h^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \varphi).$$

Um die Höhe des ganzen Tropfens zu erhalten, müssen wir für Winkel einsetzen, unter welchem der Schnitt des Tropfens die horizontale Fläche schneidet. Nach § 72 ist der Winkel, unter welchem eine Flüssigkeit die feste Wand schneidet, immer derselbe Randwinkel ϑ , dort wo der Tropfen die Ebene schneidet ist demnach

$$\varphi = \vartheta,$$

somit wird die Höhe T des Tropfens gegeben durch

$$T^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \vartheta).$$

Für Flüssigkeiten, welche die Wand benetzen, ist der Winkel ϑ kleiner als 90° , da diese Flüssigkeiten an einer vertikalen Wand eine konkave Oberfläche bilden; es ist deshalb $\cos \vartheta$ positiv, somit

$$T < \sqrt{\frac{H}{s}}.$$

Bei Flüssigkeiten, welche die Unterlage nicht benetzen, die an einer vertikalen Wand eine nach oben konvexe Oberfläche bilden, größer als 90° , somit $\cos \vartheta$ negativ und

$$T > \sqrt{\frac{H}{s}}.$$

Da nun bei solchen Tropfen der Winkel φ , welcher an der Kuppel des Tropfens gleich Null ist, stetig, wenn man auf die Schnittkurve an der Basis des Tropfens fortschreitet, bis zu dem Werte $\varphi = \vartheta > 90^\circ$ ansteigt, so muß an einer Stelle der Schnittkurve $\varphi = 90^\circ$ werden, also die Tangente senkrecht stehen. An dieser Stelle hat somit der Tropfen seinen größten Durchmesser. Nennen wir den vertikalen Abstand dieser Stelle von der Tropfenkuppe t , so ist dort

$$t = \sqrt{\frac{H}{s}} = a.$$

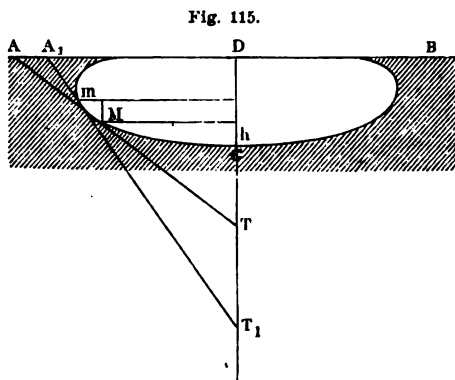
Aus den Werten von T und t erhält man somit

$$T^2 = t^2 (1 - \cos \vartheta)$$

$$\cos \vartheta = 1 - \frac{T^2}{t^2}.$$

Die Beobachtung der Höhen T des ganzen Tropfens und t des Abstandes der Stelle, an welcher der Tropfen den größten Durchmesser hat, von der Spitze des Tropfens, liefert also direkt und getrennt von einander die Werte der GröÙe a und des Winkels ϑ , wenn die Flüssigkeiten die Wand nicht benetzen.

Dasselbe, was Tropfen für nicht benetzende Flüssigkeiten geben, liefern uns Luftblasen, welche wir unter einer ebenen horizontalen Fläche in einer benetzenden Flüssigkeit bilden. Ist AB (Fig. 115) etwa eine Glasplatte, welche auf Wasser sich befindet, und bringen wir eine Luftblase unter die Fläche, so muß diese Luftblase dieselbe Gestalt nehmen, welche ein die Unterseite nicht benetzender Tropfen annimmt, wie eine der im Beginne



des Paragraphen gemachten ganz gleiche Überlegung ergibt. Die Gleichgewichtsbedingung für die Oberfläche ergibt sich in ganz ähnlicher Weise. Der Punkt M ist der gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Normaldruck

$$P = K - \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

In dem tiefsten Punkte C der Blase ist der Normaldruck, wenn die Blase nicht zu klein ist, gleich K ; bezeichnen wir die vertikale Erhebung des Punktes M über C mit h und die Dichtigkeit der Flüssigkeit mit s , so setzen wir diesen Druck K gleich

$$K = P + h \cdot s,$$

der Druck in C um das Gewicht der Flüssigkeitssäule von der Höhe h über sein muß als in dem um h höher liegenden Punkte M . Diese beiden Gleichungen liefern dann, genau wie bei dem Tropfen,

$$h \cdot s = \frac{H}{2} \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R_1} \right).$$

Drücken wir den Krümmungsradius φ wieder durch den Winkel $\angle D = \varphi$ aus, so wird ganz in derselben Weise wie vorhin

$$h^2 = - \frac{H}{s} \cdot \cos \varphi + \text{const.}$$

Dort wo die Grenzfläche der Blase die Platte AB schneidet, wird φ gleich dem Winkel Θ , also in diesem Falle gleich dem Supplement des Neigungswinkels ϑ . Für den tiefsten Punkt C der Blase wird $h = 0$ und gleichzeitig $\varphi = 0$ $\cos \varphi = 1$.

Demnach ist auch jetzt

$$- \frac{H}{s} +$$

Daraus ergibt sich

$$h^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \varphi), *$$

Da die Wand der Blase die Fläche AB unter dem Winkel Θ schneidet, so wird die Höhe T der Blase

$$T^2 = \frac{H}{s} (1 - \cos \Theta) = \frac{H}{s} (1 + \cos \vartheta).$$

An der Stelle des größten Durchmessers wird $\varphi = 90^\circ$; $\cos \varphi = 0$. Nennen wir den vertikalen Abstand dieser Stelle von der Kuppe der Blase t , so ist

$$t^2 = \frac{H}{s},$$

somit

$$\frac{T^2}{t^2} = 1 + \cos \vartheta = 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}$$

$$\cos \frac{\vartheta}{2} = \frac{T \sqrt{\frac{1}{s}}}{t}.$$

Wie demnach aus der Beobachtung von Tropfen der Flüssigkeit, welche die Unterlage nicht benetzen, kann aus der Beobachtung von Blasen zwischen einer Ebene und einer dieselbe benetzenden Flüssigkeit jede der Größen H und ϑ gesondert bestimmt werden.

§ 76.

Kapillaritätskonstanten. Die in den letzten Paragraphen dargelegte Theorie der Kapillarerscheinungen zeigt, daß dieselben wesentlich von den Größen a^2 und ϑ abhängig sind, von denen die erstere, oder genauer das Produkt derselben in die Dichtigkeit der Flüssigkeit, die GröÙe H MaÙ für die Kohäsion dieser Flüssigkeit ist, da sie uns die Oberflächenspannung in der Flächeneinheit einer Kugelfläche gibt, deren Radius Einheit gleich ist; während die andere GröÙe, der Winkel ϑ , von dem Verhältnisse der Adhäsion der Flüssigkeit an die feste Wand und der Kohäsion der Flüssigkeiten abhängig ist. Die Bestimmung dieser Konstanten aus verschiedenen kapillaren Erscheinungen ist deshalb gleichzeitig eine experimentelle Bestätigung dieser Theorie, da die verschiedenen Erscheinungen zu denselben Werten von a^2 oder H und ϑ führen müssen.

Für solche Flüssigkeiten, welche die Körper vollkommen benetzen, ist der Winkel ϑ sofort gegeben, er ist gleich 0° . Denn bei einer Flüssigkeit, welche einen festen Körper vollkommen benetzt, haftet die letzte Flüssigkeitselemente einfach an der Wand wie eine Haut, das letzte Flüssigkeitselemente somit der Wand parallel. Da wir den Winkel ϑ von der inneren Seite der Flüssigkeit tauchenden Seite der Wand gerechnet haben, so wird der Winkel $\vartheta = 0^\circ$.

Für Flüssigkeiten, welche eine feste Wand vollkommen benetzen können wir deshalb zunächst aus den Steighöhen in Röhren oder an einer ebenen Wand die Konstante a^2 oder H , welche die Kohäsion der Flüssigkeit ist, ableiten.

In § 74 erhielten wir für das Gewicht der in einer Röhre vom Radius r erhobenen Flüssigkeit den Ausdruck

$$h \cdot s \cdot f + m = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{f}{r},$$

in m das Gewicht des Flüssigkeitsmeniskus ist, welcher über dem tiefsten Punkte der nach außen konkaven Flüssigkeitsoberfläche erhoben ist. Für den Fall, daß der Randwinkel 0° ist, läßt sich das Gewicht dieses Meniskus in solchen cylindrischen Röhren, in welchen die Oberfläche ein Kugelmantel ist, leicht bestimmen. Wenn nämlich die kugelförmige Oberfläche der Röhrenwand unter einem Winkel von 0° schneidet, so ist dieselbe eine Halbkugel, deren Radius gleich dem Radius der Röhre ist. Das Volumen des Meniskus ist somit gleich demjenigen eines Cylinders, dessen Querschnitt gleich ist dem Querschnitt f der Röhre, dessen Höhe gleich ist dem Radius r der Röhre weniger dem Volumen der Halbkugel vom Radius r . Es ist somit

$$m = (f \cdot r - \frac{2}{3} r^3 \pi) s = f (r - \frac{2}{3} r) \cdot s = \frac{1}{3} f r \cdot s.$$

Damit wird die Gleichung für das gehobene Gewicht

$$h \cdot s \cdot f + \frac{1}{3} r \cdot s \cdot f = H \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{f}{r},$$

indem wir auf beiden Seiten durch $s \cdot f$ dividieren, $\vartheta = 0^\circ$ setzen,

$$h + \frac{1}{3} r = \frac{H}{s} \cdot \frac{1}{r} = a^2 \frac{1}{r}$$

$$r(h + \frac{1}{3} r) = a^2,$$

da die Kapillaritätskonstante a^2 ist gleich dem Produkte aus der um ein Drittel des Radius vermehrten Steighöhe in den Radius der Röhre, wenn die Röhre so eng ist, daß die Oberfläche der Flüssigkeit eine Kugelfläche bildet. Darin, daß die Konstante hier als das Produkt zweier Dimensionen betrachtet wird, liegt auch der Grund, daß sie als a^2 bezeichnet ist. Wird der Radius $r = 1^{\text{mm}}$, so wird

$$a^2 = (h + \frac{1}{3}),$$

da die Konstante a^2 kann auch als die um $\frac{1}{3}^{\text{mm}}$ vermehrte Steighöhe in einem Rohre von 2^{mm} Durchmesser definiert werden, vorausgesetzt, daß die kapillare Oberfläche eine Kugelfläche wäre.

Für die Steighöhe an einer vertikalen Wand erhielten wir in § 74 den Ausdruck

$$h_0 = \sqrt{\frac{H}{s} (1 - \sin \vartheta)} = a \cdot \sqrt{1 - \sin \vartheta}.$$

Ist der Winkel $\vartheta = 0^\circ$, so ist $\sin \vartheta = 0$; somit wird für vollkommen benetzende Flüssigkeiten

$$h_0 = a; \quad h_0^2 = a^2,$$

da die Kapillaritätskonstante a^2 ist ebenfalls gleich dem Quadrate der Steighöhe der Flüssigkeit an einer vertikalen ebenen Wand.

Zur Bestimmung der Konstanten a^2 genügt es deshalb, die Steighöhe der Flüssigkeit in einem cylindrischen Rohr von bekanntem, aber sehr kleinem Radius r oder an einer ebenen Wand, welche vollkommen von der Flüssigkeit benetzt werden, zu messen, und in dieser Weise ist dieselbe für eine nicht unbeträchtliche Anzahl von Flüssigkeiten unter Benutzung von

Glasröhren und Glaswänden von Frankenheim¹⁾, Mendéléeff²⁾, Quincke⁴⁾ u. a. bestimmt worden.

Für das Gewicht der von der Längeneinheit der Berührung zwischen Flüssigkeit und fester Wand getragenen Flüssigkeit erhielt im § 74 ganz allgemein

$$G = \frac{H}{2} \cdot \cos \vartheta = \alpha \cdot \cos \vartheta.$$

Ist ϑ gleich 0° , so wird

$$G = \frac{H}{2} = \alpha = \frac{1}{2} a^2 s,$$

oder die Hälfte der die Oberflächenspannung messenden Konstante bei vollkommen die Wand benetzenden Flüssigkeiten gleich dem Gewichte der von der Längeneinheit der Berührungslinie über das Niveau der Flüssigkeit erhobenen Flüssigkeit.

Man kann die Konstante $\alpha = \frac{H}{2}$ ebenso als die Konstante der Kapillarität einer Flüssigkeit bezeichnen, wie es in neuerer Zeit besonders von Wilhelmy und Quincke geschehen ist.

Wilhelmy⁵⁾ hat diese Konstante nach einer sehr einfachen Methode bestimmt und gleichzeitig die nach der Poissonschen Theorie an den Enden der eingetauchten Körper eintretende Verdichtung zu messen vermocht. Wilhelmy hing feste Körper, planparallele Platten oder Cylinder, deren Dimensionen vorher genau gemessen waren, an den einen Arm einer Waage und bestimmte ihr Gewicht. Er ließ diese Körper dann bis zu einer bestimmten Tiefe, so daß ein genau bekanntes Volumen derselben in die zu untersuchende Flüssigkeit hinabsank. Wegen der Messung durch die Wilhelmy dieses Volumens bestimmte, müssen wir auf die Handlung selbst verweisen. Es wurde dann das Gewicht des eingetauchten Körpers beobachtet. Dieses Gewicht ist gleich dem Gewichte des Körpers in der Luft, weniger dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit plus dem Gewichte der kapillar gehobenen und der an der Oberfläche verdichteten Flüssigkeit. Denn diese beiden Flüssigkeitsmengen werden von dem Körper getragen. Ist demnach Π das Gewicht des eingetauchten Körpers, P das Gewicht in der Luft, G das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, α der Umfang des festen Körpers im Niveau der Flüssigkeit, taucht die Fläche O des festen Körpers ein und nennen wir β das Gewicht der Einheit der Oberfläche verdichteten Flüssigkeit, so ist

$$\Pi = P - G + \alpha\lambda + \beta O.$$

Um in dieser Weise die beiden gesuchten Größen α und β zu bestimmen, wird bei weiteren Versuchen der Körper tiefer eingetaucht. Nennen wir die bei einem zweiten Versuche eingetauchte Oberfläche O_1 das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit G_1 , so wird

$$\Pi_1 = P - G_1 + \alpha\lambda + \beta O_1.$$

¹⁾ Frankenheim, Kohäsionslehre. Breslau 1835. p. 79 ff.

²⁾ Mendéléeff, Comptes rendus. T. L. p. 52. T. LI. p. 97.

³⁾ Bède, Mémoires couronnés de Bruxelles. T. XXX.

⁴⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXV. Bd. CXXXIX.

⁵⁾ Wilhelmy, Poggend. Ann. Bd. CXIX, CXXI, CXXII.

15 diesen beiden Beobachtungen ergibt sich

$$\beta = \frac{G_1 - G + \Pi_1 - \Pi}{O_1 - O},$$

t dem so bestimmten β erhalten wir dann α

$$\alpha = \frac{\Pi + G - P - \beta O}{l}.$$

Wilhelmy schloß aus seinen Versuchen, daß in der That an der Oberfläche der festen Körper eine sehr wohl meßbare Verdichtung stattfindet, als dieselbe je nach der Natur des festen Körpers und der Flüssigkeit verschieden sei. Wilhelmy gibt folgende Werte von β in Milligrammen auf Quadratmillimeter.

Flüssigkeiten	Werte von β an					
	Glas	Platin	Silber	Messing	Zink	Aluminium
Äthylalkohol	0,01259	0,00641	0,01512	0,02326	0,00709	0,00716
Amylalkohol	0,01242	0,00449	0,01160	0,00497	0,00786	0,00657
Wasser	0,01186	0,01180	—	—	—	—
Essigsäure	0,01290	0,00220	—	—	—	—
Salzsäure	0,00875	0,00169	—	—	—	—
Essigäther	0,00051	0,00521	—	—	—	—

Es zeigt sich hier keineswegs, was man zunächst hätte vermuten können, daß die Verdichtung mit der Dichtigkeit des festen Körpers zusammenhängt, im Gegenteil sind die Verdichtungskoeffizienten für den dichtesten Körper, das Platin, im allgemeinen am kleinsten.

Für die Konstante α ergab sich nach diesen Versuchen ein verschiedener Wert je nach dem festen Körper, der in die Flüssigkeit eingetaucht wurde, trotzdem alle Körper von den untersuchten Flüssigkeiten benetzt wurden. Weiter schloß Wilhelmy, daß, der Theorie entgegen, selbst die Form des Körpers, ob Platte, ob Cylinder, auf den Wert von α von Einfluß sei. Die folgende Tabelle enthält einige von Wilhelmy für Äthylalkohol und Amylalkohol erhaltene Werte von α und β für verschiedene Platten und Cylinder.

Form der festen Körper	α		β	
	Äthylalkohol	Amylalkohol	Äthylalkohol	Amylalkohol
Äthylalkoholplatte	2,444	2,542	0,015 12	0,011 60
Amylalkoholplatte	2,410	2,396	0,004 67	0,004 05
Äthylalkoholplatte	2,395	2,401	0,006 41	0,004 49
Amylalkoholplatte	2,325	2,407	0,012 59	0,012 42
Äthylalkoholplatte	2,448	2,551	0,023 26	0,004 97
Äthylalkoholcylinder				
Äthylalkoholcylinder 14,945 mm Durchmesser	2,983	3,098	0,024 95	0,028 27
„ 5,009	2,358	2,477	0,020 05	0,015 23
„ 1,529	2,301	2,299	0,009 00	0,006 75

Gegen die von Wilhelmy aus seinen Versuchen gezogenen Schlüsse, daß an den Oberflächen der festen Körper eine so erhebliche Verdichtung der Flüssigkeiten stattfindet, und daß der Wert der Konstante α von der Gestalt der Oberflächen abhängig sei, sind später sehr erhebliche Einwände gemacht worden. Röntgen¹⁾ bestimmte zunächst den Gewichtsverlust eines sehr leicht spaltbaren Gypsstückes von 3600 Quadratmillimeter Oberfläche bei dem Eintauchen in Weingeist. Dieselbe Gypsplatte wurde dann in 11 einzelne Platten zerteilt, so daß jetzt die Oberfläche des eingetauchten Gypses um 36000^{qmm} zunahm. Nimmt man nun auch den kleinsten, von Wilhelmy für Äthylalkohol gegebenen Verdichtungskoeffizienten, nämlich 0,005 an, so müßte in dem letzten Falle der Gewichtsverlust 0,180^{gr} weniger betragen haben. Röntgen fand aber den Gewichtsverlust im letzten Falle genau gleich demjenigen im ersten Falle, so daß er gar keine meßbare Verdichtung beobachten konnte. Dasselbe ergab ein Versuch mit Glas. An der Gebläselampe wurde Glas zu äußerst feinen Häutchen ausgeblasen. Von diesen Häutchen hatte eine Gewichtsmenge von 0,730^{gr} nach einer Schätzung mindestens 80000^{qmm} Oberfläche. Mit dem von Wilhelmy gegebenen Verdichtungskoeffizienten 0,01259 hätte diese Glasoberfläche etwa 1000^{mgr} Alkohol auf sich verdichten müssen. Setzt man das spezifische Gewicht des Glases gleich 2,5, das des Alkohols gleich 0,8, so verdrängt dieses Glas beim Eintauchen in Alkohol etwa 250^{mgr} Alkohol. Die verdichtete Flüssigkeit hätte also etwa das Vierfache der verdrängten Flüssigkeit gewogen, oder dieses Glas hätte bei dem Eintauchen in Alkohol 750^{mgr} mehr wiegen müssen als in der Luft. Es ergab sich indes eine Gewichtsabnahme von 231^{mgr}, aus der sich das spezifische Gewicht des Glases gleich 2,53 berechnet, während sich für ein massives Stück desselben Glases das spezifische Gewicht 2,51 ergab. Es ließe sich also überhaupt keine merkliche Verdichtung beobachten.

Zu gleichen Resultaten gelangte Schleiermacher²⁾ bei einer Untersuchung über die auf benetzten Körpern verdichtete Flüssigkeitsmenge, welche, wenn sie so groß ist wie Wilhelmy sie annahm, auf spezifische Gewichtsbestimmungen von beträchtlichem Einflusse sein kann. Schleiermacher findet, daß die Verdichtung der Flüssigkeiten höchstens 0,0001^{mgr} auf das Quadratmillimeter betragen könne, und daß sich ebenso wenig Unterschiede derselben für die verschiedenen Substanzen erkennen lassen.

Volkman³⁾ hat dann die Folgerung Wilhelmys geprüft, daß die Gestalt des eingetauchten Körpers auf den Wert der Konstanten von Einflusse sei. Zunächst weist derselbe nach, daß die Verdichtung der Flüssigkeiten an den Oberflächen, welche Wilhelmys Versuche zu ergeben schienen, nicht vollständig erklären lassen, wenn man annahme, daß Wilhelmys Bestimmung des spezifischen Gewichtes des Alkohols mit einem kleinen Fehler behaftet sei, und daß dieselbe Annahme auch die an verschiedenen Formen derselben Substanz gefundenen Werte von α sich sehr viel näher bringe. Weiter, daß die Annahme eines kleinen konstanten Einstellungsfehlers bei Bestimmung der Grenze, bis zu welcher die Körper eingetaucht seien, die Unterschiede der gefundenen Werte von α fast zum Verschwinden bringe.

¹⁾ Röntgen, Wiedem. Ann. Bd. III. p. 321.

²⁾ Schleiermacher, Wiedem. Ann. Bd. VIII. p. 52.

³⁾ Volkman, Wiedem. Ann. Bd. XI. p. 177.

Um einen etwaigen Einfluß der Krümmung der Oberfläche zu untersuchen, bestimmte Volkmann dann mit der größten Sorgfalt die Steighöhen der Flüssigkeiten zwischen parallelen Platten, die in verschiedenen Abständen einander gegenüber standen, und in Röhren verschiedenen Durchmessers. Die aus diesen Beobachtungen sich ergebenden Kapillaritätskonstanten a^2 fanden sich durchaus gleich, so daß ein Einfluß der Krümmung Flächen sich gar nicht erkennen liefs. So fand Volkmann unter andern Alkohol folgende Werte von a^2 , dieselben berechnet unter der Annahme, der Randwinkel $\vartheta = 0$ war.

Platten		Röhren	
Abstand mm	a^2	Durchmesser mm	a^2
1,956	5,78	2,931	5,80
1,519	5,81	2,349	5,79
1,138	5,75	1,006	5,80
0,438	5,78	0,714	5,80

Der von Wilhelmy aus seinen Versuchen gefolgerte Einfluß der Substanz des festen Körpers auf das von der Längeneinheit der Berührungstragene Gewicht der kapillar gehobenen Flüssigkeit ist dagegen durch andere Beobachtungen bestätigt worden. So läßt sich zunächst ein Einfluß, wie Quincke¹⁾ gezeigt hat, aus Versuchen von Guthrie²⁾ auf die Bildung von Tropfen folgern. Läßt man nämlich von einem festen Körper Tropfen einer Flüssigkeit, die denselben vollkommen benetzt, abfallen, so liefert das Gewicht des abfallenden Tropfens das Gewicht, welches an einer dem Umfange des Tropfens an der Berührungsstelle eben Kontaktlinie zwischen festem und flüssigem Körper getragen werden kann. Der Quotient aus dem Tropfengewichte und dem erwähnten Umfange muß deshalb der von uns mit α bezeichneten Größe sehr nahe sein. Kennt man den Umfang, so kann man aus dem Tropfengewichte den Wert α berechnen. Man kann das erreichen, indem man von eben vollkommen benetzten Scheiben Tropfen abfallen läßt; der Umfang der Scheiben ist dann gleich dem obern Umfange des Tropfens. Handelt es sich nur um eine Vergleichung der Kapillaritätskoeffizienten, so braucht man den Tropfenumfang nicht zu kennen, wenn man die Tropfen verschiedener Flüssigkeiten von einem und demselben festen Körper abfließen läßt, indem man bei Benutzung verschiedener fester Körper dieselben in Tropfen von Kugeln gleicher Radien benutzt. Da die Umfänge der Tropfen benetzenden Flüssigkeiten dann gleich sind, so sind die Gewichte der Tropfen den Kapillaritätskoeffizienten proportional.

In dieser Weise hat Guthrie das Gewicht von Wassertropfen bestimmt, die von Kugeln verschiedener Substanzen abfielen, deren Radien gleich 7^{mm}

¹⁾ Quincke, Berliner Berichte über die Fortschritte der Physik für das 1865. Bd. XXI. p. 99 ff.

²⁾ Guthrie, On drops. Proceedings of Royal Society of London T. XIII.

waren. Die von Guthrie erhaltenen Zahlen enthält folgende kleine Tabelle, das Gewicht der Tropfen ist in Milligrammen gegeben.

Antimon . .	119,8	Blei	122,6
Schwefel . .	120,2	Phosphor . .	122,7
Kadmium . .	121,8	Wismuth . .	122,8
Zink	122,5	Zinn	124,2.

Von einer Glaskugel, deren Radius $7^{\text{mm}},1$ betrug, fielen die Tropfen im Gewicht 129,7 und von einer gleichen Messingkugel 132,2.

Die Unterschiede sind ähnlich wie bei den Versuchen von Wilhelmy; auch hier zeigt sich wie dort der Wert von α bei Messing größer als bei Glas.

Dieser Einfluß der Körpersubstanz auf das getragene Flüssigkeitsgewicht läßt sich, wie Wilhelmy¹⁾ hervorhebt, mit der Theorie vereinigen, wenn man die Voraussetzung fallen läßt, daß bei allen benetzenden Flüssigkeiten der Randwinkel $\vartheta = 0$ ist. Wilhelmy glaubt, wie es schon Poisson annahm, daß man als die Kapillarröhre, in welcher die Flüssigkeit aufsteigt, die letzte an der Wand haftende Flüssigkeitsschicht ansehen müsse, welche je nach der Natur des festen Körpers mehr oder weniger verdichtet sei. Der Winkel ϑ , der dann maßgebend ist, ist jener, unter welchem sich die kapillare Oberfläche der Wandschicht anschließt, und dieser ist dann je nach der Verdichtung der Wandschicht verschieden. Damit muß dann auch der beobachtete Wert von α verschieden sein, da wir aus der Steighöhe oder dem gehobenen Gewicht die wahre Kapillaritätskonstante nur erhalten, wenn $\vartheta = 0^\circ$ ist.

Diese Ansicht von Wilhelmy ist durch die Beobachtungen von Quincke bestätigt, indem er zunächst zeigte²⁾, daß die Steighöhe des Wassers an einer Glaswand verschieden ist, je nachdem man dieselbe gleich nach Herstellung des Meniskus oder längere Zeit nachher untersucht. Aus 5 Versuchsreihen, bei denen er die Höhe, bis zu welcher das Wasser an der vertikalen Wand einer vorher luftfrei gemachten Flasche emporstieg, bestimmte, fand er im Mittel

$$h_0 = a = 4,169$$

bei einer Temperatur von 17° . Bei Wiederholung desselben Versuches, nachdem das Wasser mehrere Wochen mit Abschluß der Luft gestanden hatte, ergab sich bei derselben Temperatur

$$h_0 = a = 3,867,$$

also ein merklich kleinerer Wert, der beweist, daß der Winkel ϑ größer als 0° geworden war.

Später hat Quincke³⁾ dann direkt die Steighöhen in kapillaren Röhren mit den aus der Messung von Luftblasen sich ergebenden Werten der Konstanten verglichen, und nach den im vorigen Paragraph abgeleiteten Gleichungen die Werte von H und ϑ direkt bestimmt. Nach diesen Gleichungen ist die Höhe T der ganzen Luftblase

$$T = \sqrt{\frac{H}{g} (1 + \cos \vartheta)} = a \cdot \sqrt{1 + \cos \vartheta}$$

¹⁾ Wilhelmy, Poggend. Ann. Bd. CXIX.

²⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXV. Man sehe auch Volckmann a. a. O.

³⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

ler Abstand der Blasenkurve von dem Schnitte, in welchem die Blase größten Durchmesser hat,

$$t = \sqrt{\frac{H}{s}} = a.$$

Für den Winkel ϑ ergab sich schließlich

$$\cos \frac{1}{2} \vartheta = \frac{T \sqrt{\frac{1}{s}}}{t}.$$

Folgende kleine Tabelle enthält die von Quincke aus den Steighöhen kapillaren Röhren abgeleiteten Konstanten a , sowie die aus Beobachtungen Tropfen sich ergebenden Werte von a und ϑ .

Die Beobachtung der Steighöhen geschah bei einer Temperatur von 20°, an Tropfen bei etwa 25° C.

Substanzen	Kapillaritätskonstanten a und ϑ aus			
	Steighöhen $a = \sqrt{h \cdot r}$	Beobachtungen an Blasen		
		$a = t$	$T \sqrt{\frac{1}{s}}$	ϑ
ung von unterschwflgs.				
atron in Wasser . . .	3,684	3,748	3,670	23° 20'
sser	3,804	3,062	3,834	25° 32'
wefelkohlenstoff . . .	2,296	4,270	2,185	32° 16'
enöl	2,675	2,868	2,817	21° 50'
entinöl	2,497	2,615	2,475	37° 44'
roform	1,916	—	—	—
nöl	2,536	2,850	2,705	36° 20'
hol	2,379	2,564	2,503	25° 12'

Für die Kapillaritätskonstanten $\alpha = \frac{1}{2} a^2 \cdot s$ ergeben sich daraus folgende:

Substanzen.	Dichte s	aus Steighöhen α_1 Milligr.	aus Blasen α Milligr.	$\alpha \cos \vartheta$
erschwefflgs. Natron . .	1,1248	7,636	7,903	7,256
sser	1	7,235	8,253	7,449
wefelkohlenstoff . . .	1,2678	3,343	3,274	2,768
enöl	0,9136	3,271	3,760	3,490
entinöl	0,8867	2,765	3,033	2,398
roform	1,4878	2,733	—	—
inöl	0,7977	2,566	3,233	2,604
hol	0,7906	2,273	2,599	2,352

Wie man sieht, stimmen außer für Schwefelkohlenstoff und Terpentinöl Zahlen der zweiten und letzten Kolumne ziemlich gut überein, ein is, daß man aus der Beobachtung kapillarer Steighöhen und unter

Voraussetzung $\vartheta = 0^\circ$ im allgemeinen zu kleine Werte der Konstante oder α erhält.

Die Abweichungen bei Schwefelkohlenstoff und Terpentinöl; Quincke einer chemischen Veränderung dieser Flüssigkeiten während Verlaufs der Versuche zuschreiben zu müssen.

In einer ausführlichen Untersuchung über den Randwinkel hat Quincke¹⁾ später denselben für eine Anzahl Flüssigkeiten und feste Körper direkt an Tropfen, welche er auf Flächen derselben auffallen ließ, gemessen. Bei ganz reinen Flächen, die indes nur schwierig und auf ganz kurze herzustellen sind, glaubt er aus seinen Versuchen schließen zu können, der Randwinkel benetzender Flüssigkeiten gleich Null sei. Für gewöhnlich hat der Randwinkel indes größere, bei derselben Flüssigkeit und verschiedenen festen Körpern sowohl als bei demselben festen Körper und verschiedenen Flüssigkeiten verschiedene, von 0 verschiedene Werte. Quincke nimmt an, daß die feste Oberfläche mit einer unmerklich dünnen Schicht einer andern Substanz, etwa adhärierenden Gases, überzogen sei, Dicke kleiner als der Radius der Wirkungssphäre der Moleküle sei. Die Dicke dieser Schicht hat auf die Größe des Randwinkels Einfluß. Man findet man bei derselben Flüssigkeit, wie Wasser, Alkohol auf dem festen Körper verschiedene Randwinkel. So erhielt er mit Wasser reinen Oberflächen, je nachdem er 2 Minuten oder 10 Minuten nach Einstellung der reinen Oberfläche wartete, ehe er die Tropfen auftrug folgende Werte von ϑ :

	nach 2 Minuten	nach 10 Minuten
Platin	$10^\circ 43'$	$18^\circ 13'$
Gold	$4^\circ 16'$	$8^\circ 18'$
Silber	$11^\circ 32'$	$17^\circ 58'$

In folgender Tabelle sind eine Anzahl von Kapillaritätskonstanten oder vielmehr $\alpha \cdot \cos \vartheta$ zusammengestellt; die Beobachtungen von Br. Hagen, Frankenheim, Mendéléeff und Bède sind mit Kapillarröhren gestellt und in der vorhin angegebenen Weise aus der Steighöhe berechnet.

Die angegebenen Konstanten gelten nur für die neben jeder angegebenen Temperaturen, indem dieselben mit steigender Temperatur beträchtlich nehmen. Die Abhängigkeit der Kapillaritätskonstanten von der Temperatur ist besonders von Brunner²⁾ untersucht und für Wasser, Äther und Öl bestimmt worden. Für die Steighöhen in einer Röhre von 1^{mm} findet Brunner

Wasser	15,332 15	—	0,028 639 6 u
Äther	5,353 6	—	0,028 102 u
Olivöl	7,464 0	—	0,010 486 u ,

worin u die Temperatur in Graden des hunderttheiligen Thermometers deutet.

¹⁾ Quincke, Wiedem. Ann. Bd. II.

²⁾ Brunner, Poggend. Ann. Bd. LXX.

Tabelle von Kapillaritätskonstanten α .

Flüssigkeit	Specif. Gew.	α in Milligr.	Temp.	Beobachter
ser	1,000	7,666	0°	Brunner
.	"	7,558	—	Hagen ¹⁾
vefelsäure	1,849	6,333	14°,5	Frankenheim
.	1,522	7,610	17°,5	"
.	1,127	7,556	"	"
säure	1,153	7,149	"	"
etersäure	1,500	4,275	16°,0	"
.	1,271	6,768	19°,0	"
.	1,117	7,098	"	"
ing v. Kochsalz . .	1,200	8,400	"	"
„ Kalisalpeter . .	1,137	7,276	"	"
„ Natronsalp. . .	1,373	8,512	"	"
alkohol	0,7933	2,325	18°—24°	Wilhelmy
orig. Weingeist . .	0,810	2,361	17°	Frankenheim
.	0,895	2,775	"	"
.	0,967	3,727	"	"
alkohol	0,8181	2,427	18°—24°	Wilhelmy
.	"	2,445	"	Mendéléeff
.	"	2,426	"	Bède
r.	0,725	1,815	"	Wilhelmy
.	"	1,737	20°	Brunner
.	"	1,796	—	Mendéléeff
.	"	1,892	—	Bède
on	0,8124	2,581	18°—24°	Wilhelmy
gsäure	1,0511	2,973	"	"
gs. Äthyl	0,8814	2,564	"	"

Quincke hat ferner durch Messung von Tropfen die Kapillaritätskonstanten des Quecksilbers untersucht²⁾. Dabei ergab sich, wie schon aus ühern schwankenden Angaben zu schliessen war, daß der Winkel Θ , Quecksilber mit einer reinen Glasfläche bildet, mit der Zeit sehr variabel in einem und demselben Tropfen erhielt er gleich nach dem Aufsteigen 37° 17', nach 8,5 Stunden 42° 22' und nach 21 Stunden 47°. Später (er³⁾ für flache Quecksilbertropfen auf reinen Spiegelglasplatten möglichst rasch nach dem Auflegen im Mittel aus 8 Beobachtungen bei 20° C.

$$T = 3^{\text{mm}},629 \quad t = 2^{\text{mm}},850$$

daraus, die Dichte s des Quecksilbers gleich 13,5432 gesetzt,

$$\Theta = 51^{\circ} 8' \quad \alpha = 55^{\text{mgr}},03.$$

In sehr ausgedehnter Weise hat Quincke die Kapillaritätskonstanten verschiedener Substanzen, geschmolzener Salze und Metalle untersucht⁴⁾.

¹⁾ Hagen, Abhandl. der Berl. Akademie 1845.

²⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CV.

³⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

⁴⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXIV. Bd. CXXXV. Bd. CXXXVIII.

Er bestimmte zu dem Zwecke entweder das Gewicht von Tropfen, welche von den Drähten der betreffenden Metalle, deren Enden in der Flamme eines Lötrohrs geschmolzen wurden, oder welche aus engen Glasröhren, in denen die Substanzen geschmolzen wurden, herabfielen, oder er goß die geschmolzenen Substanzen auf horizontalen Unterlagen aus, welche von den Substanzen nicht benetzt wurden. In letzterem Falle bildeten die Substanzen Tropfen, welche auch nach dem Erstarren dieselbe Gestalt behielten, die sie flüssig im Momente des Erstarrens besessen hatten. Die Gestalt dieser Tropfen war somit bedingt durch die Oberflächenspannung bei der Schmelztemperatur, und der Abstand der Tropfenkuppe von dem Schnitte, wo der Tropfen seinen größten Durchmesser hatte, lieferte bei großen Tropfen sofort die Konstante a .

Für das Quadrat dieser Konstanten $a^2 = \frac{H}{s}$, also den Quotienten aus der Oberflächenspannung und der Dichte der betreffenden Substanz, welchen Quincke den Namen der spezifischen Kohäsion beilegt, ergibt sich aus diesen Versuchen das interessante Resultat, daß dieselbe für alle untersuchten Körper sich als ein einfaches Vielfaches der Zahl 4,3 darstellen ließe, mit Abweichungen nur, welche innerhalb der Grenze der bei diesen Versuchen unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen. Die spezifische Kohäsion des Wassers bei 0° ist $17,58 = 4 \cdot 4,3 + 0,38$; entsprechende Werte haben von den Metallen Platin, Gold, Silber, Cadmium, Zinn, Kupfer. Die spezifische Kohäsion des Quecksilbers gibt Quincke zu $8,65 = 2 \cdot 4,3$ an; fast genau gleiche Werte zeigen Blei, Wismuth und Antimon; eine dreimal so große spezifische Kohäsion zeigen Zink und wahrscheinlich auch Eisen und Palladium; für Zink ergab sich der Wert $a^2 = 25,41$, für Palladium 25,26, für einen Gußeisentropfen 25,81, für einen zweiten Gußeisentropfen 27,14. Für Natrium fand sich der Wert sechsmal so groß als für Quecksilber, nämlich $a^2 = 52,97$.

Für geschmolzene chemische Verbindungen ergab sich der Satz: Geschmolzene Substanzen von ähnlicher chemischer Zusammensetzung haben dieselbe spezifische Kohäsion bei einer Temperatur, die ihrem Schmelzpunkte möglichst nahe liegt.

Kohlensäure und schwefelsäure (wahrscheinlich auch phosphorsaure) Salze zeigen im geschmolzenen Zustande dieselbe spezifische Kohäsion wie das Wasser.

Salpetersäure Salze, Chlormetalle, Zuckerarten und Fette zeigen dieselbe spezifische Kohäsion wie das Quecksilber.

Brom- und Jod-Metalle, sowie Selen, Brom, Schwefel und Phosphor zeigen eine halb so große spezifische Kohäsion wie das Quecksilber.

In wie weit die von Quincke direkt beobachteten Zahlen mit diesen Sätzen übereinstimmen, möge an folgender Reihe angedeutet werden, welche die Werte a^2 für die untersuchten Nitrate und Chloride angibt.

Natriumnitrat	$a^2 = 8,55$	Kaliumchlorid	$a^2 = 9,49$
Kaliumnitrat	8,35	Strontiumchlorid	8,18
—	—	Bariumchlorid	8,29
Lithiumchlorid	8,53	Silberchlorid	8,18.
Natriumchlorid	8,41		
Kaliumchlorid	8,76		

Wie man sieht, weichen diese Zahlen nur wenig von dem für Quecksilber gefundenen Werte 8,6 ab.

Auch in Lösungen fand Quincke¹⁾ für manche Salze eine einfache Beziehung zwischen den Kapillaritätskonstanten und den gelösten Salzen. Anders für Lösungen von Chloriden in Wasser und Alkohol ergab sich, äquivalente Mengen zu derselben Menge Lösungsmittel gebracht, nahezu Lösungen von gleichen Kapillaritätskonstanten liefern. Ebenso erhielt Duclaux²⁾ für Lösungen verschiedener Alkohole und Säuren der Fettsäuren interessante Beziehungen für die Oberflächenspannung, durch welche annähernd den Gehalt an Säure in einer Lösung bestimmen zu können abt.

§ 77.

Größe der Wirkungssphäre der Molekularkräfte. Wir haben in den Versuchen von Wilhelmy im vorigen Paragraph das Resultat erhalten, daß die gefundenen Werte von α nicht nur von der Substanz des eingetauchten festen Körpers, sondern auch bei einer und derselben Substanz von der Form des eingetauchten festen Körpers abhängig sei; die Werte waren für eingetauchte Platten andere als für eingetauchte Cylinder und für diese verschieden je nach dem Durchmesser des Cylinders.

Diese allerdings später bestrittene Erfahrung muß an der ersten Grundannahme von La Place über die Wirkung der Molekularkräfte eine Modifikation anbringen, an der Annahme nämlich, daß die molekularen Kräfte nur für uns unmeßbare Entfernungen hin wirken, sie müssen in endlichen Entfernungen wirken. Würden nämlich die Molekularkräfte nur auf unmeßbar kleine Entfernungen wirken, so würde eine gekrümmte Oberfläche eines eingetauchten festen Körpers an jedem Punkte so wirken, wie die an dieselbe getangierende Ebene, mit welcher sie auf unendlich kleinem Abstände zusammenfällt, die Wirkung einer gekrümmten Oberfläche müßte also jener Ebenen ganz gleich sein. Es fragt sich daher, ob sich die Entfernung, auf welche die Molekularkräfte wirken, oder der Radius der Wirkungssphäre der Moleküle nicht messen läßt.

Der erste, der eine solche Messung versuchte, war Plateau³⁾. Er begabte zu diesem Zwecke Seifenblasen, welche aus der von ihm angegebenen Mischung dargestellt eine sehr große Dauer haben. Zur Darstellung dieser Mischung löst man 1 Gewichtsteil Marseiller Seife, die vorher in dünne Scheiben geschnitten ist, bei gelinder Wärme in 40 Teilen destillierten Wassers und filtriert die Lösung, wenn sie erkaltet ist. Hierauf mischt man sorgfältig in einer Flasche durch starkes und anhaltendes Schütteln 1 Volumen Glycerin mit 3 Volumen der Lösung und läßt stehen. Das im Momente der Bildung klare Gemenge trübt sich nach einigen Stunden; es entsteht ein leichter weißer Niederschlag, welcher mit ungemeiner Langsamkeit steigt und nach mehreren Tagen eine im obern Teil der Flüssigkeit scharf abgeschnittene Schicht bildet. Man zieht dann mit einem Heber die klare Flüssigkeit ab, die man zu den Versuchen benutzt.

¹⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CLX. Man sehe auch Buliginisky Poggend. Ann. Bd. CXXXIV.

²⁾ Duclaux, Ann. de chim. et de phys. 5. Série. T. XIII.

³⁾ Plateau, Mémoires de l'Acad. de Bruxelles T. XXXIII. Poggend. Ann. Bd. CXIV.

Blasen aus dieser Flüssigkeit gebildet halten sich in freier Luft stundenlang, und wenn man sie mit einer Glocke bedeckt, tagelang. Im § 71 erwähnten wir schon, daß die Blase auf die in ihr eingeschlossene Luft einen gewissen Druck ausübt, den man daran erkennt, daß die Luft aus der Blase entweicht, wenn das Röhrchen, durch welches man die Blase gebildet hat, nicht verschlossen wird. Es gelang Plateau, diesen Druck zu messen, indem er derartige Blasen an der Mündung eines kleinen umgekehrten Trichters erzeugte, der mit einem Wassermanometer kommunizierte. Die Größe dieses Druckes haben wir damals abgeleitet. Ist R der Radius der kugelförmigen Blase, so ist der auf der äußern Fläche gegen das Innere der Blase gerichtete Normaldruck

$$P = K + H \frac{1}{R}.$$

Da die Haut der Blase gegen den Radius nur eine sehr kleine Dicke hat, so können wir ohne merklichen Fehler auch den Radius der innern Fläche der Blasenhaut gleich R setzen. Dann ist der auf die Innenfläche der Blase gegen das Innere der Haut, also von dem Centrum der Kugel fortgerichtete Normaldruck

$$P_1 = K - H \frac{1}{R}.$$

Der Druck, welchen die Blasenhaut auf die eingeschlossene Luft ausübt, ist die Differenz dieser beiden Drucke, somit ist derselbe

$$p = P - P_1 = 2H \cdot \frac{1}{R}.$$

$$p \cdot R = 2H.$$

Es ist somit das Produkt aus dem Radius der Blase und dem auf die Flächeneinheit wirkenden Drucke gleich der doppelten Konstanten H . Bezeichnen wir mit h die Steighöhe der Blasenflüssigkeit in einer Röhre von 1^{mm} Durchmesser, deren Wände von der Flüssigkeit vollkommen benetzt werden, so ist nach § 74

$$h \cdot s = 2H,$$

wenn s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit bedeutet; es ist somit

$$p \cdot R = h \cdot s,$$

eine Relation, welche Plateau auch bei seinen Versuchen bestätigt fand.

Nun macht Plateau darauf aufmerksam, daß diese Relation nur so lange ihre Gültigkeit habe, als die Dicke der Blasenhaut wenigstens gleich ist dem doppelten Radius der Wirkungssphäre der Moleküle, indem die beiden für P und P_1 abgeleiteten Ausdrücke für die Oberfläche einer flüssigen Masse gelten, bei der also sämtliche innerhalb des Radius der Wirkungssphäre liegenden Moleküle auf die in der Oberfläche liegenden Teilchen ihre Wirkung ausüben.

Bei einer sich mehrere Tage haltenden Blase, welche durch Verdunstung und allmähliches Herabrinnen der Flüssigkeit zur Ansatzstelle der Blase nach und nach dünner wurde, liefs sich nun eine Verminderung des Druckes bis zu dem Momente, in welchem die Blase zersprang, nicht erkennen, so daß die Dicke der Blase bis zu diesem Momente nicht kleiner war als der doppelte Radius der Wirkungssphäre der Moleküle. Die Dicke der Blase

gab sich nach einer optischen, im zweiten Bande zu besprechenden Methode, an der Farbe der Blase¹⁾, zu $0^{\text{mm}},000\ 113\ 5$. Daraus folgt dann, daß der Radius der Wirkungssphäre den Wert von $0^{\text{mm}},000\ 056\ 7$ nicht überschreitet. Nimmt man an, daß die Blase nicht länger bestehen kann, als die Dicke der Haut gleich ist dem doppelten Radius der Wirkungssphäre, so würde etwa dies der Radius der Wirkungssphäre für die Molekularkräfte dieser Seifenlösung sein, ein zwar kleiner, aber wie man sieht noch wohl bestimmbarer Wert.

Quincke hat den Radius der Wirkungssphäre in anderer Weise direkt zu messen gesucht²⁾. Bringt man auf eine Glasplatte sehr dünne, keilförmige Schichten einer andern Substanz, so wird der Randwinkel einer Flüssigkeit an den verschiedenen Stellen verschieden sein, wenn die Dicke der keilförmigen Schicht nicht so groß ist als der Radius der Wirkungssphäre, er wird konstant erst von der Stelle der keilförmigen Schicht, von der ab ihre Dicke gleich dem Radius der Wirkungssphäre ist. Denn der Randwinkel hängt, wie wir sahen, ab von dem Verhältnis der Adhäsion der Flüssigkeit an den festen Körper zur Kohäsion der Flüssigkeit. Ist demnach die Adhäsion der Flüssigkeit an das Glas eine andere, als an die auf das Glas gebrachte Schicht, was immer dann der Fall sein wird, wenn die Flüssigkeit die beiden Substanzen nicht vollkommen benetzt, so muß, solange die Schicht eine so kleine Dicke hat, daß das Glas noch durch sie durchwirkt, der Randwinkel ein anderer sein als dort, wo der Abstand der Flüssigkeit vom Glase gleich oder größer ist als der Radius der Wirkungssphäre.

Derartige keilförmige Schichten lassen sich auf Glas sehr gut durch Ätzen erzeugen³⁾, indem man auf eine Glasplatte eine an verschiedenen Stellen verschieden dicke Schicht einer Versilberungsflüssigkeit bringt. Quincke brachte zwischen eine ebene Glasplatte und darauf gelegte Cylinderröhren von Spiegelglas, welche einen Radius von 120^{mm} besaßen, Martinsche Versilberungsflüssigkeit, aus welcher dann eine doppelt keilförmige Silberlamelle sich absetzte, welche in der Mitte, dort wo die Cylinderoberfläche die Röhre berührte, am dünnsten war. Zwei solcher Platten wurden vorsichtig ausgespült, dann durch dünne Glasplättchen getrennt mit den versilberten Flächen einander gegenübergestellt, so daß etwa gleich dicke Schichten übereinander gegenüberlagen. Eine schwache Metallfeder drückte die beiden Platten gegen einander. Dieselben wurden dann in einen Trog mit destilliertem Wasser so aufgestellt, daß die Schneiden der Silberkeile vertikal standen. Das Wasser erhob sich in dem kapillaren Raum zwischen den parallelen Silberlamellen bis zu einer Höhe h , welche an der dünnsten Stelle des Silbers am höchsten war, und immer kleiner wurde, je dicker das Silber wurde. Da der Abstand d der Platten überall der gleiche war, so folgt aus der Gleichung für die Steighöhe zwischen den Platten

$$h = \frac{H}{s} \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{d} = a^2 \cdot \cos \vartheta \cdot \frac{1}{d},$$

daß mit zunehmender Silberdicke der Winkel ϑ immer größer wird.

¹⁾ Man sehe im 2. Band: „Farbe dünner Blättchen“.

²⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXVII.

³⁾ Man sehe darüber Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX. p. 44 W.

Folgende Tabelle enthält eine Beobachtungsreihe von Quincke. Die Dicke der Silberschicht wurde nach einer optischen Methode, wie sie von Plateau benutzt wurde, bestimmt. Die Winkel ϑ sind aus der Gleichung

$$\cos \vartheta = \frac{hd}{a^2}$$

abgeleitet, in der Quincke a^2 , die spezifische Kohäsion des Wassers gleich einsetzte. Die mit x überschriebene Kolumne gibt die Abstände der Stellen, denen die Steighöhe h entspricht von der dünnsten Stelle der Silberschicht. ε ist die Dicke der Silberschicht.

$$d = 0^{\text{mm}},633$$

x	ε	h	ϑ
mm	mm	mm	
0	0,000 004 0	13,74	54° 33'
1	0,000 005 2	13,58	55° 2'
2	0,000 008 0	13,33	55° 44'
3	0,000 013 0	13,10	56° 26'
4	0,000 014 2	12,82	57° 15'
5	0,000 020 0	11,92	59° 48'
6,5	0,000 028 4	9,73	65° 38'

Man sieht, wie h mit wachsender Silberschicht ganz beträchtlich nimmt. Diese Abnahme dauerte selbst an den dicksten Stellen der Silberschichten, die noch durchsichtig waren, fort, Stellen, welche eine Dicke zu $0^{\text{mm}},000\,054\,2$ besaßen, so daß der Radius der Wirkungssphäre des Glas-Silber-Wasser noch etwas größer anzunehmen ist.

Mit Quecksilber kann man ähnliche Beobachtungen machen, indem man die Silberschicht durch Behandeln mit Schwefelwasserstoff in Quecksilber überführt, und dann direkt durch Spiegelung die Stelle aufsucht, unter welchem der Winkel, den die vertikale Wand des Quecksilbers mit der vertikalen Wand des Wassers schneidet, konstant wird, oder wo die Depression des Quecksilbers an der vertikalen Wand einen konstanten Wert erhält. Derartige Versuche ließen Quincke für den Radius der Wirkungssphäre den Wert $0^{\text{mm}},000\,059$ konstant werden. Als die Glasplatte mit einer Kollodiumschicht überzogen war, fand sich die Dicke der Schicht, wo der Randwinkel des Quecksilbers konstant wurde, kleiner als $0^{\text{mm}},000\,059$. Eine genauere Bestimmung war in diesem Falle wegen des optischen Verhaltens der Kollodiumschicht nicht möglich.

Wenn man nach diesen Methoden wegen der Schwierigkeit, die flächenbeschaffenheit der festen Körper an allen Stellen genau gleich zu erhalten, keine absolut genauen Messungen des Radius der Wirkungssphäre erwarten kann, so beweisen diese Versuche doch, daß man mit großer Annäherung diesen Radius 50 Milliontheilen eines Millimeter gleich setzen darf, eine zwar kleine, aber sehr wohl meßbare GröÙe. Wir müssen also die Annahme fallen lassen, daß die Molekularkräfte auf nur unmerklich kleine Entfernungen wirken.

§ 78.

Bewegungen infolge von Kapillarwirkung. Durch die bisher betrachteten Gesetze der Oberflächenspannung erklären sich eine Anzahl auffällender Erscheinungen, von denen wir einige Bewegungserscheinungen ableiten wollen.

Wenn man zwischen zwei unter einem spitzen Winkel zusammenstossende Platten oder in ein konisches Glasröhrchen einen Flüssigkeitstropfen bringt, so sieht man, daß der Tropfen sich gegen den Scheitel des Winkels hinbewegt; ein die Röhrenwände nicht benetzender Tropfen dagegen bewegt sich von dem Scheitel des Winkels oder der Spitze der Röhre fort. Diese Bewegung erklärt sich unmittelbar aus den vorhin erkannten Gesetzen der Oberflächenspannung. Die Begrenzungsflächen der Flüssigkeit sind in dem ersten Falle konkav; an der engern Seite der Röhre (Fig. 116), oder gegen den Scheitel des Winkels hin ist wegen des kleinern Abstandes der Wände die Krümmung der Oberfläche stärker als an der entgegengesetzten Seite. Deshalb ist der Druck gegen das Innere der Flüssigkeit an der weiten Stelle der Röhre stärker und diesem Drucke folgend muß sich der Tropfen gegen das engere Ende der Röhre hin bewegen.

Fig. 116.



Fig. 117.



Umgekehrt ist es im zweiten Falle (Fig. 117); die Oberfläche ist dann konvex, die Krümmung an der engen Seite, und damit der gegen das Innere der Flüssigkeit gerichtete Druck von dieser Seite her stärker. Der Tropfen muß sich daher gegen das weitere Ende der Röhre hin bewegen.

Fig. 118.

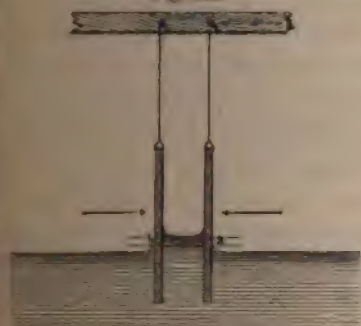


Fig. 119.



Wenn man zwei parallele ebene Platten mit ihren unteren Enden in eine Flüssigkeit vertikal eintaucht, so bemerkt man, daß diese Platten sich einander nähern streben, sowohl, wenn die Wände benetzt werden, die Flüssigkeit also zwischen den Platten steigt (Fig. 118), als auch, wenn die Wände nicht benetzt werden, die Flüssigkeit zwischen den Platten tiefer steht als außerhalb (Fig. 119). La Place¹⁾ erklärt diese Erscheinung folgendermaßen. Da die Flüssigkeitssäulen zwischen den Platten und außerhalb

¹⁾ La Place, Théorie etc. Gilbert, Annalen Bd. XXXIII. p. 293.

im Gleichgewicht sind, so ist der Druck auf die Platten unterhalb a von allen Seiten gleich, nicht aber so oberhalb a z. B. in b . In dem Punkte b wird die Platte nach innen gedrückt durch den Druck der Luft, den wir mit P bezeichnen wollen, nach außen jedoch durch den Seitendruck der über b liegenden Flüssigkeitssäule, welcher gleich ist dem senkrechten Drucke, den ein Punkt in der durch b gelegten Horizontalebene erfährt. Dieser Druck setzt sich zusammen aus dem vertikal abwärtsgehenden Drucke der Atmosphäre, dem Gewichte der Flüssigkeitssäule über b und dem vertikal aufwärts gehenden Drucke der Differenz der Oberflächenspannung $\frac{1}{2} \frac{H}{\rho}$ zwischen und außerhalb der Platten, welche das Steigen der Flüssigkeit zwischen den Platten bewirkte; er ist also $P + g - \frac{H}{2\rho}$, wenn wir mit g das Gewicht der Flüssigkeit über b bezeichnen. Nun ist aber $\frac{H}{2\rho}$ gleich dem Gewichte der ganzen gehobenen Flüssigkeitssäule, demnach $\frac{H}{2\rho} > g$ und $g - \frac{H}{2\rho} < 0 = -cP$, wenn wir mit c eine Konstante bezeichnen, welche kleiner als 1 ist. Die Platte wird somit durch einen Druck P nach innen und durch einen Druck $P(1 - c)$ nach außen getrieben, also durch den Überschufs

$$P - P(1 - c) = Pc$$

nach innen getrieben. Gleiches gilt von der zweiten, der ersten genäherten Platte, so daß also die Platten mit einer Kraft $2Pc$ gegen einander getrieben werden.

Dasselbe ist in der Anordnung Fig. 119 der Fall. Durch eine ganz ähnliche Entwicklung erhält man, daß die über a liegenden Punkte durch die außerhalb höher stehende Flüssigkeit einen nach innen gerichteten Druck erfahren. Unterhalb a sind die Drucke nach innen und außen gleich, da die Flüssigkeiten innerhalb und außerhalb der Platten im Gleichgewicht sind; bei b aber wirkt nach außen der Druck der Luft, nach innen der Seitendruck der Flüssigkeit, welcher gleich ist dem Drucke der Luft, vermehrt um das Gewicht der über b vorhandenen Flüssigkeitsschicht, der letztere Teil des Seitendruckes muß demnach die Platten gegen einander drücken.

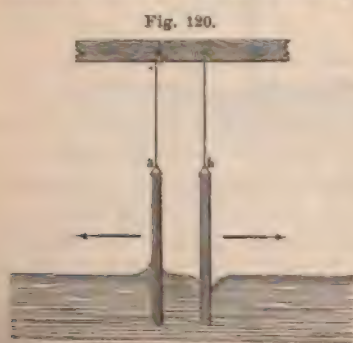


Fig. 120.

Wäre der nach innen und außen gleich wirkende Druck P der Luft auch nicht vorhanden, so bleibt doch in beiden Fällen der nach innen gerichtete Druck übrig, nur daß wir ihn im ersten Falle nicht als den Überschufs des äußern über den innern Druck auffassen müßten, sondern als die Anziehung zwischen Wand und Flüssigkeit, welche eben den von innen nach außen wirkenden Druck in unserer vorigen Betrachtungsweise vermindert.

Wenn die eine der Platten von der Flüssigkeit benetzt wird, die andere nicht, so steigt die Flüssigkeit an der einen Platte, während sie an der andern nicht, wie in Fig. 120; man beobachtet dann eine Abstößung.

ese läßt sich aus denselben Principien ableiten. An der benetzenden Platte a muß dann die Flüssigkeit außerhalb höher ansteigen als im Zwischenräume der beiden Platten, weil die Flüssigkeit außen so hoch liegen muß, daß die durch die konkave Krümmung verminderte Oberflächenspannung durch die gehobene Flüssigkeit äquilibriert wird. Im Innern dagegen zwischen a und b ist die Oberfläche der Flüssigkeit doppelt gekrümmt, indem die Flüssigkeit an a sich konkav, an b aber convex anlegt. Die Oberflächenspannung wird daher in der einen Hälfte der Flüssigkeit zwar vermindert, in der andern gegen b liegenden dagegen verstärkt, und deshalb ist die Verminderung an a nicht so groß wie außerhalb; die Flüssigkeit kann also im Innern an a nicht so hoch steigen. Aus dem Grunde muß sie an b außen eine stärkere Depression erhalten als zwischen den Platten.

Aus dieser Gruppierung ergibt sich dann nach der Entwicklung der beiden vorigen Fälle, daß sowohl a als auch b einen Antrieb von innen nach außen erfährt, die Platten müssen sich also von einander entfernen.

Eine genauere Untersuchung der gekrümmten, zwischen den Platten vorhandenen Oberfläche der Flüssigkeit hat La Place zu dem Resultate geführt, daß bei sehr großer Annäherung der Platten die Abstoßung in eine Anziehung übergeht, ein Resultat, das Versuche von Hauy¹⁾ bestätigen.

§ 79.

Ausbreitung von Flüssigkeiten auf festen Körpern. Auflösung. In § 72 bei Ableitung der Beziehung, welche die Größe des Randwinkels bestimmt, erwähnten wir, daß in zwei Fällen sich ein Gleichgewichtszustand nicht herstellen könne. Wir nannten die Summe der der Wandfläche parallelen Komponenten der wirksamen Kräfte F_2 , und rechneten dieselben positiv, wenn sie von der Flüssigkeit fortgerichtet sind; die Summe der der Oberfläche der Flüssigkeit parallelen Komponenten bezeichneten wir mit F_1 . Von dieser bemerkten wir schon damals, daß wir sie der Konstanten in dem Ausdrucke für die Oberflächenspannung, also der Kapillarkonstanten α proportional setzen konnten. Führen wir diese Bezeichnung ein, so ist der Ausdruck für den Randwinkel ϑ

$$\cos \vartheta = \frac{F_2}{\alpha}.$$

Der Winkel ϑ wird unmöglich, wenn $F_2 > \alpha$; in dem Falle kann also ein Gleichgewichtszustand nicht eintreten. Ja, wenn wir einen Tropfen auf einen festen Körper, etwa eine horizontale Platte legen, kann ein Gleichgewichtszustand schon dann nicht eintreten, wenn $F_2 = \alpha$, somit $\vartheta = 0$ wird. Denn wenn ein solcher Tropfen liegen bleibt, so ist immer der Winkel ϑ von Null verschieden. Es muß sich also der Tropfen auf der Platte ausbreiten und dieselbe mit einer dünnen flüssigen Schicht überziehen²⁾.

¹⁾ Hauy, a. a. O. Gilbert, Annalen Bd. XXXIII. p. 308.

²⁾ Man sehe Quincke, Wiedem. Ann. Bd. II. Auf die genauere Untersuchung der Ausbreitungsphänomene, speciell auf die Verdrängung einer Flüssigkeit durch eine andere und die Beziehung dieser Erscheinungen zu den Kapillarkonstanten können wir hier nicht eingehen.

In der That ist das auch der Fall, reine Flächen werden von sie vollkommen benetzenden Flüssigkeiten überzogen, wenn man einen Tropfen der letztern auf sie bringt, es tritt eine Ausbreitung der Flüssigkeiten auf den festen Körpern ein. Der bereits § 77 erwähnte Schluss von Quincke, daß der Randwinkel der freien Oberfläche verschiedener Flüssigkeiten wie Wasser, Alkohol u. s. w., und wässeriger oder alkoholischer Salzlösungen gegen vollkommen reine Glas-, Krystall- oder Metallflächen Null zu sein scheine, beruht eben darauf, daß die Flüssigkeiten sich auf den reinen festen Oberflächen ausbreiten.

Als zweiten Fall, bei welchem sich kein Gleichgewichtszustand herstellen kann, bezeichnen wir den, daß die Summe der bei der damaligen Zerlegung sich ergebenden zur Wand senkrechten Kräfte von der Wand fort gerichtet sei. Das ist nur bei einer solchen Lockerung der Moleküle, welche in die Flüssigkeit eintauchen möglich, daß dadurch die Kohäsion des festen Körpers aufgehoben wird. Es tritt deshalb in dem Falle eine Trennung der Moleküle des festen Körpers und eine Vermischung derselben mit denjenigen des flüssigen Körpers ein, wir beobachten die Auflösung des festen Körpers. Wenn man ein Salz in Wasser bringt, so zerteilt es sich und verbreitet sich in der Flüssigkeit, so daß nach einiger Zeit die ganze Flüssigkeit Salzteilchen enthält, welche durch die Anziehung des Wassers zu den Salzteilchen in dem Wasser der Schwere entgegen gehoben und verbreitet werden.

Die Auflösung eines Körpers in einer Flüssigkeit wird vielfach als eine chemische Verbindung angesehen; von den eigentlichen chemischen Verbindungen unterscheidet sie sich jedoch dadurch, daß sie nicht wie diese nach festen Verhältnissen vor sich geht. Im Gegenteil, eine Flüssigkeit kann einen in ihr löslichen Körper in allen Verhältnissen bis zu einer gewissen, bei konstanter Temperatur festen Grenze aufnehmen. Jene Grenze nennt man die Löslichkeitsgrenze.

Bei der Lösung eines Salzes in Wasser zeigt sich die Anziehung der Salz- und Wasserteilchen überdies in der sogenannten Kontraktion der Salzlösungen. Das Volumen der hergestellten Lösung ist nämlich mit wenigen Ausnahmen kleiner als die Summe der Volumina der einzelnen Bestandteile. So ergab sich z. B. aus einigen mit Salpeterlösungen von mir angestellten Versuchen bei einer 8procentigen Lösung eine Kontraktion von 0,8 Procent; eine Lösung von 21,522 Kubikcentimeter ($44,293^{\text{cc}}$) in 554,077 Kubikcentimeter Wasser von 20°C . ergab nicht 575,599 Kubikcentimeter Lösung, sondern nur 570,838, so daß also das entstandene Volumen der Lösung um 4,762 Kubikcentimeter kleiner war als die Summe der ursprünglichen Volumina.

Die genauern Gesetze dieser Kontraktion sind noch nicht bekannt.

§ 80.

Mischung und Schichtung der Flüssigkeiten; Plateaus Versuche

Wenn man zwei Flüssigkeiten zusammenschüttet, so beobachtet man, daß ebenso, wie die anziehenden Wirkungen der flüssigen Körper auf die festen verschieden sind, so auch die der flüssigen Körper unter einander. Man bemerkt nämlich entweder, daß die Flüssigkeiten, wenn sie verschiedene

sches Gewicht haben, einfach sich über einander lagern ihrer Schwere halber, oder daß die Flüssigkeiten sich mischen, daß die eine die andere vollständig durchdringt, und so die schwerere in der leichtern gehoben und verdrängt und die leichtere in die schwerere hinabgezogen wird. So mischen sich z. B. Wasser und Weingeist in allen Verhältnissen, während Wasser und Öl sich nicht mischen, sondern ihrer Schwere gemäß sich über einander lagern.

Ein Flüssigkeitsgemische ist eine ganz homogene Flüssigkeit, deren Bestandteile sich nicht durch mechanische Mittel, sondern nur durch eine Veränderung des Aggregatzustandes von einander trennen. Das unterscheidet sich ein Gemisch wesentlich von einem Gemenge, wie es herstellen kann, wenn man zwei Flüssigkeiten gleichen spezifischen Gewichtes in einem Gefäße zusammengießt und stark schüttelt.

Bei der Mischung zweier Flüssigkeiten zeigt sich in den meisten Fällen eine Kontraktion des Gemisches, indem das Volumen der Mischung geringer und somit seine Dichtigkeit größer ist als die Summe der Volumina der Bestandteile und deren mittlere Dichtigkeit. Am genauesten ist die Kontraktion der Mischungen bei den Gemischen aus Alkohol und Wasser untersucht, wir haben einige Zahlen bei der Betrachtung der Alkoholo-Verbindungen angegeben.

Wenn man zwei Flüssigkeiten gleichen spezifischen Gewichtes zusammengießt, die sich nicht mischen, so z. B. Öl in ein Gemische aus Alkohol und Wasser bringt, so beobachtet man, daß sich die Flüssigkeiten nicht in regelmäßiger Weise durch einander lagern, sondern daß die eine in der andern, so das Öl in dem Gemische in der Gestalt kugelförmiger Tropfen schwimmt.

Es folgt dieses mit Notwendigkeit aus den in den vorigen Paragraphen enthaltenen Lehren über die Oberflächenspannung. Denn dadurch, daß das Öl in dem Alkohol schwimmt, ist es ganz ohne Schwere; die Gleichgewichtsgestalt, in welcher es sich ansammelt, wird daher nur durch die gleichen Molekularkräfte bedingt. Dieselben sind die Anziehung des Alkohols auf das Öl und die Wirkung des Öles auf sich selbst, von denen die Kohäsion des Öles die Anziehung des Alkohols bedeutend überwiegt, woraus hervorgeht, daß sich die Flüssigkeiten nicht mischen. Demzufolge das Öl eine solche Gestalt annehmen, daß die Oberflächenspannung an allen Punkten dieselbe ist. Wir hatten für dieselbe allgemein

$$P = K \pm \frac{H'}{2} \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right),$$

wir mit H' die Oberflächenspannung des im Alkohol schwimmenden Öls bezeichnen, welche eben wegen der Anziehung des Alkohols auf das Öl kleiner ist als in einer freien nur von Luft begrenzten Oberfläche (S. 1).

Dieser Ausdruck ist nur dann konstant, wenn die Summe

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \text{const.},$$

¹⁾ Über die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

also die Summe der reciproken Werte der Hauptkrümmungsradien in den Punkten der Oberfläche dieselbe ist. Das ist der Fall, wenn die Oberfläche eine Kugel ist.

Läßt man nun auf den gewichtslosen Tropfen noch andere Kräfte wirken, indem man ihn an feste Körper adhäreren macht, so kann er eine Reihe anderer Gestalten annehmen, für deren freie Oberfläche die allgemeine Bedingung bestehen bleiben muß $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \text{const.}$

Fig. 121.



Plateau¹⁾ hat über diese Erscheinungen, welche Flüssigkeiten in einer andern von gleichem spezifischen Gewichte schwimmen können, vielfache Versuche angestellt. Um die Kräfte, welche Flüssigkeiten gleichen spezifischen Gewichtes herzuwirken, wandte er ein Gemisch aus Alkohol und Wasser an, welches das gleiche spezifische Gewicht hatte als das Öl, so daß also ein Öltropfen an jeder Stelle dieses Gemisches im indifferenten Gleichgewicht schwimmt.

Die Versuche wurden in einem parallelepipedischen Glasgefäße (Fig. 121) angestellt, dessen Wände aus mehreren Glasscheiben bestehen, welche mit ihren Rändern zueinander gekittet sind. In der Deckplatte ist ein Hahn

angebracht, um die Flüssigkeiten abzulassen, und in der Deckplatte sind verschiedene Öffnungen, um die Flüssigkeiten und einige bei den Versuchen benutzte Apparate hineinzubringen. Nachdem der Kasten mit dem Weingeistgemische gefüllt ist, bringt man mittels einer kleinen Pipette, welche mit einem etwas gefärbten Öl, welches sich an dem Ende der Pipette ansammelt, ein großes Tropfen ansammelt. Zieht man dann die Pipette, nachdem man sie ab dem Finger verschlossen hat, vorsichtig

Fig. 122.



so bleibt der Tropfen in Form einer Kugel ruhig an seinem Platze, wie es die Theorie verlangt. Denn ist der Tropfen sich selbst überlassen, so daß nur die Oberflächenspannung auf ihn einwirkt, so muß er

¹⁾ Plateau, in verschiedenen Jahrgängen der *Bulletins de l'Académie des Sciences de Bruxelles*, daraus Poggend. Ann. Bd. LV, LVI. Ergänzungsband II. 1848. L.

an Stellen gleich sein, und das ist, wie wir sahen, der Fall, wenn die Spannung der Oberfläche an allen Stellen dieselbe ist.

Wenn man den Tropfen an gewissen Stellen mittels vorher mit Öl beschmierter Eisendrähte fixiert, so adhärirt der Tropfen an diesen und es wirkt dann auſser der Kohäsion des Öles die Adhäsion am Eisen. Die Gestalt der Oberflächen muſs demnach eine andere werden, indem an gewissen Stellen die Oberflächenspannung modificirt wird; für die freien Oberflächen muſs aber auch in diesem Falle $\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \text{const.}$ sein.

Legt man den Tropfen in einen Ring von Eisendraht, so nimmt er die Gestalt einer bikonvexen Linse an (Fig. 123), deren beide Flächen Kugelsegmente von gleichem Radius ϱ sind. Für die freien Oberflächen muſs dadurch die Bedingung erhalten.

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \text{const.} \text{ Wenn}$$

man den in dem Drahtringe ruhenden Tropfen vorsichtig abbläſt, bis er unten einen Drahtring berührt, so legt er sich auch an diesen an, und man kann dann den an dem Draht befestigten Drahtring aufziehen, während man den Tropfen nachfließen

läſst, so bleibt der Tropfen unten an dem Drahte haften, und zwischen den Drahten bildet sich ein vollkommener Kreiscylinder (Fig. 124), der oben und unten von Kugelsegmenten gleichen Radius begrenzt ist.

Der Krümmungsradius des Cylinders in einer durch die Axe parallel derselben geführten Ebene ist unendlich, da diese Ebene die Cylinderoberfläche in einer geraden Linie schneidet, deshalb ist

$$\frac{1}{\varrho'} = 0.$$

Der andere Krümmungsradius ist der Radius des Cylinders. Da die Oberflächenspannung an allen Punkten der freien Oberflächen gleich sein muſs, so muſs, wenn wir mit ϱ_1 den Radius der Kugelflächen bezeichnen,

$$K + \frac{H'}{2} \cdot \frac{1}{\varrho} = K + H' \cdot \frac{1}{\varrho_1},$$

$$\frac{1}{2\varrho} = \frac{1}{\varrho_1}; \quad \varrho_1 = 2\varrho;$$

muſs demnach der Radius der Kugelsegmente doppelt so groſs sein als der Radius des Cylinders. Eine Messung der Höhe der Kugelsegmente und der Krümmung ergibt in der That $\varrho_1 = 2\varrho$.

Mittels Drahtfiguren von verschiedener Gestalt ist es Plateau gelungen, eine Reihe Flüssigkeitsfiguren herzustellen, so Würfel, Octaeder u. s. f. auf konvexen, ebenen und konkaven Oberflächen, je nach der Ölmenge, die er zwischen die Drahtnetze brachte.

Wenn man auf die Tropfen noch andere als die innern Kräfte der Kohäsion und Adhäsion wirken läßt, so wird auch dadurch die Gestalt der Tropfen eine andere. Plateau bewirkte zu dem Ende, daß der Tropfen sich an den in Fig. 121 abgebildeten, in der Mitte des parallelepipedischen Kastens herabgehenden Metalldraht anlegte, welcher mittels der Kurbel in Rotation versetzt werden konnte. Die in der Mitte des Drahtes befindliche Scheibe war vorher mit Öl bestrichen, und nun mittels eines Eisendrahtes die Ölkugel, von 6^{cm} Durchmesser, so an die Scheibe geführt, daß sie sich symmetrisch um Scheibe und Draht herumlegte (Fig. 125). Wenn man nun die Handhabe langsam dreht, so sieht man zunächst, wie die Kugel allmählich an den Polen, durch welche die Drehungsaxe geht, sich abplattet und am Äquator anschwillt (Fig. 126). Dreht man rascher und rascher, so wird die Kugel von unten und oben hohl und dehnt sich immer mehr in horizontaler Richtung aus; endlich verläßt sie die Scheibe und verwandelt sich in einen vollkommen regelmäßigen Ring (Fig. 127).

Fig. 125.



Fig. 126.



Fig. 127.



Diese Erscheinungen erklären sich leicht durch die zur Molekularwirkung der Flüssigkeit auf sich selbst hinzutretende Centrifugalkraft. Der ganze an dem Draht und der Scheibe adhärierende Tropfen wird mit in Rotation versetzt, und die einzelnen Teile desselben erhalten dadurch eine von der Drehungsaxe fortgerichtete centrifugale Beschleunigung, welche in der Nähe des Äquators am stärksten ist. Dadurch suchen die Teile in der Nähe des Äquators sich am stärksten von der Axe zu entfernen. Anfangs wird dieser centrifugalen Beschleunigung durch eine verstärkte Oberflächenspannung das Gleichgewicht gehalten, und es tritt nur eine Abplattung des Tropfens an den Polen, eine Aufhäufung und verstärkte Krümmung am Äquator ein. Überwiegt die centrifugale Beschleunigung, so reißt sich die ganze Masse von der Axe los und umgibt dieselbe in der Form eines Ringes, der eine Zeit lang besteht, dann aber, da sich die Rotationsgeschwindigkeit durch die Reibung des Öls am Alkohol stetig vermindert, wieder zusammenfließt, und sich als kugelförmiger Tropfen wieder um die Axe legt.

Durch besondere Kunstgriffe gelang es Plateau¹⁾ es auch dahin zu bringen, daß sich nur ein Teil des Tropfens als Ring löslöste, während ein

¹⁾ Plateau, Poggend. Ann. Erg.-Bd. II.

anderer Teil in Gestalt eines abgeplatteten Sphäroids an der Axe haften läßt; also eine Erscheinung hervorzurufen, welche mit der des Saturn im Weitraum die größte Ähnlichkeit hat.

§ 81.

Ausbreitung von Flüssigkeiten auf anderen. Wenn man einen Tropfen einer spezifisch leichtern Flüssigkeit auf die Oberfläche einer andern von größerem spezifischen Gewichte bringt, so ist das Verhalten des Tropfens je nach dem Verhältnis der Kapillaritätskonstanten ein sehr verschiedenes. Entweder legt sich der Tropfen in Form einer Linse auf die Oberfläche der Flüssigkeit, so, wenn man fette Öle oder Terpentinöl auf Wasser bringt, welches längere Zeit an der Luft gestanden hat, oder es breitet sich der Tropfen über der Oberfläche immer weiter und weiter zu einer sich immer mehr verdünnenden Flüssigkeitsschicht aus. Die Bedingung, unter welcher das erstere oder das letztere eintritt, ist dieselbe, unter der sich auf einer festen Unterlage ein Tropfen bildet, oder die Ausbreitung der Flüssigkeit stattfindet. Ein Tropfen kann sich nur dann in Form einer Linse halten, wenn der Randwinkel, unter welchem die auf der Oberfläche befindliche Flüssigkeit die Oberfläche schneidet, größer als Null ist; sobald der Winkel gleich Null ist, muß die Flüssigkeit sich auf der untern ausbreiten¹⁾. Die Abhängigkeit des Winkels ϑ von den hier ins Spiel kommenden molekularen Kräften ist am präzisesten von Quincke²⁾ formuliert. Stelle (Fig. 128) T einen Tropfen auf einer Flüssigkeitsoberfläche dar; derselbe drückt unter sich die Oberfläche der Flüssigkeit etwas ein, so daß ein durch den Tropfen geführter Meridianschnitt die Flüssigkeit, auf der der Tropfen liegt, in der konvexen Schnittkurve CD schneidet. Betrachten wir das letzte Element des Tropfens im Punkte C , wo es die untere Flüssigkeit berührt, so ist die Bedingung des Gleichgewichtes, daß die auf dieses Element wirkenden Kräfte sich aufheben.

Diese auf das Element wirkenden Kräfte sind erstens die Tangentialkomponente der Oberflächenspannung der Flüssigkeit des Tropfens, welche in der Richtung der freien Oberfläche des Tropfens nach α_1 wirkt; zweitens die Molekularanziehung der Flüssigkeit des Tropfens, welche nach irgend einer Richtung in das Innere des Tropfens wirkt; drittens die nach α_{12} wirkende Tangentialkomponente der zwischen den beiden Flüssigkeiten vorhandenen Oberflächenspannung, da in der Oberfläche CD zwischen Tropfen und Unterlage die Wirkung beider Flüssigkeiten vorhanden ist; viertens die Anziehung der Flüssigkeit, welche die Unterlage des Tropfens bildet, und welche nach irgend einer Richtung in das Innere dieser Flüssigkeit gerichtet ist.

Wir zerlegen diese Kräfte nach der Richtung α_1 parallel der an das letzte Tropfenelement gelegten Tangente, parallel der Richtung α_{12} , der an

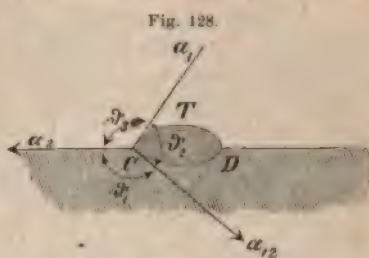


Fig. 128.

¹⁾ Paul du Bois Reymond, Poggend. Ann. Bd. CIV, Bd. CXXXIX.

²⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

das letzte Element der gemeinsamen Oberfläche CD gelegten Tangente und parallel α_2 der Schnittlinie der Oberfläche der untern Flüssigkeit. Sei die Summe der parallel α_1 wirkenden Kräfte gleich α_1 , der parallel α_2 wirkenden gleich α_{12} und schließlich der parallel α_2 wirkenden gleich α_2 .

Von diesen so erhaltenen Kräften hängt α_1 wesentlich von den zwischen den Teilchen der Tropfenflüssigkeit, die wir die Flüssigkeit 1 nennen wollen, wirksamen Kräften ab. Nach den schon im § 72 vorgelegten Erwägungen werden wir dieselbe der Kapillaritätskonstanten der Flüssigkeit 1 proportional setzen dürfen, wir haben sie deshalb auch mit α_1 bezeichnet. Ganz dieselben Erwägungen ergeben, daß wir die Kraft α_2 der Kapillaritätskonstanten der Flüssigkeit 2, der der Unterlage ebenso proportional setzen dürfen. Die Kraft α_{12} ist dann in derselben Weise der Oberflächenspannung in der den beiden Flüssigkeiten gemeinsamen Oberfläche proportional zu setzen, da sie einmal von der Tangentialkomponente dieser Oberflächenspannung und weiter von den Anziehungen beider Flüssigkeiten abhängt.

Wir gelangen dann für den Winkel, den die beiden Kräfte α_1 und α_{12} mit einander und mit α_2 bilden müssen, zu ganz demselben Satze, den wir auch § 72 erhielten. Die drei Kräfte müssen sich verhalten wie die drei Seiten eines Dreiecks, dessen Winkel die Nebenwinkel der drei Winkel $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ (Fig. 128) sind; jeder Seite liegt der Nebenwinkel desjenigen Winkels gegenüber, welchen die betreffende Krafttrichtung schneidet¹⁾. Es besteht somit zwischen den drei Winkeln die Beziehung

$$\frac{\alpha_1}{\sin \vartheta_1} = \frac{\alpha_2}{\sin \vartheta_2} = \frac{\alpha_{12}}{\sin \vartheta_3}.$$

Hieraus folgt zunächst, daß die drei Winkel längs des ganzen Umfanges des Tropfens dieselben sein müssen, da $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_{12}$ dort überall denselben Wert haben. Der Tropfen muß daher einen Rotationskörper bilden, sein der Oberfläche paralleler Schnitt, also auch der durch CD gelegte, muß ein Kreis sein.* Die Erfahrung zeigt das, wie man sofort an einem Öltropfen erkennt, den man auf die Oberfläche von Wasser bringt, welcher längere Zeit an der Luft gestanden hat.

Da in dem aus den drei Kapillarkonstanten mit den Nebenwinkeln der Winkel $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ gebildeten Dreiecke dem Nebenwinkel von ϑ_3 die Seite α_{12} gegenüberliegt, so erhalten wir für den Randwinkel ϑ_3 des Tropfens die Gleichung

$$\alpha_{12}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2\cos\vartheta_3$$

$$-\cos\vartheta_3 = \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_{12}^2}{2\alpha_1\alpha_2}.$$

Die Gleichung zeigt, daß der Winkel ϑ_3 gleich 180° oder unmöglich wird, sobald

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_{12}^2 > 2\alpha_1\alpha_2,$$

oder

$$\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2 > \alpha_{12}^2$$

$$\alpha_2 - \alpha_1 > \alpha_{12}.$$

¹⁾ Der Satz ist zuerst von F. E. Neumann ausgesprochen. Man sehe *Quintess. Poggend. Ann.* Bd. CXXXIX p. 35. F. De Bois Reymond, *Poggend. Ann.* Bd. CXXXIX p. 265.

Bringt man also eine Flüssigkeit 1 auf eine Flüssigkeit 2 mit größerer Kapillarkonstante, so breitet sich die Flüssigkeit stets aus, wenn die in gemeinsamen Oberfläche der beiden Flüssigkeiten vorhandene Kapillarkonstante gleich oder kleiner ist als die Differenz der Kapillarkonstanten freien Oberflächen der beiden Flüssigkeiten.

Quincke hat diesen Satz durch Messung von Kapillaritätskonstanten der gemeinschaftlichen Oberfläche zweier Flüssigkeiten, etwa an Tropfen einer schweren Flüssigkeit, welche er in eine leichtere brachte, wie Quecksilber, Chloroform, Schwefelkohlenstoff in Wasser, oder in anderer Weise geprüft. Es fand sich stets obige Relation bei Ausbreitungsversuchen bestätigt. Am einfachsten stellt sich obiges Gesetz bei Flüssigkeiten, welche dem Verhältnisse mischbar sind. Denn dort ist, wie schon im vorigen Paragraphen erwähnt wurde, α_{12} stets gleich Null. In dem Falle muß also die Flüssigkeit mit kleineren Kapillarkonstanten sich auf einer Flüssigkeit mit größeren Kapillarkonstanten ausbreiten¹⁾.

Da das Ausbreitungsphänomen wesentlich von der Oberflächenspannung sich berührenden Flüssigkeiten abhängt, so erkennt man, daß kleine Verunreinigungen der Oberflächen, besonders derjenigen, auf der die Ausbreitung stattfinden soll, von wesentlichem Einfluß auf die Erscheinung sein muß. So erklärt es sich, daß Öl auf frischem Wasser sich ausbreitet, nicht auf gestandenem, daß Wasser sich nur auf der Oberfläche ganz reinen Quecksilbers ausbreitet u. m. a.²⁾.

§ 82.

Diffusion. Wenn zwei mischbare Flüssigkeiten vorsichtig so zusammengegossen werden, daß die leichtere anfänglich über der schwereren liegt, so findet dennoch allmählich eine Mischung der Flüssigkeiten statt, indem wegen der stärkeren Anziehung der einen Flüssigkeit auf die Moleküle der andern eine Mischung zunächst in der Grenzschicht der beiden Flüssigkeiten eintritt und aus dieser dann die Moleküle der einen Flüssigkeit allmählich in die andere verbreitet werden. Man bezeichnet dieses Durchgehen der Flüssigkeiten mit dem Namen der Diffusion. Je nachdem längere oder kürzere Zeit vergeht, ehe die Mischung der Flüssigkeiten auf eine Weise vollständig wird, schreibt man ihnen eine größere oder kleinere Diffusionsgeschwindigkeit zu.

Am genauesten ist die Diffusion gelöster Substanzen untersucht worden. Der erste, welcher sich näher damit beschäftigte, war Graham³⁾; derselbe benutzte Gefäße, welche mit verschiedenen konzentrierten Lösungen der zu untersuchenden Salze gefüllt waren, in größere Gefäße mit Wasser und maß die Salzquantitäten, welche in gleichen Zeiten in das umgebende Wasser hinübergewandert waren. Er fand, daß bei nicht zu konzentrierten Lösungen diese Mengen der Konzentration der angewandten Lösungen,

¹⁾ Quincke a. a. O. *Lüdtge*, Poggend. Ann. Bd. CXXXVII. *Marangoni*, Poggend. Ann. Bd. CXLIII.

²⁾ Man sehe über den Einfluß unmerklich dünner Schichten fremder Substanzen *Quincke*, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX und Neue Folge (Wiedem. Ann.) Bd. II.

³⁾ *Graham*, Liebigs Annalen Bd. LXXVII. Bd. LXXX. Bd. CXXI.

resp. den Mengen des in gleichen Volumen derselben gelösten Salzes proportional waren, daß bei gleicher Konzentration indes die Mengen verschiedener Salze sehr verschieden waren, so daß man den verschiedenen Salzen eine sehr verschiedene Diffusionsgeschwindigkeit zuschreiben muß.

Bald nach den Versuchen Grahams gab Fick¹⁾ eine einfache Theorie der Diffusion, durch welche man zu einer präzisen Definition des Begriffes der Diffusionsgeschwindigkeit gelangt. Fick nimmt an, daß die Menge des in der Zeiteinheit aus einer Schicht in die nächstfolgende übergehenden Salzes der Konzentrationsdifferenz der beiden Schichten proportional ist. Denken wir uns nun ein cylindrisches Rohr, welches unten geschlossen ist und auf seinem Boden eine Schicht Salzlösung von der Konzentration u_0 enthalte, wo u_0 die im Kubikcentimeter Lösung vorhandene Menge Salz bedeuten soll. Über diese Schicht sei zunächst reines Wasser gebracht. Nach irgend einer Zeit t wird dann ein Teil des Salzes in das Wasser diffundiert sein und eine Schicht in der Höhe x über dem Boden hat zu der Zeit die Konzentration u . Eine um dx höhere Schicht hat dann die Konzentration $u - du$; während der unendlich kleinen Zeit dt ist dann die aus der ersteren in die folgende übergehende Salzmenge nach der Annahme von Fick

$$ds = - \kappa q du \cdot dt,$$

wo wir auf der rechten Seite das negative Vorzeichen schreiben müssen, weil der Salzstrom nach der Richtung der abnehmenden Konzentration stattfindet. Es bedeutet in der Gleichung q den Querschnitt des Gefäßes und κ eine nur von der Natur des Salzes abhängige Konstante, welche die Menge des durch die Flächeneinheit übertretenden Salzes sein würde, wenn die Differenz der Konzentration zweier benachbarter Schichten gleich der Einheit wäre. Anstatt der Konstanten κ , welche sehr groß sein würde, da der Konzentrationsunterschied zweier benachbarter Schichten immer sehr klein ist und zudem, da wir den Unterschied du niemals wirklich angeben können, nicht bestimmbar wäre, führen wir besser eine andere Konstante ein, welche wir dann als das Maß der Diffusionsgeschwindigkeit erhalten. Als solche bezeichnen wir die Salzmenge, welche in der Zeiteinheit durch die Querschnittseinheit geht, wenn zwei um die Längeneinheit von einander entfernte Querschnitte die Konzentrationsdifferenz 1 haben, vorausgesetzt, daß die Konzentrationsabnahme von Querschnitt zu Querschnitt, welche um dx von einander entfernt sind, immer denselben Wert hat. Ist die Konzentrationsabnahme in zweien um dx entfernten Querschnitten gleich $\frac{du}{dx}$, so ist sie in zweien um die Längeneinheit entfernten gleich $\frac{du}{dx}$, und mit Einführung der Konstanten k erhalten wir dann für die in der Zeit dt von einem Querschnitte zu dem folgenden übergehende Salzmenge

$$ds = - k q \frac{du}{dx} dt.$$

Dieser aus der Fickschen Annahme sich ergebende Ausdruck für die im Zeitelement dt übergehende Salzmenge gestattet uns nun zunächst dort eintretende Konzentrationsänderung zu berechnen. In derselben Zeit

¹⁾ Fick, Poggend. Ann. Bd. XCIV.

der durch den Querschnitt x diese Salzmenge ds in den Raum zwischen x und $x + dx$ tritt, wandert eine andere Salzmenge ds' durch den Querschnitt $x + dx$ aus diesem Raum weiter. Nennen wir die Konzentrationsdifferenz zwischen dem Querschnitt $x + dx$ und $x + 2dx$ in dem betrachteten Zeitmoment du' , so erhalten wir für ds'

$$ds' = -kq \frac{du'}{dx} dt,$$

mit

$$ds - ds' = -kq \frac{du - du'}{dx} dt.$$

Diese Salzmenge wandert in den zwischen x und $x + dx$ vorhandenen um mehr zu als aus demselben fort. Nach unserer Definition der Konzentration ist somit die Konzentrationsänderung, die Zunahme der Salzmenge in der Volumeinheit

$$\frac{ds - ds'}{qdx},$$

in dem Raum ist, in welchem die Salzmenge um $ds - ds'$ zunimmt. Bezeichnen wir auch diese in der Zeit dt stattfindende Zunahme der Konzentration mit du , so wird

$$\frac{du}{dt} = -k \frac{du - du'}{dx^2} = -k \frac{d^2u}{dx^2},$$

in welcher Gleichung wir die Differenz der beiden Konzentrationsänderungen du und du' bei um dx entfernten Schichten als d^2u bezeichnen. Die Entwicklung zeigt uns, daß die Konzentration u zu einer gegebenen Zeit abhängig ist vom Abstände x des betrachteten Querschnittes von dem untern Ende des Rohres, daß sie also eine Funktion von x ist. Gleichzeitig ändert sie sich aber an allen Stellen mit der Zeit, sie ist also eine Funktion der Zeit. In den Entwicklungen der Einleitung erkennen wir dann, daß uns die richtige Annahme eine Beziehung liefert zwischen dem ersten Differentialkoeffizienten von u als Funktion der Zeit und dem zweiten Differentialkoeffizienten als Funktion des Abstandes des betrachteten Querschnittes vom untern Ende des Cylinders.

Die allgemeine Behandlung dieser Gleichung, das heißt die Ableitung, welche Funktion die Konzentration u von der Zeit t und von x ist, bietet manche Schwierigkeiten¹⁾. In gewissen einfachen Fällen können wir die Gleichung indes auflösen und damit Versuchsmethoden erhalten, durch welche die Theorie prüfen können.

Wir bringen auf den Boden des Cylinders eine Menge festen Salzes, belassen es dort, so lange auch der Versuch dauert, immer eine konzentrierte Lösung des Salzes ist. Dann setzen wir den Cylinder, dessen Länge l sei, in ein großes Gefäß mit Wasser, so daß selbst wenn alles Salz in dieses Wasser hindübergelöst wäre, die Konzentration doch eine so kleine ist, daß wir sie gleich Null setzen dürfen. Die Konzentration ist dann an dem untern Ende des Cylinders für $x = 0$ für die ganze Dauer des Versuches konstant und gleich u_0 der Konzentration der konzentriertesten Salzlösung,

¹⁾ Die allgemeine Behandlung geben Wild und Simmler, Poggend. Ann. 3.

am obern Ende für $x = l$ dagegen gleich Null. Läßt man die Diffusion hinreichend lange stattfinden, so muß sich schließlich ein stationärer Zustand herstellen, sobald nämlich der letzte Querschnitt des Cylinders gleichen Zeiten ebensoviel an die Umgebung abgibt, als er von den davor liegenden Querschnitten erhält. Daß dies nach einiger Zeit eintreten ergibt die Überlegung, daß mit Zunahme der Konzentration in der letzten Schicht die Menge des in gegebener Zeit an die Umgebung abgegebenen Salzes zunimmt, dagegen diejenige des von der tieferen Schicht herkommenden Salzes abnimmt, da in der Tiefe die Konzentration konstant ist, aber der letzte Querschnitt von einer konstanten, sich mit der Zeit mehr ändernden Konzentration, so müssen es auch alle tiefer liegenden, da eben der letzte Querschnitt nur dann eine konstante Konzentration haben kann, wenn auch der vorletzte sie hat und so fort. Ist aber die Konzentration in jedem Querschnitte eine mit der Zeit sich nicht mehr ändernde geworden, so ist

$$\frac{du}{dt} = 0$$

und die Gleichung, welche uns die Abhängigkeit der Konzentration von x gibt, wird

$$k \frac{d^2 u}{dx^2} = 0.$$

Nach unserer mathematischen Einleitung ist der zweite Differentialquotient der erste des ersten Differentialquotienten, oder

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{du}{dx}\right)}{dx}.$$

Daraus, daß der zweite Differentialquotient von u nach x gleich Null ist, folgt dann nach E I, daß der erste Differentialquotient eine konstante von x nicht abhängige GröÙe ist, oder es ist

$$\frac{du}{dx} = a.$$

Hieraus folgt dann unter Beachtung von E 1

$$u = ax + b.$$

Die beiden Konstanten a und b ergeben sich daraus, daß für die Konzentration $u = u_0$ ist, somit

$$b = u_0,$$

ferner, daß für $x = l$, $u = 0$, also

$$0 = al + u_0, \quad a = -\frac{u_0}{l},$$

somit wird

$$u = u_0 - \frac{u_0}{l} x,$$

oder die Konzentration nimmt dem Abstände von dem untern Ende des Cylinders proportional ab.

Man hätte diesen Satz auch einfach aus der Überlegung ableiten können, daß der stationäre Zustand nur eintreten kann, wenn durch

erschnitt in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Salzes wandern, was nur möglich ist, wenn die Konzentrationsdifferenz je zweier auf einander folgenden Querschnitte durch den ganzen Cylinder dieselbe ist. Ist das aber der Fall, so muß auch die Konzentrationsdifferenz je zweier gleich weit entfernten Querschnitte die gleiche sein, oder die Konzentration muß jedesmal um die gleiche Größe abnehmen, wenn wir in dem Cylinder um gleiche Strecken aufsteigen, was eben unsere Gleichung für u darstellt.

Fick hat diese Folgerung der Theorie zu prüfen versucht, indem er in einem in der angegebenen Weise hergestellten Cylinder, dessen Boden mit kristallisiertem Kochsalz enthielt, den Diffusionsvorgang wochenlang dauern ließ, und dann durch vorsichtig eingesenkte mit einem äußerst feinen Rohre an einer Wage hängende Glaskügelchen das spezifische Gewicht der Lösung in verschiedenen Höhen x über dem Boden bestimmte. Die aus den gefundenen spezifischen Gewichten sich ergebenden Konzentrationen entsprachen der Gleichung so genau, als es bei der Schwierigkeit dieser Methode, wo das Einsenken des Kügelchens jedenfalls eine geringe Mischung verschiedener Schichten zur Folge hat, nur erwartet werden kann.

Um nach dieser Methode die Diffusionsgeschwindigkeit k zu bestimmen, gehen wir zu der Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = -kq \frac{du}{dx}$$

aus. Die linke Seite bedeutet die in der Zeiteinheit von einer Schicht der nächstfolgenden wandernde Salzmenge, da ds die in der Zeit dt übergehende Menge ist. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist das einfach die in der Zeiteinheit aus dem Cylinder in das umgebende Wasser tretende Salzmenge. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist

$$-\frac{du}{dx} = \frac{u_0}{l}.$$

Nennen wir nun die Menge des in der Zeiteinheit austretenden Salzes S , so wird

$$S = kq \frac{u_0}{l},$$

da es muß die in gleichen Zeiten aus den Röhren austretende Salzmenge um die Länge der Röhren umgekehrt proportional sein.

Auch diesen Satz fand Fick bestätigt, indem er in der vorhin angegebenen Weise drei Röhren sehr verschiedener Länge herstellte und nach Eintritt des stationären Zustandes die Menge des im Laufe eines Tages in das äußere Wasser übertretenden Salzes durch eine chemische Analyse des Wassers, welche an in bestimmten Zeiträumen genommenen Proben desselben ausgeführt wurde, bestimmte. Er erhielt für k nach der Gleichung

$$k = \frac{l \cdot S}{q \cdot u_0}$$

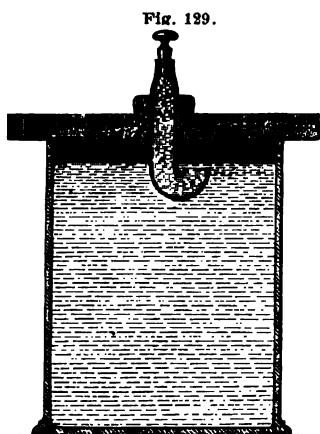
1. Versuchen mit der

Temperatur	längsten	mittleren	kürzesten Röhre
18° — 19	$k = 1,071$	$k = 1,108$	$k = 1,050$

2. Zahlen, die mit Berücksichtigung der unvermeidlichen Fehlerquellen der That als gleich zu betrachten sind.

Die Zahlen bedeuten in Grammen die Salzmenge, welche im Laufe eines Tages durch einen Querschnitt von 1 cm^2 geht, wenn zwei um 1 cm voneinander entfernte Schichten eine solche Konzentrationsdifferenz haben, wie sie dem Unterschied von 1 Gramm Salz im Kubikcentimeter Lösung entspricht.

Durch Abwarten des stationären Zustandes erreicht man, daß die Konzentration in dem Diffusionsgefäß nicht mehr eine Funktion der Zeit, sondern nur eine Funktion des Abstandes einer Schicht vom Boden des Gefäßes ist; durch eine andere von Jolly angegebene Versuchsanordnung hat Beilstein¹⁾ es dahin zu bringen gesucht, daß die Konzentration in dem ganzen Diffusionsgefäß an allen Stellen die gleiche aber mit der Zeit sich ändernde ist. Die Lösung wurde in eine etwa 6 cm lange Glasröhre (Fig. 129)



gefüllt, welche unten umgebogen und an ihrer Umbiegung so abgeschliffen war, daß das Niveau der Mündung möglichst nahe über dem tiefsten Punkte der Umbiegung war; am obern Ende war das Gläschen etwas ausgezogen und durch einen eingeriebenen Glasstöpsel verschließbar. Um das Gläschen zu füllen, wurde es in ein Becherglas ganz in Lösung untergetaucht, und während die obere Öffnung mit der Lösung bedeckt war, mit dem Stöpsel verschlossen. Das gefüllte Gläschen wurde dann mittels eines durchbohrten Korkes in ein Brettchen gesteckt, welches auf dem horizontalen Rande eines mit Wasser gefüllten Gefäßes lag, so daß sich die untere Öffnung des Gläschens einige Millimeter unter der Oberfläche des Wassers

befand. Es wurde die Konzentration der Lösung vor dem Beginne des Versuches bestimmt, und dann wieder, nachdem der Versuch einen Tag oder zwei Tage gedauert hatte. Der Apparat war in einem Kellerraum von konstanter Temperatur aufgestellt. Die umgebende Wassermenge war so groß, daß deren Konzentration stets gleich Null gesetzt werden konnte.

Infolge der Diffusion wurde die Lösung zunächst in der Umbiegung verdünnt; da dann aber die Lösung in dem ganzen Gläschen konzentriert, somit spezifisch schwerer ist, nimmt Beilstein an, daß stets durch Niedersinken der konzentrierteren Lösung eine Mischung stattfindet, so daß zu jeder Zeit innerhalb des Gläschens und an der Öffnung dieselbe aber infolge der Diffusion mit der Zeit abnehmende Konzentration vorhanden sei. Ganz wird dieser Zustand allerdings nicht erreicht werden können, da die in der Biegung befindliche Lösung als die tiefstliegende an dieser Mischung nicht teilnehmen kann. Annähernd wird aber die Voraussetzung erfüllt sein.

Nennen wir die in einem gegebenen Momente in dem Gläschen und der Grenzfläche vorhandene Konzentration u , so können wir die in dem Zeitelement dt durch den Querschnitt q der Öffnung nach außen wandernde Salzmenge, da das Wasser die Konzentration Null hat, setzen

¹⁾ Beilstein, Liebigs Annalen Bd. XCIX.

$$dS = Kqu dt,$$

in K der von uns definierten Diffusionsgeschwindigkeit proportional, nicht derselben gleich ist, da hier nicht die Abnahme u auf 0 auf der Angeneinheit, sondern in einer kleinern allerdings nicht bekannten Strecke stattfindet. Nennen wir das Volumen des Gefäßes V , so können wir die dem gegebenen Momente in dem Gefäße vorhandene Salzmenge

$$S = V \cdot u, \quad dS = - V du$$

setzen, wo wir das negative Vorzeichen auf der rechten Seite schreiben, anzudeuten, daß durch Fortwandern der Salzmenge dS die Konzentration u des Gefäßes um du abnimmt. Damit wird

$$- du = \frac{Kq}{V} u dt; \quad - \frac{du}{u} = \frac{Kq}{V} dt.$$

Um die zur Zeit t vorhandene Konzentration zu erhalten, haben wir auf beiden Seiten die Summen zu bilden von $t = 0$ bis $t = t$. Nennen wir bei Beginn des Versuches in dem Gefäße vorhandene Konzentration u_0 , wird

$$- \int_{u_0}^u \frac{du}{u} = \int_0^t \frac{Kq}{V} dt = \frac{Kq}{V} \cdot t.$$

Nach E VIII und E 2 wird dann

$$\log u_0 - \log u = \frac{Kq}{V} t$$

$$K_1 = \frac{Kq}{V} = \frac{1}{t} (\log u_0 - \log u).$$

Es muß demnach der Quotient aus der Differenz der Logarithmen der Konzentration am Beginn und am Ende des Versuches in dem Gläschen vorhandenen Konzentration dividiert durch die Dauer des Versuches konstant sein.

In der That geben die Beobachtungen Beilsteins dieses Resultat, mit Abweichungen, welche hinreichend dadurch erklärt werden, daß die Voraussetzungen der Berechnung, eine in dem ganzen Diffusionsgefäße überall gleiche Konzentration, nicht streng erfüllt sind.

So erhielt Beilstein unter andern folgende Werte von K_1 für verschieden konzentrierte Lösungen, und bei Versuchen, die teils einen, teils zwei Tage dauerten. Die Temperaturen waren stets 5—7° C. Als Zeiteinheit dabei der Tag angenommen.

Salpetersaures Kali:

$$\begin{array}{lll} u_0 = 0,0197 & K_1 = 0,184 & K'_1 = 0,189 \\ 0,0393 & 0,192 & 0,190 \\ 0,0962 & 0,176 & 0,176 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lll} u_0 = 0,0197 \\ 0,0393 \\ 0,0962 \end{array}} \right\} \text{Mittel } 0,1845.$$

Doppelchromsaures Kali:

$$\begin{array}{lll} u_0 = 0,0199 & 0,146 & 0,146 \\ 0,0394 & 0,153 & 0,149 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lll} u_0 = 0,0199 \\ 0,0394 \end{array}} \right\} \text{Mittel } 0,1480.$$

Chlorkalium.

$$\begin{array}{lll} u_0 = 0,0394 & 0,208 & 0,198 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{lll} u_0 = 0,0394 \\ 0,208 \end{array}} \right\} \text{Mittel } 0,2010.$$

Werte K'_1 sind aus den Versuchen mit zweitägiger Dauer berechnet.

Später haben Voit¹⁾ und Johannisjanz²⁾ die Richtigkeit der Theorie zu prüfen und für einige Substanzen die Diffusionsgeschwindigkeiten zu bestimmen gesucht, indem sie auf den Boden eines cylindrischen oder prismatischen Gefäßes Lösung und auf diese Wasser brachten, und dann die Konzentration u in verschiedenen Höhen über der ursprünglichen Trennungsschicht in ihrer Abhängigkeit von der Zeit beobachteten. Wie indes Stefan³⁾ gezeigt hat, sind die von diesen beiden Physikern angewandten optischen Beobachtungsmethoden nicht zur Erlangung richtiger Resultate geeignet. Stefan hat dann an den Versuchen Grahams die Theorie bestätigt und aus denselben eine Anzahl Diffusionsgeschwindigkeiten verschiedener Salze berechnet⁴⁾.

Spätere Beobachtungen von F. Weber⁵⁾, Schuhmeister⁶⁾ und Long⁷⁾ scheinen indes doch eine Abhängigkeit der Diffusionsgeschwindigkeit von der Konzentration zu ergeben. Weber erhielt nach einer Methode, die wir hier nicht auseinandersetzen können, für Zinkvitriol und den Konzentrations

$$u = 0,214 \quad k = 0,2403; \quad u = 0,318 \quad k = 0,2299$$

bei der Temperatur 18° , also einen mit steigender Konzentration abnehmenden Wert von k . Die Werte von k sind in den vorhin definierten Einheiten gegeben.

Schuhmeister führte entweder über einen mit Salzlösung gefüllten Cylinder einen langsamen Wasserstrom, in den das Salz aus dem Cylinder diffundirte und bestimmte die Menge des ausgetretenen Salzes aus der Konzentration der Lösung vor Beginn und nach Beendigung des Versuches, oder er stellte auf einen mit Salzlösung gefüllten Cylinder einen zweiten von genau gleichem Querschnitt und gleicher Länge, der mit Wasser gefüllt war. Nach Beendigung des Versuches konnten die beiden Cylinder ohne Mischung des Inhalts von einander getrennt werden und in jedem einzelnen die Konzentration bestimmt werden. Für die aus dem untern Cylinder in der Zeit t austretende Salzmenge ergibt die allgemeine Gleichung nach den Entwicklungen Stefans⁸⁾ in dem

ersten Falle,	zweiten Falle
$S = 2 u_0 q \sqrt{\frac{k t}{\pi}}$	$S = u_0 q \sqrt{\frac{k t}{\pi}},$

wenn u_0 die anfängliche Konzentration, q den Querschnitt des Cylinders und π die Ludolphische Zahl bedeutet.

So erhielt Schuhmeister z. B. für Chlorkalium bei einer Temperatur $18^{\circ} 8$ C.

$$\text{für } u_0 = 0,08409 \quad k = 1,319; \quad u_0 = 0,18437 \quad k = 1,406$$

$$u_0 = 0,28974 \quad k = 1,464.$$

¹⁾ Voit, Poggend. Ann. Bd. CXXX.

²⁾ Johannisjanz, Wiedem. Ann. Bd. II.

³⁾ Stefan, Wiener Berichte. Bd. LXXVIII.

⁴⁾ Stefan, Wiener Berichte. Bd. LXXIX..

⁵⁾ F. Weber, Wiedem. Ann. Bd. VII.

⁶⁾ Schuhmeister, Wiener Berichte. Bd. LXXIX.

⁷⁾ Long, Wiedem. Ann. Bd. IX.

⁸⁾ Stefan, Wiener Ber. Bd. LXXVIII.

Querschnitt in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Salzes wandern, was nur möglich ist, wenn die Konzentrationsdifferenz je zweier auf einander folgenden Querschnitte durch den ganzen Cylinder dieselbe ist. Ist das aber der Fall, so muß auch die Konzentrationsdifferenz je zweier gleich weit entfernter Querschnitte die gleiche sein, oder die Konzentration muß jedesmal um die gleiche GröÙe abnehmen, wenn wir in dem Cylinder um gleiche Strecken aufsteigen, was eben unsere Gleichung für u darstellt.

Fick hat diese Folgerung der Theorie zu prüfen versucht, indem er in einem in der angegebenen Weise hergestellten Cylinder, dessen Boden krystallisiertes Kochsalz enthielt, den Diffusionsvorgang wochenlang dauern ließ, und dann durch vorsichtig eingesenkte mit einem äußerst feinen Drahte an einer Wage hängende Glaskügelchen das specifische Gewicht der Lösung in verschiedenen Höhen x über dem Boden bestimmte. Die aus den gefundenen specifischen Gewichten sich ergebenden Konzentrationen entsprachen der Gleichung so genau, als es bei der Schwierigkeit dieser Methode, wo das Einsenken des Kügelchens jedenfalls eine geringe Mischung verschiedener Schichten zur Folge hat, nur erwartet werden kann.

Um nach dieser Methode die Diffusionsgeschwindigkeit k zu bestimmen, gehen wir zu der Gleichung

$$\frac{ds}{dt} = -kq \frac{du}{dx}$$

zurück. Die linke Seite bedeutet die in der Zeiteinheit von einer Schicht zur nächstfolgenden wandernde Salzmenge, da ds die in der Zeit dt übergehende Menge ist. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist das einfach die in der Zeiteinheit aus dem Cylinder in das umgebende Wasser austretende Salzmenge. Nach Eintritt des stationären Zustandes ist

$$-\frac{du}{dx} = \frac{u_0}{l}.$$

Nennen wir nun die Menge des in der Zeiteinheit austretenden Salzes S , so wird

$$S = kq \frac{u_0}{l},$$

oder es muß die in gleichen Zeiten aus den Röhren austretende Salzmenge der Länge der Röhren umgekehrt proportional sein.

Auch diesen Satz fand Fick bestätigt, indem er in der vorhin angegebenen Weise drei Röhren sehr verschiedener Länge herstellte und nun nach Eintritt des stationären Zustandes die Menge des im Laufe eines Tages in das äußere Wasser übertretenden Salzes durch eine chemische Analyse des Wassers, welche an in bestimmten Zeiträumen genommenen Proben desselben ausgeführt wurde, bestimmte. Er erhielt für k nach der Gleichung

$$k = \frac{l \cdot S}{q \cdot u_0}$$

aus Versuchen mit der

Temperatur	längsten	mittleren	kürzesten Röhre
18° — 19	$k = 1,071$	$k = 1,108$	$k = 1,050$

drei Zahlen, die mit Berücksichtigung der unvermeidlichen Fehlerquellen in der That als gleich zu betrachten sind.

und wie, bei Salzlösungen z. B., der Austausch erfolgt, wenn man verschieden dichte Lösungen derselben Substanz unter sonst gleichen Umständen der Endosmose unterwirft.

Die ältern Versuche beschränkten sich darauf, die Volumzunahme zu messen, welche auf der einen Seite der Scheidewand eintrat, und glaubten in dieser Volumzunahme ein Maß des endosmotischen Vorganges zu erkennen. Darauf hin gab Dutrochet¹⁾ einen Meßapparat, das sogenannte Endosmometer an, welches in weiter nichts bestand als in einer getheilten, unten trichterförmig erweiterten und mit einer Membran geschlossenen Röhre. In diese wurde die eine Flüssigkeit, z. B. eine Salzlösung, bis zu einer bestimmten Höhe eingefüllt und dann die trichterförmige Erweiterung der Röhre in die zweite Flüssigkeit, z. B. Wasser, getaucht. Die Volumzunahme wurde an der Theilung der Röhre abgelesen. Mit diesem oder einem ähnlichen Apparate untersuchten Jerichau²⁾, Brücke³⁾, Vierordt⁴⁾ die Endosmose verschiedener Stoffe durch verschiedene Membranen.

Indes kann diese Methode nicht zu genauen Resultaten führen, da sie nur die Volumänderung der einen Flüssigkeit, also nur den Diffusionsstrom nach der einen Richtung berücksichtigt. Diese Methode würde z. B. in dem Falle, wo die beiden entgegengesetzt gerichteten Ströme, welche den Austausch der Flüssigkeiten vermitteln, ganz gleiche Stärke haben, also eine Volumänderung nicht eintritt, zu dem ganz falschen Schlusse führen, daß gar keine Diffusion eingetreten sei; in diesem Falle würde sie gar nichts messen können. Aus diesem Grunde waren auch die Resultate dieser Beobachter mehr qualitativer Natur, es ergaben sich aus ihnen die That- sachen, welche wir vorhin angeführt haben.

Jedoch folgerten Dutrochet und Vierordt schon aus ihren Versuchen, daß die Stärke der Endosmose bei Lösungen unter sonst gleichen Verhältnissen der Dichtigkeit der Lösungen proportional sei, d. h. daß die Wassermengen, welche in gleichen Zeiten durch die Membran in die Röhre dringen, in demselben Verhältnisse zu einander stehen, wie die Dichtigkeit der Lösungen in der Röhre.

Jolly⁵⁾ wandte ein anderes Verfahren an; er maß nicht die Volumänderungen, sondern die Gewichtsänderungen der Endosmometer, denen er dazu auch eine sehr einfache Form gab. Eine cylindrische Glasröhre von vielleicht zwei Decimeter Länge und $1\frac{1}{2}$ Centimeter Weite wurde einfach an ihrem Ende mit einem Stücke einer feuchten thierischen Blase geschlossen und dann mit einer abgewogenen Menge des zu untersuchenden Stoffes gefüllt und in reines Wasser getaucht. Der leichtern Übersichtlichkeit des Versuches wegen wurde dann dafür gesorgt, daß die äußere Flüssigkeit stets Wasser war, indem die Röhre in ein großes Gefäß mit Wasser getaucht wurde, in welchem das Wasser von Zeit zu Zeit erneuert wurde.

Zunächst ließ Jolly den endosmotischen Vorgang so lange dauern, bis im Innern der Röhre nur mehr reines Wasser vorhanden war, indem er so

¹⁾ Dutrochet, Annales de chim. et de phys. T. XXXV.

²⁾ Jerichau, Poggend. Ann. Bd. XXXIV. 613.

³⁾ Brücke, De Diffusione humorum per septa. Berlin 1841. Daraus Poggend. Ann. Bd. LVIII. p. 77.

⁴⁾ Vierordt in Archiv von Roser und Wunderlich. Bd. VI. 1847.

⁵⁾ Jolly, Zeitschrift für die rationelle Medicin von Henle und Pfeufer. Bd. VII.

nge die Röhre in das Wasser tauchen liefs, bis sich keine Gewichtsänderung der Röhre mehr zeigte. Da dann die eine Substanz ganz aus der Röhre verschwunden war, so erhielt er in der Gewichtszunahme der Röhre die Menge Wassers, welche den ausgetauschten Stoff ersetzt hatte.

Die Versuche ergaben, dafs bei gleicher Membran und gleichbleibender Temperatur für eine gewisse Menge des der Endosmose ausgesetzten Stoffes stets die gleiche Menge Wasser eintrat, ob man nun ursprünglich eine kleinere oder gröfsere Menge des Stoffes in die Röhre gethan hatte. So fand sich, dafs bei Anwendung derselben Membran für 1^{gr} Kochsalz stets bezu 4^{gr} Wasser in die Röhre getreten waren. Bei einem Versuche ergaben sich z. B. folgende Zahlen, aus denen man auch ein Bild erhält, wie Jolly die Versuche ausführte.

Zunächst wurde das Endosmometer leer, aber mit ganz durchfeuchteter Membran gewogen und es war:

Gewicht der Röhre leer, feucht	37,81 ^{gr}
Gewicht des trockenen Kochsalzes	2,00 „
Gewicht des Lösungswassers	6,20 „
Totalgewicht	46,01 ^{gr}

Gewicht nach 6 Tagen, nachdem alles Kochsalz aus der Röhre getreten war	53,17 ^{gr}
Die Gewichtszunahme der Röhre betrug also . . .	7,16 „

Da ferner 2^{gr} Kochsalz ausgetreten waren, die ebenfalls durch Wasser ersetzt waren, so waren im ganzen 9,16^{gr} Wasser bei der Endosmose für 2^{gr} Kochsalz, oder für

1^{gr} Kochsalz 4,58^{gr} Wasser

getreten.

In einem andern Versuche wurden 2,4^{gr} trockenes Kochsalz auf die Membran gelegt, und es traten ein 10,36 Wasser, oder für

1^{gr} Kochsalz 4,316^{gr} Wasser.

In einem dritten Versuche traten für 0,741^{gr} Kochsalz 3,215^{gr} Wasser ein, oder für

1^{gr} Kochsalz 4,338^{gr} Wasser.

Jolly wandte zu seinen Versuchen Schweinsblasen an, aber selbst für verschiedene Stücke derselben Membran fanden sich die Werte der eintretenden Wassermengen für denselben Stoff verschieden. Nur bei Anwendung desselben Membranstückes waren sie konstant, indes weichen die von Jolly für verschiedene Stücke Schweinsblasen bestimmten Zahlen so wenig voneinander ab, dafs man wohl füglich eine Mittelzahl aus diesen als für Schweinsblase überhaupt gültig ableiten kann.

Jolly nennt die für 1^{gr} eines Stoffes eintretenden Wassermengen das endosmotische Äquivalent des Stoffes. Das endosmotische Äquivalent ändert sich nach den neueren Versuchen von Schmidt¹⁾ nicht merklich mit der Temperatur. Jolly findet aus seinen Versuchen folgende endosmotische Äquivalente für Schweinsblase:

¹⁾ Schmidt in Poggend. Ann. Bd. CII.

Kochsalz	4,22
Glaubersalz	11,05
Schwefels. Kali	12,70
Schwefels. Magnesia	11,65
Kalihydrat	231,40
Alkohol	4,13
Zucker	7,25.

Für andere Membranen erhält man andere Zahlen; so fand Eckhard für den Herzbeutel des Rindes das Äquivalent für Kochsalz = 3,2.

Jolly weist dann in seiner Arbeit ferner nach, daß das von Dutrochet ausgesprochene Gesetz, daß die Stärke der Endosmose der Dichtigkeit der Lösung proportional sei, richtig ist; ein Resultat, welches Schmidt bestätigt.

Gegen Jollys Annahme endosmotischer Äquivalente trat bald (Ludwig²⁾) auf, indem er nachzuweisen suchte, daß dasselbe von der Konzentration der Flüssigkeit abhängt, welche man der Endosmose aussetzt. So ergaben Ludwigs Versuche für Glaubersalz eine Schwankung zwischen 4 und 42. Indessen lassen sich gegen die Ludwigschen Zahlen manchen Einwendungen machen, indem die Veränderlichkeit derselben mehr auf eine Änderung der Membran als des Äquivalents hindeutet. Es wurde auch bei derselben Temperatur ein und derselben Konzentration der Lösung einmal 31,9, ein anderesmal 21,0 und bei einem andern Stück Schweinehäut nur 8 als endosmotisches Äquivalent des Glaubersalzes gefunden. Solche Änderungen zeigen sich hauptsächlich nach Anwendung krystallisierten Salzes. In solchen Fällen findet Schmidt für Glaubersalz etwas Ähnliches, aber viel unbedeutendere Schwankungen als Ludwig, indem Schmidt für Glaubersalz und den Herzbeutel eines Rindes eine Zahl nahe gleich erhält, die bei Anwendung krystallisierten Salzes etwas über 10 wird. Ist geneigt, dieses auf eine Änderung der Membran zu schieben.

Als durchaus konstant scheint man indes nach neueren Versuchen (Eckhard³⁾) die endosmotischen Äquivalente auch bei vollständig bleibender Membran nicht annehmen zu können. Wie Eckhard angibt, der frische Herzbeutel des Rindes, nachdem derselbe einige Stunden in destilliertem Wasser ausgewässert und dann zwischen den Versuchen in Wasser aufbewahrt ist, lange Zeit ungeändert, wie sich daraus ergibt, man für das endosmotische Äquivalent, wenn man es von Zeit zu Zeit unter denselben Umständen wieder bestimmt, immer denselben Wert findet.

Zur Bestimmung des Äquivalentes des Kochsalzes verfuhr Eckhard zunächst so, daß er in die Röhre gesättigte Kochsalzlösung und festes Salz brachte, und um auf beiden Seiten der Membran während der ganzen Dauer des Versuches denselben Zustand zu erhalten, den endosmotischen Flüssigkeiten nur so lange dauern ließ, als in der Röhre sich noch festes Salz befand. Die Menge des eingedrungenen Wassers wurde aus der Gewichtszunahme der Röhre und die Menge des fortgewanderten Salzes aus einer Analyse des Röhreninhalts bestimmt. Für Kochsalz ergab sich so der vorhin angegebene Wert 3,2.

¹⁾ Eckhard, Beiträge zur Physiologie herausgegeben von C. Eckhard, II. Bd. Gießen.

²⁾ Ludwig in Zeitschrift für rationelle Medicin. B. VIII.

³⁾ Eckhard, Poggend. Ann. Bd. CXXVIII. p. 61.

Um bei verdünnteren Lösungen ebenso auf beiden Seiten der Membran während des Versuches einen konstanten Zustand zu erhalten, liefs Eckhard während der Dauer desselben durch die Röhre einen Strom von einigen hundert Kubikcentimetern der benutzten Lösung gehen; aus deren Konzentrationsänderung, die immer sehr klein war, wurde dann die übergegangene Salz- und Wassermenge bestimmt. Für eine Lösung, die etwa 22 Teile Kochsalz in 100 Wasser gelöst hatte, ergab sich so als Äquivalent 2,88, für eine von 12,5 Theilen Salz auf 100 ergab sich 2,34; Eckhard fand also dasselbe mit abnehmender Konzentration kleiner.

Mit dieser Angabe Eckhards scheint mir indes eine andere nicht recht vereinbar, nach welcher sich immer dasselbe Äquivalent findet, wenn man eine gesättigte Lösung in andere Lösungen desselben Salzes diffundieren läßt, welches auch die Konzentration der äufsern Lösung ist.

Es fragt sich nun, nach Vorführung der wichtigsten, die endosmotischen Erscheinungen betreffenden Thatfachen, wie haben wir uns die Volumänderungen der Flüssigkeiten, den Austausch nach verschiedenen Mengen zu erklären. Wir lassen hier die von Jolly gegebene Theorie folgen, da sie die einfachste ist und die wenigsten Hypothesen voraussetzt.

Wird eine poröse, mit unzählig vielen kapillaren Zwischenräumen versehene Membran in eine Flüssigkeit getaucht, so beweisen uns Versuche, dafs je nach der Molekularanziehung zwischen der Substanz der Membran und der Flüssigkeit verschiedene Mengen Flüssigkeit von der Membran resorbiert werden; so nehmen 100 Gewichtsteile trockene Ochsenblase in 24 Stunden auf

268	Gewichtsteile Wasser,
133	„ Kochsalzlösung (1,214 spec. Gew.),
38	„ Weingeist (84 Proc.).

Wird deshalb eine Membran in ein Gemische zweier Flüssigkeiten getaucht, so wird sie von beiden nach Maßgabe ihrer Anziehung resorbieren, also auch aus einer Salzlösung gelöstes Salz und Wasser. Jolly nimmt an, dafs die Menge des resorbierten in einer Salzlösung gelösten Salzes überdies proportional sei der Dichtigkeit der Lösung.

Wenn eine Membran zur Trennung zweier Flüssigkeiten, etwa Wasser und Kochsalzlösung dient, so wird die Membran durch Molekularanziehung jeden der beiden getrennten Stoffe aufnehmen; die Quantität des aufgenommenen Kochsalzes ist aber verschieden nach der Dichtigkeit der Lösung. Dieser so mit zwei Stoffen imprägnierten Blase wird auf der einen Seite durch das daran liegende Wasser Kochsalz, auf der andern Seite durch das daran liegende Kochsalz Wasser entzogen; in verschiedenen Mengen jedoch, weil die resorbierten Stoffe in verschiedenen Mengen in der Blase enthalten sind, und weil die Resultierende aller Molekularanziehungen der gelösten Salztheile auf das Wasser verschieden ist, je nach der Dichtigkeit der Lösung. Nimmt man an, dafs die Resultierende proportional sei der Dichtigkeit der Lösung, so folgt hieraus, dafs das Verhältnis der sich austauschenden Stoffe für alle Dichtigkeitsgrade der Lösung konstant bleibt. Denn wird die Dichtigkeit der Lösung z. B. die Hälfte, so wird auch die resorbierte Salzmenge die Hälfte, das Wasser entzieht also der Blase nur die halbe Menge Salz; ebenso entzieht aber auch die Lösung, deren Dichte

die Hälfte ist, der Blase nur die halbe Menge Wasser. Sind die osmotischen Äquivalente nicht konstant, so muß man schließen, daß die osmotisierende Molekularanziehung der Lösungsdichtigkeit nicht einfach proportional zu setzen ist, sondern mit derselben in komplizierterer Beziehung steht.

§ 84.

Ausfluß der Flüssigkeiten. Toricellis Theorem. Wenn man den Boden oder die Seitenwand eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefäßes eine Öffnung macht, so fließt die Flüssigkeit mit einer gewissen Geschwindigkeit daraus hervor, welche um so größer ist, je höher das Niveau der Flüssigkeit über der Ausflußöffnung ist. Um diese Geschwindigkeit zu bestimmen, wollen wir uns ein Gefäß denken, in welchem trotz des Ausflusses durch regelmäßiges Nachfließen die Flüssigkeit auf demselben Niveau gehalten wird. Da die unten in der Öffnung ausfließende Flüssigkeit durch nachsinkende Flüssigkeit wieder ersetzt wird, so muß die ganze Flüssigkeit über der Ausflußöffnung befindliche Flüssigkeit in Bewegung geraten und sich mit einer gewissen Geschwindigkeit gegen die Ausflußöffnung hin bewegen. Dabei muß sich dann ferner sofort nach Beginn des Ausfließens in dem ganzen Gefäße ein stationärer Zustand einstellen, heißt, es muß durch jeden Querschnitt des Gefäßes in gleichen Zeiten gleiche Menge von Flüssigkeit hindurchgehen. Denn ist AB (Fig. 139) ein Querschnitt durch die Flüssigkeit des Gefäßes $MNOP$ und CD irgend ein anderer Querschnitt, so ist die zwischen diesen beiden Querschnitten vorhandene Flüssigkeitsmenge immer dieselbe; es muß daher in gleichen Zeiten in den zwischen den Querschnitten gelegenen Raum durch AB eben soviel Flüssigkeit eintreten, wie ihn durch den Querschnitt CD wieder verläßt.

Fig. 139.



Nennen wir nun die mittlere senkrecht gegen AB gerichtete Komponente der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen im Moment, als sie AB passieren, u , und die Größe des Querschnitts Q , so ist die Menge Flüssigkeit, die in der Zeiteinheit den Querschnitt AB passiert, gleich Qu . Wir bezeichnen u als die mittlere senkrecht gegen AB gerichtete Geschwindigkeitskomponente, denn in Wirklichkeit verläßt sich weder alle Teilchen senkrecht gegen AB , noch alle mit derselben Geschwindigkeit bewegen. Aber welches auch die Richtung der Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen sein mag, so können immer die in der Zeiteinheit durch AB hindurchtretende Flüssigkeitsteilchen durch einen senkrechten Zylinder darstellen, dessen Basis der Querschnitt AB ist und dessen Höhe u ist; diese Höhe u ist dann die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit, denn wenn alle Flüssigkeitsteilchen mit dieser Geschwindigkeit den Querschnitt AB durchlaufen, so verläßt eben soviel Flüssigkeit durch AB hindurchgehen, als wirklich verläßt.

Wir können immer die in der Zeiteinheit durch AB hindurchtretende Flüssigkeit durch einen senkrechten Zylinder darstellen, dessen Basis der Querschnitt AB ist und dessen Höhe u ist; diese Höhe u ist dann die mittlere Geschwindigkeit der Flüssigkeit, denn wenn alle Flüssigkeitsteilchen mit dieser Geschwindigkeit den Querschnitt AB durchlaufen, so verläßt eben soviel Flüssigkeit durch AB hindurchgehen, als wirklich verläßt.

Die Bedeutung für den Querschnitt CD , dessen Fläche Q' ist, ist die in der Zeiteinheit durch diesen hindurchtretende Flüssigkeitsmenge.

ssigkeit gleich $Q' \cdot u'$. Es ergibt sich somit

$$Q \cdot u = Q' \cdot u' \cdot \cdot \cdot \cdot (I),$$

er die mittleren Geschwindigkeiten, mit welchen die Flüssigkeitsteilchen verschiedenen Querschnitte passieren, verhalten sich umgekehrt wie die Fläche der Querschnitte.

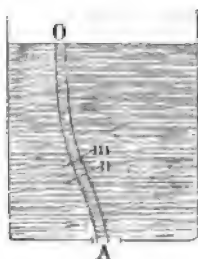
Der stationäre Zustand ist ferner dadurch charakterisiert, daß während der Dauer durch irgend ein beliebiges Element eines Querschnittes die Flüssigkeit immer mit derselben Geschwindigkeit und nach derselben Richtung hindurchgeht, daß also die Flüssigkeitsteilchen sich immer in denselben Bahnen bewegen; wird also das Element m einmal von der Flüssigkeit mit einer gewissen Geschwindigkeit nach der Richtung mn durchsetzt, bewegt sich während der ganzen Dauer des stationären Zustandes die Flüssigkeit in der gleichen Weise hindurch. Es folgt das einfach daraus, daß es immer genau dieselben Kräfte sind, welche die Flüssigkeit bewegen, daß die Bewegung immer unter denselben Umständen stattfindet. Dieser Satz gestattet uns das Gesetz zu bestimmen, nach welchem sich die Geschwindigkeit der Flüssigkeit im Innern des Gefäßes ändert und dann mit Hilfe von Gleichung (I) die Geschwindigkeit in der Ausflußöffnung zu berechnen.

Ist nämlich AO der Weg, den ein Flüssigkeitselement von der Oberfläche bis zur Ausflußöffnung zurücklegt, so werden alle bei O die Oberfläche verlassenden Flüssigkeitselemente denselben Weg mit derselben Geschwindigkeit zurücklegen, es wird also der Kanal stetig mit Flüssigkeit erfüllt sein, die sich in der Richtung dieses Kanals bewegt. Sei nun bei m in der Tiefe h unter der Oberfläche ein Querschnitt des Kanals als gleich q , und sei v die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit den Querschnitt durchsetzt, so daß in der Zeit dt ein Flüssigkeitsvolumen $q \cdot v \cdot dt$ durch diesen Querschnitt durchfließen. Dabei, während jedes Flüssigkeitsteilchen den Weg $v \cdot dt$ zurücklegt, ist es von dem Querschnitt m zu dem um $v \cdot dt$ entfernten Querschnitt n gelangt, nimmt die Geschwindigkeit um dv zu, so daß der Querschnitt n mit der Geschwindigkeit $v + dv$ passiert wird. Diesen Geschwindigkeitszuwachs, den das Flüssigkeitsvolumen $q \cdot v \cdot dt$ in der Zeit dt erhält, können wir mit Hilfe der die Flüssigkeit bewegendes Kräfte bestimmen. Ist s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, g die Beschleunigung im freien Fall, so daß $\frac{s}{g}$ die Masse der Volumeinheit der Flüssigkeit, so ist $\frac{s}{g} \cdot q \cdot v \cdot dt$ die in der Zeit dt durch m passierende Flüssigkeitsmenge, welche auf dem Wege mn in der Zeit dt den Geschwindigkeitszuwachs dv erhält. Die in der Zeit dt dieser Masse durch die wirksamen Kräfte erteilte Bewegungsgröße ist somit

$$\frac{s}{g} \cdot q \cdot v \cdot dt \cdot dv.$$

Diese Bewegungsgröße muß gleich dem Produkte aus der diesen Geschwindigkeitszuwachs bewirkenden Kraft in die Zeit dt sein. }

Fig. 131.



bewegende Kraft ist zunächst die der Bewegungsrichtung parallele Komponente der Schwere der herabsinkenden Masse. Das Gewicht dieser Masse ist $s \cdot q \cdot v \cdot dt$; ist nun α der Winkel, den die Verbindungslinie der beiden Schnitte m und n mit der vertikalen bildet, so ist die der Bewegungsrichtung parallele Komponente des Gewichtes

$$s \cdot q \cdot v \cdot dt \cdot \cos \alpha.$$

Da $v \cdot dt$ der Abstand der beiden Schnitte m und n ist, so ist $v \cdot dt \cdot \cos \alpha$ der vertikale Abstand des Schnittes n von m , oder der Zuwachs, den die von der Oberfläche gerechnete Tiefe h erfährt, wenn die Flüssigkeit von dem Schnitte m zu dem Schnitte n herabsinkt; setzen wir diese gleich dh , so wird die der Bewegungsrichtung parallele Komponente der Schwere

$$s \cdot q \cdot dh.$$

In der Schicht m wirkt ferner auf die Flüssigkeit ein gewisser Druck, der für die Flächeneinheit gleich p sei; in der tiefer liegenden Schicht p ist dieser Druck ein größerer, setzen wir ihn $p + dp$. Da die Flüssigkeit sich von einer Stelle geringeren zu einer solchen größeren Druckes bewegt, so wirkt diese Vergrößerung des Druckes der Bewegung entgegen, und dieser auf die Fläche q wirkende Gegendruck ist $q \cdot dp$. Die während der Zeit dt auf die Flüssigkeit wirkende Kraft ist somit

$$s \cdot q \cdot dh - q \cdot dp.$$

Da die durch diese Kraft der Flüssigkeit erteilte Bewegungsgröße dem Produkte aus der Kraft in die Zeit, in welcher sie der Flüssigkeit die Bewegungsgröße erteilt hat, gleich sein muß, so folgt

$$\frac{s}{g} \cdot q \cdot v \cdot dv \cdot dt = (s \cdot q \cdot dh - q \cdot dp) dt,$$

oder wenn wir auf beiden Seiten durch $q dt$ dividieren,

$$\frac{s}{g} \cdot v \cdot dv = s \cdot dh - dp.$$

Diese Gleichung liefert uns die Zunahme der Geschwindigkeit, wenn die Flüssigkeit um die Höhe dh herabsinkt. Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit die Oberfläche, in welcher $h=0$, der Druck $p=p_0$ etwa gleich dem Drucke der Atmosphäre ist, verläßt mit v_0 , so erhalten wir die Geschwindigkeit v in der Tiefe h , wo der Druck gleich p ist, wenn wir für alle zwischen der Oberfläche und der Tiefe h liegenden Schichten den Wert dv bestimmen und dann alle diese Ausdrücke summieren, also in der Summe

$$\int_{v_0}^v \frac{s}{g} v dv = \int_{h=0}^h s dh - \int_{p_0}^p dp.$$

In schon mehrfach gezeigt Weise sind diese Summen

$$\frac{1}{2} \frac{s}{g} (v^2 - v_0^2) = s \cdot h - (p - p_0) \dots \dots (II),$$

eine Gleichung, welche uns, wenn wir v_0 , p und p_0 kennen, die Geschwindigkeit v in der Tiefe h zu berechnen gestattet.

Wir haben bei dieser Entwicklung einen Flüssigkeitsfaden vom Querschnitt q von übrigens beliebiger Lage vorausgesetzt und für ihn nur die Bedingung gemacht, daß er die Bahn eines Elementes der Flüssigkeit von der Oberfläche bis zur Ausflußöffnung sei. Da wir über die Lage dieses Flüssigkeitsfadens keine weitere Voraussetzung gemacht haben, so gilt diese Gleichung für alle Flüssigkeitsfäden, oder für die ganze ausströmende Flüssigkeit, so daß uns obige Gleichung ganz allgemein die Geschwindigkeit v in der Tiefe h unter der Oberfläche liefert.

Ist nun H die Tiefe der Ausflußöffnung unter dem Niveau, p_1 der Druck in derselben, welcher der Bewegung der Flüssigkeit entgegenwirkt, so erhalten wir die Ausflußgeschwindigkeit v_1 aus der Gleichung

$$v_1^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) = 2gH - 2 \frac{g}{s} (p_1 - p_0).$$

Um in dieser Gleichung noch den Quotienten $\frac{v_0^2}{v_1^2}$ zu bestimmen, dient die Gleichung (I). Ist die Oberfläche horizontal, somit in ihr ein überall gleicher vertikaler Druck vorhanden, so ist die Bewegung dort in allen Punkten senkrecht abwärts gerichtet, es ist also v_0 gleichzeitig die mittlere senkrecht gegen den Querschnitt der Flüssigkeit gerichtete Geschwindigkeit. Setzen wir dann weiter eine Ausflußöffnung voraus, deren Querschnitt gegen den des Gefäßes nur klein ist, so werden wir auch in dieser die Geschwindigkeit als senkrecht gegen die Ausflußöffnung gerichtet und als überall gleich ansehen dürfen, einerlei ob die Öffnung im Boden oder in derselben Tiefe H unter dem Niveau der Flüssigkeit in einer Seitenwand sich befindet. Ist dann Q_0 der Querschnitt des Gefäßes in der Oberfläche der Flüssigkeit, q_1 der der Ausflußöffnung, so ist nach Gleichung (I)

$$Q_0 \cdot v_0 = q_1 \cdot v_1, \quad \frac{v_0^2}{v_1^2} = \frac{q_1^2}{Q_0^2},$$

mit

$$v_1^2 \left(1 - \frac{q_1^2}{Q_0^2}\right) = 2gH - 2 \frac{g}{s} (p_1 - p_0).$$

Findet der Ausfluß in freier Luft statt, und wirkt auf die Oberfläche ebenfalls nur der Druck der Atmosphäre, so ist $p_1 = p_0$, da der Druck der Atmosphäre auf die Flüssigkeitsoberfläche und die Ausflußöffnung dann dieselbe ist, und es wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gH}{\left(1 - \frac{q_1^2}{Q_0^2}\right)}}.$$

Ist, wie wir voraussetzten, q_1 gegen Q_0 sehr klein, so ist der Nenner unter dem Wurzelzeichen nicht merklich von 1 verschieden, und dann gehen wir zu dem Ausdruck

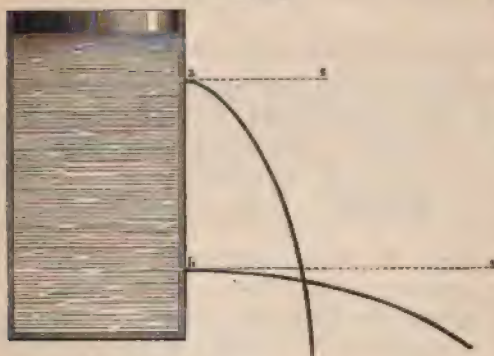
$$v_1 = \sqrt{2gH}.$$

Die Ausflußgeschwindigkeit ist der Quadratwurzel aus der Druckhöhe der Flüssigkeit direkt proportional, oder gleich der Geschwindigkeit, welche frei die Höhe der Flüssigkeit durchfallender Körper im Niveau der Ausflußöffnung erlangt hat, ein Satz, der schon von Toricelli erkannt wurde und der den Namen des Toricellischen Theorems führt.

Eine wichtige Folgerung dieses Satzes ist die, daß die Ausflußgeschwindigkeit einer Flüssigkeit durchaus unabhängig ist von der Natur derselben, gerade so wie alle Körper gleich schnell fallen, daß dieselbe nur abhängig ist von der Druckhöhe im Gefäße. Diese Folgerung hat nichts Auffallendes, wenn man bedenkt, daß bei gleichen Druckhöhen bei schwereren Flüssigkeiten auch in demselben Verhältnis die Masse der zu bewegendenden Flüssigkeit zunimmt, wie wegen des Gewichtes der drückenden Säule der Druck zunimmt.

Um dieses Gesetz experimentell zu bestätigen, genügt es, die Flüssigkeit bei konstanter Druckhöhe aus einer seitlichen Öffnung eines Gefäßes ausfließen zu lassen. Da jedes Flüssigkeitsteilchen dann die Öffnung mit

Fig. 132.



einer konstanten horizontalen Geschwindigkeit verläßt, so verhält es sich gerade wie ein horizontal geworfener Körper. Es gelten daher dieselben Gesetze, welche wir § 10 für geworfene Körper entwickelten. Der ausfließende Strahl muß die Gestalt einer Parabel haben (Fig. 132), deren einzelne Punkte man für jede Zeit leicht bestimmen kann. Gehen wir von dem Punkte a oder b aus, und nennen den

horizontalen Abstand des Wasserteilchens von der Wandfläche zur Zeit t , x , und den vertikalen Abstand von a oder b , y , so muß zugleich für jedes Wasserteilchen

$$y = \sqrt{2gH} \cdot t, \quad x = \frac{g}{2} t^2$$

sein, daß heißt, in einem horizontalen Abstand $\sqrt{2gH} \cdot t$ muß das Teilchen um $\frac{g}{2} t^2$ unter der Öffnung liegen. Die zusammengehörigen x und y erhalten wir dadurch, daß wir t eliminieren

$$t^2 = \frac{y^2}{2gH} \quad t^2 = \frac{2x}{g}$$

$$y^2 = \frac{4gHx}{g} = 4Hx.$$

Man kann sich bei Unterhaltung eines kontinuierlichen Wasserstrahles davon überzeugen, daß die Gestalt desselben der Theorie entspricht.

Die Gleichung (II) läßt noch eine bemerkenswerte Folgerung zu über die Verteilung des Druckes im Innern einer fließenden Flüssigkeit, sie zeigt, daß der Druck in derselben ein ganz anderer ist, als er in einer ruhenden Flüssigkeit sich nach den Gesetzen der Hydrostatik ergibt. Lösen wir nämlich die Gleichung (II) nach p auf, so erhalten wir für den in der Tiefe h vorhandenen Druck p

$$p = p_0 + sh - \frac{1}{2} \frac{s}{g} (v^2 - v_0^2).$$

Die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite geben den im Niveau h in ruhender Flüssigkeit vorhandenen hydrostatischen Druck, man sieht also unmittelbar, daß der Druck in der fließenden Flüssigkeit kleiner ist, um eine GröÙe, die dem Quadrate der Strömungsgeschwindigkeit proportional ist. Man bezeichnet diesen Druck p als den hydraulischen Druck.

Die GröÙe dieses Druckes läÙt sich leicht auswerten in GefäÙen von solcher Form, daß die Geschwindigkeit v gleichzeitig die gegen die Querschnitte senkrechte Geschwindigkeit ist, also in nicht zu engen Röhren etwa, welche aus einem gröÙern Reservoir vertikal absteigen. Ist der Querschnitt des Reservoirs gegen jenen der Röhren hinreichend groß, so können wir zunächst $v_0 = 0$ setzen. Ist dann H die Tiefe der Ausflußöffnung, q_1 der Querschnitt der Ausflußöffnung und q der Querschnitt der Röhre in der Tiefe h unter der Oberfläche, so ist

$$q \cdot v = q_1 \cdot v_1,$$

somit

$$p = p_0 + sh - \frac{1}{2} \frac{s}{g} \left(\frac{q_1}{q} \right)^2 v_1^2,$$

und wenn die Röhren nicht zu eng sind und der Ausfluß in freier Luft erfolgt,

$$v_1^2 = 2gH$$

$$p = p_0 + sh - s \left(\frac{q_1}{q} \right)^2 H$$

$$p = p_0 + s \left(h - \left(\frac{q_1}{q} \right)^2 H \right).$$

Je nach dem Verhältnis der Querschnitte q_1 und q kann das zweite Glied auf der rechten Seite positiv, Null oder negativ werden. Ist z. B. $h = 0,25 H$ und $q = 2q_1$, so wird das zweite Glied Null, der dort vorhandene Druck ist also einfach gleich dem auf der Oberfläche der Flüssigkeit lastenden Drucke. Fließt also die Flüssigkeit in freier Luft aus, so würde man an einer solchen Stelle die Gefäßwand durchbohren können, ohne daß dort Flüssigkeit austräte, oder daß die Bewegung der Flüssigkeit im geringsten gestört wird.

Ist $q_1 = q$, fließt also die Flüssigkeit durch hinreichend weite cylindrische Röhren, deren unterster Querschnitt die Ausflußöffnung ist, aus einem gröÙern Reservoir aus, so wird

$$p = p_0 - s(H - h),$$

es ist also in allen Punkten dieser Röhren der Druck kleiner als der auf der Oberfläche der Flüssigkeit wirkende Druck, der Druck wird um so kleiner, je größer $H - h$ ist. Anwendungen dieses Satzes werden wir im nächsten Kapitel in der Sprengelschen Luftpumpe und den dieser ähnlich konstruierten Apparaten kennen lernen.

§ 85.

Ausflussmenge. Wie wir im vorigen Paragraphen erwähnten, läÙt sich das Toricellische Theorem durch Beobachtung der parabolischen Bahn eines horizontal ausfließenden Wasserstrahls experimentell nachweisen.

Man kann indes dieses Theorem noch in anderer Weise prüfen, indem man die Menge der aus einer kleinen Öffnung von bekanntem Querschnitt anfließenden Flüssigkeit mißt, und diese mit der durch das Toricellische Theorem gegebenen vergleicht. Ist die Ausflußgeschwindigkeit gleich $\sqrt{2gH}$ und der Querschnitt der Öffnung gleich q_1 , so tritt in der Zeit aus der Öffnung ein Cylinder hervor, dessen Volumen, die in der Zeit austretende Flüssigkeitsmenge, m gleich ist

$$m = q_1 \cdot t \cdot \sqrt{2gH}.$$

Bezeichnen wir mit s das specifische Gewicht der Flüssigkeit, so ist das Gewicht p der ausgeflossenen Flüssigkeit

$$p = s \cdot m = s \cdot q_1 \cdot t \cdot \sqrt{2gH}.$$

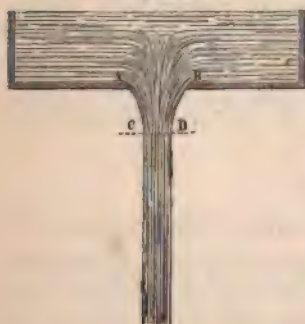
Sammelt man nun aber die ausgeflossene Flüssigkeitsmenge in einem Gefäß von bekanntem Gewicht, und bestimmt man die wirklich ausgeflossene Menge durch Wägung, so findet man dieselbe stets kleiner, und zwar so, daß das Gewicht derselben p'

$$p' = 0,62 \cdot p,$$

die ausgeflossene Menge also nicht ganz $\frac{2}{3}$ der theoretisch berechneten beträgt.

Dieses Resultat, welches sich unmittelbar aus den Beobachtungen ergibt, steht demnach mit der Theorie in Widerspruch. Jedoch ist dieser Widerspruch nur scheinbar, denn die Voraussetzungen, unter denen wir die Ausflußmengen theoretisch entwickelten, sind nicht vollständig; wir haben einige störende Umstände vernachlässigt, welche uns eine genauere Betrachtung des ausfließenden Strahles kennen lehrt.

Wenn man nämlich den aus einer Bodenöffnung ausfließenden Strahl aufmerksam betrachtet, so findet man, daß er nicht, wie wir es voraus-



setzten, cylindrisch ist, sondern daß er sich sehr rasch unter der Öffnung zusammenzieht und eine kegelförmige Gestalt annimmt (Fig. 133) und erst von CD ab mit nahezu cylindrischer Form weiter herabfällt. Diese Kontraktion haben wir bisher außer Acht gelassen. Denn nach unseren bisherigen Betrachtungen dürfte nur eine geringe und während des ganzen Strahles, soweit er zusammenhängt, regelmäßige Zusammenziehung des Strahles stattfinden, die sich leicht näher bestimmen läßt. Nach dem Verlassen der Ausflußöffnung wird nämlich die Bewegung

der Flüssigkeit durch die Wirkung der Schwere eine gleichmäßig beschleunigte.

Eine Schicht, welche die Öffnung mit der Geschwindigkeit v_1 verlassen hat, durchläuft demnach in der Zeit T die Strecke S

$$S = v_1 \cdot T + \frac{g}{2} \cdot T^2$$

Nach der Zeit T verläßt eine zweite Schicht die Öffnung, welche von der ersten um S entfernt ist. Dieser Abstand muß sich aber vergrößern; denn betrachten wir ihn nach der Zeit t , so ist der Abstand der ersten Schicht von der Öffnung zur Zeit $T + t$ gleich $S + S'$

$$S + S' = v_1(T + t) + \frac{g}{2}(T + t)^2,$$

der Abstand der zweiten Schicht S'' aber

$$S'' = v_1 \cdot t + \frac{g}{2} \cdot t^2.$$

Der Abstand beider Schichten daher

$$S + S' - S'' = v_1(T + t) - v_1 t + \frac{g}{2} \{(T + t)^2 - t^2\},$$

$$S + S' - S'' = v_1 \cdot T + \frac{g}{2} \cdot T^2 + g \cdot T \cdot t = S + g \cdot T \cdot t.$$

Der Abstand der Schichten wächst demnach proportional T ; soll der Strahl zusammenhängend sein, so muß er in eben dem Verhältnis enger werden, also regelmäßig und nahezu in demselben Verhältnis, als er sich von der Öffnung entfernt. Statt dessen beobachtet man sehr nahe unter der Öffnung eine sehr rasche Zusammenziehung des Strahles, so zwar, daß der Querschnitt desselben in einem Abstände von der Öffnung, der ungefähr dem Halbmesser der Öffnung gleich ist, nur mehr gleich $\frac{2}{3}$ von dem Querschnitte der Öffnung ist. Von da an zieht sich der Strahl dann nur mehr in der Weise zusammen, wie er es nach unseren obigen Entwicklungen thun muß, bis er in Tropfen zersplittert.

Diese anormale Kontraktion des Strahles, welche man als *Contractio venae* bezeichnet, vermindert also den Querschnitt desselben so, daß er weniger als $\frac{2}{3}$ der Ausflußöffnung wird; sie ist für größere Öffnungen und stärkere Drucke sogar noch bedeutender.

Es ist klar, daß dadurch die Ausflußmenge eine kleinere werden muß, und die Erfahrung hat ergeben, daß diese sich gerade so verhält, als sei die engste Stelle des Strahles dort, wo die *Contractio venae* aufhört, die wirkliche Ausflußöffnung. Die Erfahrung ergibt nämlich, wie wir oben, daß die wirkliche Ausflußmenge m' ist

$$m' = 0,62 m,$$

oder

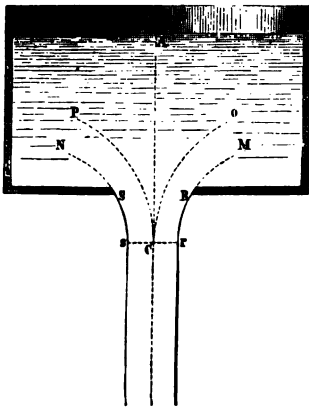
$$p' = 0,62 \cdot s \cdot q_1 \cdot t \cdot \sqrt{2gH}.$$

Mannigfache Versuche, die Störungen, welche die Kontraktion veranlassen, mit in Rechnung zu ziehen, und so auch die Menge p' theoretisch zu berechnen, haben noch zu keinem befriedigenden Resultate geführt. Indes können wir uns doch über die Gründe Rechenschaft geben, welche die Kontraktion veranlassen. Es ist nicht, wie wir im vorigen Paragraphen annahmen, die Geschwindigkeit aller die Öffnung passierenden Flüssigkeitsteilchen auch senkrecht gegen die Öffnung gerichtet.

Es bewegen sich nämlich nicht nur die senkrecht über der Öffnung liegenden Flüssigkeitsteile, sondern wegen der freien Beweglichkeit derselben auch die seitlich liegenden gegen die Ausflußöffnung hin. Es werden daher z. B. die Wasserteilchen rechts von der Öffnung in der

Richtung MR und OC , die Teilchen links in NS und PC sich bewegen. Die zwischen M und O , N und P gelegenen Wasserteilchen haben eine seitliche gegen das Innere des Strahles gerichtete Geschwindigkeit. Der Strahl besteht demnach aus einer konischen Hülle, welche aus divergierenden Flüssigkeitsfäden gebildet ist. Dort, wo diese von entgegengesetzter Seite kommenden Flüssigkeitsfäden sich treffen, muß die

Fig. 134.



von der beschleunigten Bewegung herrührende Querschnittsverminderung, die eigentliche Contractio venae, ihr Ende erreichen. Dort die seitlichen Geschwindigkeiten entgegengesetzter Seite kommenden Teilchen sich aufheben, und eine resultierende herabgehende Bewegung ergeben. Es ist eigentlich nicht die Öffnung, sondern der Querschnitt der Ausflußöffnung, sondern durch die Kontraktionsstelle C geführt zu denken, da erst von dort an die Flüssigkeit unserer Annahme gemäß sich vertikal bewegt, also von dort erst die Voraussetzungen unserer Berechnungen stattfinden. Da nun die Kontraktion an dieser Stelle sehr stark ist, daß der Querschnitt bei S nur 0,62 der Öffnung, so kann auch die

Ausflußmenge nur 0,62 der vorhin berechneten sein.

Aus dieser Erklärung läßt sich auch leicht der Einfluß von Ansatzröhren an die Ausflußöffnung ableiten. Wenn man nämlich die Flüssigkeit anstatt durch eine einfache Wandöffnung durch kurze Röhren ausläßt, so wird dadurch die Ausflußmenge je nach der Gestalt der Röhren verschieden modificiert. Hat die Ausflußröhre eine konische Gestalt, die sich der Gestalt des ausfließenden Strahles anschmiegt, so wird die Ausflußmenge nicht modificiert; sehen wir aber als Ausflußöffnung den Querschnitt der Röhre an ihrem Ende an, so wird die Ausflußmenge vergrößert, da sie so groß ist, als das Toricellische Theorem ohne Berücksichtigung der Reibung verlangt.

Wendet man aber eine cylindrische Röhre an, welche von der Flüssigkeit benetzt wird, oder setzt man an das erste konische Rohr ein zweites konisches Rohr an, welches sich wieder erweitert und allmählich in einen Cylinder übergeht von der Weite der Ausflußöffnung, so wird die Ausflußmenge der ausfließenden Flüssigkeit bedeutend gesteigert, so daß 0,8—theoretischen Ausflußmenge ausfließt. Das ist jedoch nur dann der Fall, wenn der Strahl rings an den Wänden des Cylinders adhärirt, thut er das nicht, so wird die Ausflußmenge nicht geändert.

Durch die konischen Ansatzröhren, welche sich der Gestalt des ausfließenden Strahles annähern, wird die Bewegung der Flüssigkeiten nicht geändert. Durch die Reibung an der Röhrenwand um ein geringes verzögert. Durch cylindrische Ausflußröhren wird aber durch die Adhäsion der Flüssigkeit an den Wänden des Cylinders der kontrahierte Strahl wieder verbreitert und nahezu cylindrisch gemacht. Dadurch würde der Strahl zerreißen.

tern des Rohres ein leerer Raum entstehen müssen. Dem wirkt aber nun die Kohäsion des Wassers und der äußere Luftdruck entgegen, der zum Theil die Flüssigkeit in der Röhre nachtreibt, zum Theil den Ausfluß etwas verzögert. Dadurch aber, daß der ausfließende Strahl nahezu cylindrisch ist, vermehrt sich die Menge der ausfließenden Flüssigkeit.

Wenn man sich auch zum Theil über diese die Ausflussmengen betreffenden Thatsachen Rechenschaft geben kann, so sind wir doch noch weit entfernt, dieselben vollständig verstehen und aufklären zu können. In den meisten Fällen, besonders wenn der Ausfluß anstatt aus einfachen Wandungen aus Röhrensystemen erfolgt, welche noch dazu zum Theil gekrümmt sind, finden wir uns auf die Resultate der Erfahrung angewiesen, um die Eigenschaften der ausfließenden Flüssigkeit zu bestimmen, da die theoretische Behandlung zu viele Schwierigkeit bietet.

§ 86.

Reibung der Flüssigkeiten. Die am Schlusse des vorigen Paragraphen hervorgehobene Abweichung in dem Verhalten der Flüssigkeiten gegenüber den von uns für die einfachsten Fälle abgeleiteten Gesetzen kann nicht auffallend sein, da wir bei unserer Ableitung zwei Umstände außer Acht gelassen haben. Zunächst haben wir die Flüssigkeiten als vollkommen beweglich vorausgesetzt, das heißt angenommen, daß die Bewegung eines Flüssigkeitsfadens durch benachbarte Flüssigkeit nicht alteriert wird, eine Annahme, welche nur annähernd richtig sein kann. Denn da die Moleküle der Flüssigkeit einander anziehen, so muß eine bewegte an einer ruhenden oder langsamer sich bewegenden Flüssigkeit vorüberfließende nicht eine Reibung erfahren, welche ihre Geschwindigkeit verkleinert. Bei wird dann gleichzeitig, wegen der sehr leichten Beweglichkeit der Moleküle, die ruhende Schicht eine Bewegung im Sinne der bewegten nicht oder die langsamer sich bewegende eine Beschleunigung im gleichen Sinne erhalten, und die Beschleunigung der langsamern wird gleich sein der Verzögerung der schneller sich bewegenden Schicht. Die Reibung wirkt so auf die rascher bewegte Schicht wie eine die Bewegung verzögernde, auf die langsamer sich bewegende wie eine dieselbe beschleunigende Kraft. In der Größe dieser Kraft werden wir annehmen dürfen, daß sie der Differenz der parallelen Geschwindigkeiten proportional ist, um so mehr, je größer die Geschwindigkeitsdifferenz benachbarter Schichten immer nur äußerst gering sein kann. Außerdem wird die Kraft der Flächenausdehnung proportional sein, mit der sich die Schichten berühren; Annahmen über die Wirkung der Reibung, welche schon Newton gemacht hat. Weiter nimmt man an, daß diese Kraft unabhängig ist von dem Drucke, der im Innern der strömenden Flüssigkeit vorhanden ist¹⁾.

Der zweite von uns bei der Ableitung der Ausflussgesetze außer Acht gelassene Umstand ist die Reibung, welche die bewegte Flüssigkeit an der Wandung des Gefäßes erfährt. Wir wissen, daß zwischen den festen und flüssigen Körpern stets molekulare Kräfte thätig sind, infolge deren die

¹⁾ Man sehe darüber *Hagenbach*, Poggend. Ann. Bd. CIX. *O. E. Meyer*, Poggend. Ann. Bd. CXIII. *Helmholtz*, Berichte der Wiener Akademie Bd. XLVI. *Stokes*, ebendort. *Stokes*, Cambridge Philosophical Transactions vol. VIII.

Flüssigkeiten mehr oder weniger fest an den Körpern haften; infolge dessen muß jedes an einer festen Wand vortüberbewegte Flüssigkeitsteilchen dieser Anziehung entgegen bewegt werden, es muß somit eine Verzögerung seiner Bewegung erfahren. Die diese Verzögerung bewirkende Kraft können wir der Geschwindigkeit, mit welcher die Flüssigkeit der festen Wand parallel bewegt wird und der Flächenausdehnung proportional setzen, mit welcher die Flüssigkeitsschicht die feste Wand berührt. Bezeichnen wir deshalb mit ε eine Konstante, so können wir die Verzögerung K , welche die an der festen Wand mit der Geschwindigkeit v die Wand in der Fläche berührende Flüssigkeitsschicht erfährt, setzen

$$K = \varepsilon \cdot f \cdot v.$$

Diese Konstante ε bezeichnet man als den Koeffizienten der äußeren Reibung; sie bedeutet die in der Flächeneinheit der Schicht wirksame Kraft, wenn die Flüssigkeitsschicht mit der Einheit der Geschwindigkeit an der Wand vortübergeht, oder was dasselbe ist, die Kraft, welche erforderlich ist, um die Flüssigkeitsschicht mit gleichförmiger Bewegung und der Einheit der Geschwindigkeit an der Wand vortüber zu führen; dieselbe hängt nur ab von der Natur der Flüssigkeit und der festen Wand, ebenso wie der Randwinkel, unter welchem die Flüssigkeit die feste Wand schneidet. In dem Falle, in welchem die feste Wand von der Flüssigkeit vollkommen benetzt wird, kann man den Wert dieses Koeffizienten sofort angeben, denn in dem Falle haftet die letzte Schicht einfach fest an der Wand, ohne an der Bewegung der übrigen Flüssigkeit teilzunehmen. Die Geschwindigkeit der Bewegung an der Wand ist also immer gleich Null, die Verzögerung ist unendlich groß, es muß also ε unendlich groß sein.

Ganz derselbe Ausdruck, der die Verzögerung an einer festen Wand darstellt, liefert uns auch die Verzögerung, welche eine Flüssigkeit erfährt, wenn sie sich an einer andern hinbewegt, wie z. B. Wasser über einer Quecksilberschicht, oder Quecksilber unter einer Wasserschicht; die Konstante ε bedeutet dann die Reibung zweier Flüssigkeiten an einander.

Um ganz ebenso die Verzögerung, welche die Bewegung einer Flüssigkeitsschicht durch die umgebende mit ihr, jedoch langsamer bewegte Flüssigkeit erfährt, ausdrücken zu können, denken wir uns einen Cylinder, durch welchen die Flüssigkeit fließe. In dem ersten Querschnitt des Cylinders mögen alle Flüssigkeitsteilchen die gleiche der Cylinderaxe parallele Geschwindigkeit haben; in einiger Entfernung von diesem Querschnitt hat dann aber die zunächst an der Wand befindliche Schicht eine gewisse Verzögerung erfahren, welche sich somit langsamer bewegt als die nach der Axe des Cylinders zu folgende Schicht; diese erfährt dann ebenso eine Verzögerung und wirkt infolge dessen wieder verzögernd auf die nächstliegende innere Schicht und so fort. Es wird sich somit die Geschwindigkeit in irgend einem zur Axe des Cylinders, also zur Strömungsrichtung senkrechten Querschnitte stetig ändern, sie wird, wenigstens dann, wenn die Flüssigkeit die Wand benetzt, wahrscheinlich aber immer, von dem Rande gegen die Mitte stetig zunehmen. Daraus folgt dann weiter, daß die Geschwindigkeit zweier benachbarten, das ist nur um die Distanz der Flüssigkeitsmoleküle von einander entfernten Flüssigkeitsschichten auch nur unendlich wenig von einander verschieden sein kann. Nennen wir deshalb

die Geschwindigkeit einer Flüssigkeitsschicht im Abstände x von der Axe des Cylinders v , die Geschwindigkeit der nächstfolgenden, von der erstern um den Abstand dx zweier Moleküle entfernten Schicht $v + dv$, so würde nach den vorhin gemachten Annahmen die Kraft, welche auf die schneller bewegte Schicht verzögernd einwirkt,

$$K = \varepsilon_1 \cdot f \cdot dv,$$

wenn f die Fläche ist, in welcher sich die Schichten berühren, und ε_1 eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Konstante bedeutet, welche der äußeren Reibung bedingenden Konstanten ε entspricht.

Die Bestimmung dieser Konstanten ε_1 würde indes nicht ausführbar sein, da man den Wert von dv niemals angeben kann, ebensowenig wie den Wert von dx , den Abstand der Moleküle. Man definiert deshalb die Konstante der innern Reibung etwas anders. Nach der vorhin gemachten Entwicklung ist die Geschwindigkeit v abhängig von dem Abstände der betrachteten Schicht von der Axe des Cylinders, also eine Funktion von x . Wie wir nun in der Einleitung sahen, läßt sich dann, wenn $v = f(x)$, das Differential dv stets darstellen durch

$$dv = f'(x)dx,$$

wenn wir den ersten Differentialquotienten der Funktion mit $f'(x)$ bezeichnen. Setzen wir diesen Wert für dv ein und schreiben gleichzeitig für $f'(x)$ das ihm gleiche $\frac{dv}{dx}$, so wird

$$K = \varepsilon_1 dx \cdot f \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Da dx den Abstand zweier Moleküle der Flüssigkeit bedeutet, so ist für jede Flüssigkeit $\varepsilon_1 dx$ ebensogut eine Konstante wie ε_1 , bezeichnen wir sie mit η , so wird

$$K = \eta \cdot f \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Diese Konstante η bezeichnet man als den Koeffizienten der innern Reibung oder auch kurz als die Reibungskonstante¹⁾. Ihre Bedeutung läßt sich leicht angeben, es ist die Kraft, welche auf die Bewegung einer Flüssigkeitsschicht verzögernd einwirkt, wenn sie die benachbarte langsamer bewegte Schicht in der Flächeneinheit berührt, und wenn $\frac{dv}{dx}$ der Einheit gleich ist. Da nun dv der Unterschied der Geschwindigkeiten zweier um dx von einander entfernter Schichten ist, so bedeutet $\frac{dv}{dx}$ den Geschwindigkeitsunterschied zweier Schichten, welche um die Längeneinheit von einander entfernt sind, vorausgesetzt, daß jedesmal, wenn wir von einer Schicht zur nächstfolgenden um dx von ihr entfernten Schicht übergehen, der Geschwindigkeitsunterschied dv derselbe ist. Denn da dx der Abstand zweier Schichten ist, so ist $\frac{1}{dx} = n$ die Anzahl der in der Längeneinheit vorhandenen Schichten, somit ist, wenn dv der Unterschied in der Geschwindigkeit je zweier benachbarter Schichten ist, $dv \cdot \frac{1}{dx} = dv \cdot n$, der Unter-

¹⁾ O. E. Meyer, Poggend. Ann. CXIII.

schied der Geschwindigkeit der ersten und n -Schicht, also der um Längeneinheit von einander entfernten Schichten.

Man erkennt leicht, daß die innere und äußere Reibung der Flüssigkeiten die von uns berechnete Ausflußgeschwindigkeit verkleinern, aber auch gleichzeitig, daß es sehr schwierig ist, dieselben in Rechnung zu ziehen, selbst wenn man die Reibungskonstanten kennt, da man das Gesetz kennen muß, nach welchem sich die einander parallelen Geschwindigkeiten in einem zur Geschwindigkeitsrichtung senkrechten Schnitt ändern.

In einem Falle lassen sich die Rechnungen vollständig durchführen nämlich dann, wenn man die Flüssigkeiten durch ein horizontales cylindrisches kapillares Rohr mit kreisförmigem Querschnitt unter konstanter Druckhöhe ausfließen läßt. In dem Falle fließt nämlich die Flüssigkeit gleichförmiger Geschwindigkeit durch das Rohr hindurch, und weil das Rohr enge genug ist, so findet überhaupt nur eine der Cylinderaxe parallele Bewegung statt. In jedem zur Cylinderaxe senkrechten Querschnitt ist die Geschwindigkeit mit dem Abstände des betrachteten Flüssigkeitsteilchens von der Cylinderaxe, an allen gleich weit von der Axe gelegenen Punkten der Röhre ist aber die Geschwindigkeit dieselbe. Die Flüssigkeit teilt sich also in der Röhre in konzentrische Hohlzylinder, von denen jeder bestimmte, auf seiner ganzen Länge der Röhre gleiche Länge und Geschwindigkeit besitzt, welche aber von Cylinder zu Cylinder sich ändern.

Da die Bewegung für jeden dieser Cylinder eine gleichförmige ist, so folgt, daß die Beschleunigung, welche er durch die vorhandenen Reibungen erhält, gleich sein muß der Verzögerung, welche er durch die Reibung erfährt, denn nur wenn die Beschleunigungen und Verzögerungen sich heben, kann die Bewegung eine gleichförmige sein.

Wir denken uns einen der Flüssigkeitscylinder in dem Abstande x von der Axe, die Dicke seines Mantels sei dx , von diesem Cylinder betrachten wir ein Stück von der Länge dl , welches sich im Abstande l vom Beginne der kapillaren Röhre befindet. Ist der hydraulische Druck an dem Punkte l gleich p , so wird er am andern Ende des von uns betrachteten Cylinderstückes gleich $p + dp$ sein, wo wir dp setzen können, wie

$$dp = \frac{dp}{dl} \cdot dl.$$

Da die Basis des Cylindermantels $2\pi x \cdot dx$ ist, so ist die infolge der Druckänderung um dp fortreibende Kraft

$$k = 2\pi x \frac{dp}{dl} \cdot dl \cdot dx.$$

Der betrachtete Hohlzylinder ist auf seiner innern und äußern Seite mit andern Hohlzylindern in Berührung, welche eine andere Geschwindigkeit besitzen, der der Axe näher ist um die Breite dx des Cylindermantels, welche einfach gleich ist dem Abstände der Moleküle, die näher, der äußere ist um dieselbe GröÙe weiter entfernt. Bezeichnen die Geschwindigkeitsdifferenz zwischen dem nächstinnern und dem betrachteten Cylinder mit dv , so ist

$$k_1 = \eta \cdot 2\pi x dl \cdot \frac{dv}{dx}$$

Kraft, welche infolge der Reibung an dem innern Cylinder die Geschwindigkeit des betrachteten Cylinders zu vermehren strebt, da die Geschwindigkeit der Bewegung von der Axe nach außen abnimmt.

Nennen wir die Differenz der Geschwindigkeiten des betrachteten und nächstfolgenden Cylinders dv' , so ist die Kraft, mit welcher der betrachtete Cylinder in seiner Bewegung verzögert wird, da der äußere Um des betrachteten Cylinders $2\pi(x + dx)$ ist,

$$k'_1 = \eta \cdot 2\pi(x + dx)dl \cdot \frac{dv'}{dx}.$$

Setzen wir nun $dv' = dv + d^2v$, wo d^2v dann angibt, um wieviel oder weniger sich die Geschwindigkeit ändert, wenn man von dem betrachteten Cylinder sich zu dem nächstäußern, als wenn man zu dem stinnern übergeht, so wird

$$\begin{aligned} k'_1 &= \eta 2\pi(x + dx)dl \left(\frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} dx \right) = \\ &= \eta 2\pi x dl \frac{dv}{dx} + \eta 2\pi dx dl \frac{dv}{dx} + \eta 2\pi x dl \frac{d^2v}{dx^2} dx \\ &\quad + \eta 2\pi dl \frac{d^2v}{dx^2} dx^2. \end{aligned}$$

Das vierte Glied dieses Ausdrucks ist gegen die übrigen, da es mit Quadrate von dx multipliciert ist, verschwindend klein, so daß es vernachlässigt werden darf; das erste Glied ist gleich k_1 , so daß wir erhalten

$$k'_1 = k_1 + \eta 2\pi dx \cdot dl \left(\frac{dv}{dx} + x \frac{d^2v}{dx^2} \right).$$

Wie wir oben sahen, folgt daraus, daß die Bewegung in der Röhre gleichförmige ist, daß die beschleunigenden und verzögernden Kräfte aufheben; da nun k und k_1 die beschleunigenden, k'_1 die verzögernden so ist

$$\begin{aligned} k + k_1 &= k'_1 \\ 2\pi x \frac{dp}{dl} dl dx &= \eta 2\pi dx dl \left(\frac{dv}{dx} + x \frac{d^2v}{dx^2} \right) \\ \frac{dp}{dl} &= \left\{ \frac{1}{x} \frac{dv}{dx} + \frac{d^2v}{dx^2} \right\} \cdot \eta, \end{aligned}$$

Gleichung, welche nach den Regeln der Differentialrechnung die hydraulischen Drucke an den verschiedenen Stellen der Röhre und die Geschwindigkeiten v der einzelnen Schichten zu berechnen gestattet¹⁾. Diese Benutzung würde hier zu weit führen, es genüge hier, die Resultate anzunehmen. Ist der Druck am Anfange des kapillaren Rohres gleich p_a , am Ende, dort, wo die Flüssigkeit ausfließt, p_e , so ist, wenn L die Länge des Rohres ist,

$$p = p_a - \frac{p_a - p_e}{L} \cdot l.$$

¹⁾ Man sehe *Hagenbach*, Poggend. Ann. Bd. CIX. *Jacobson*, *Reichert* und *Bois*, Archiv für Anatomie und Physiologie Jahrg. 1860, p. 80, der dort die von *Bois* gegebene Ableitung mitteilt, welche die oben entwickelte Gleichung in einfacher Weise liefert; *Helmholtz*, Berichte der Wiener Akademie Bd. XL.

Um die Geschwindigkeit v zu bestimmen, ist darauf zu achten, an der Röhrenwand, wo also $x = r$ gleich dem Radius der Röhre ist, falls eine Reibung stattfindet, welche die Geschwindigkeit der äußeren Schicht mit bedingt. Bezeichnen wir die Konstante der äußeren Reibung wie vorher mit ε , so erhält man für die Geschwindigkeit einer Schicht, deren Abstand von der Cylinderaxe gleich x ist,

$$v = \frac{p_a - p_e}{4 \eta \cdot L} (R^2 - x^2) + \frac{p_a - p_e}{2 \varepsilon \cdot L} \cdot R$$

und schließlich für das Volumen der in der Zeiteinheit ausgeflossene Flüssigkeit

$$V = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8 \eta \cdot L} (R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} \cdot R^3).$$

Für eine Flüssigkeit, welche die Röhrenwand benetzt, ist, wie schon vorhin hervorhoben, ε unendlich groß, somit das zweite Glied in der Klammer gleich Null, für solche Flüssigkeiten wird somit

$$V = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^4$$

oder das in der Zeiteinheit ausströmende Flüssigkeitsvolumen ist dem vierten Potenzen der Drucke und der vierten Potenz des Radius der Länge der Röhre und der innern Reibungskonstante umgekehrt proportional.

Diese letztere Beziehung ist zu einer Prüfung der Theorie, und Bestätigung derselben durch den Versuch zur Bestimmung der Reibungskonstante sehr geeignet. Versuche über den Ausfluss lassen sich leichter anstellen als solche über die Druckverteilung, da letztere in kapillaren Ausflussröhren kaum mit Genauigkeit zu messen ist.

Die ersten Versuche über den Ausfluss durch kapillare Röhren sind schon vor der Inbetrachtung des Reibungswiderstandes von Hagen

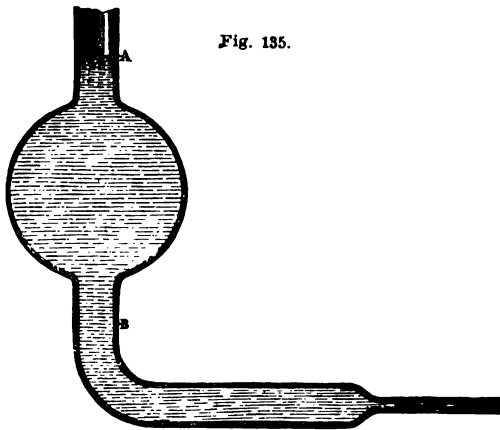


Fig. 135.

Poiseuille²⁾ ausgeführt, welche beide nach ihren Versuchen schon die obige Beziehung geprüften wurden, für welche Hagen dann auch eine theoretische Ableitung gab. Poiseuille wandte in seinen Versuchen ein U-förmiges, an beiden Enden angesetztes Röhrensystem (Fig. 135), welches an den Enden A und B mit zwei Marken versehen war. Der Rauminhalt zwischen den beiden Marken war genau kalibriert. Die

¹⁾ Hagen, Poggend. Ann. Bd. XLVI.

²⁾ Poiseuille, Mémoires des Savants étrangers. T. IX. Annales de chimie et de phys. III. Série T. VII. Poggend. Ann. Bd. LVIII.

Ihre war etwas unter B umgebogen und an dieselbe ein kapillares Rohr gesetzt, dessen Länge und Durchmesser sorgfältig gemessen waren. Der Apparat wurde nun durch Aufsaugen bis über A mit Flüssigkeit gefüllt, dann mit Gefäßen voll komprimierter Luft in Verbindung gesetzt, welche auf die Oberfläche der Flüssigkeit einen ganz konstanten Druck ausübten, der mittels passender Druckmesser gemessen wurde. Es wurden dann die Zeiten beobachtet, welche die den Raum zwischen A und B ausfüllende Flüssigkeit brauchte, um bei verschiedenen Drucken durch Röhren verschiedener Länge und verschiedenen Durchmessers auszufließen.

Da die in gleichen Zeiten ausfließenden Volumina den Druckhöhen, welche, wenn wir zur Herstellung der Drucke Säulen derselben Flüssigkeit verwenden, sich verhalten wie die Drucke $p_a - p_e$, proportional sein sollen, müssen die zum Ausflusse gleicher Volumina erforderlichen Zeiten den Druckhöhen umgekehrt proportional sein.

Eine Versuchsreihe mit Wasser gab folgende Zahlen:

Länge der Röhre 107 ^{mm} ,9.	Durchmesser 0 ^{mm} ,135.	
Höhe in Mm. der drückenden Wassersäule	Ausflußzeit in Sekunden	
	beobachtet	berechnet
1984	5664"	5664"
7774	1445	1443
10501	1069	1070
10062	1121	1118
20561	546	546
30845	365	364
41381	273	271
47678	237	236.

Bei konstanter Druckhöhe und konstantem Durchmesser war die Ausflußzeit der Röhrenlänge direkt proportional.

Druck in Mm. Wasserhöhe 1472^{mm},45. Durchmesser 0^{mm},252.

Länge der Röhre	Ausflußzeit in Sekunden	
	beobachtet	berechnet
108 ^{mm} ,24	633"	633"
84 52	492	492
54 00	314	314.

Dieses Gesetz gilt jedoch nicht mehr bei zu kurzen Röhren, so z. B. bei 9^{mm} beobachtet 71",5, mit dem ersten Versuche verglichen ergab sich berechnet 52",63.

Bei gleichem Drucke und gleicher Länge sind die Ausflußzeiten den Potenzen der Durchmesser umgekehrt proportional.

Druck 1984^{mm} Wasserhöhe, Länge 107^{mm},9.

Durchmesser $D_1 = 0,136$ Zeit $T_1 = 5664''$

" $D_2 = 0,252$ " $T_2 = 468''5$.

In der That verhält sich fast genau umgekehrt wie die Zeiten

$$T_1^4 : D_2^4 = 471,57 : 5664,$$

dafs dadurch auch dieses Gesetz bestätigt ist.

Für das in der Zeiteinheit ausfließende Flüssigkeitsvolumen ergibt sich also entsprechend der theoretischen Entwicklung

$$V = C \cdot \frac{H \cdot R^4}{L},$$

wenn wir bei Wasser, dessen Dichtigkeit gleich eins ist, den Druck $p_0 - p_e = Hs$ durch die Höhe der drückenden Wassersäule ersetzen.

Ist H, R, L in Millimetern ausgedrückt, das Volumen V in Kubikmillimetern gegeben, so ist für die Temperatur 0° bei Wasser

$$C = 2162,40.$$

Die GröÙe C gibt das in $1''$ ausfließende Volumen, wenn die Druckhöhe 1^{mm} Wasser, der Radius der Röhre 1^{mm} und die Länge der Röhre 1^{mm} ist, unter der Voraussetzung, daß bei diesen Dimensionen noch das Gesetz gültig wäre. Die Konstante C ist demnach

$$C = \frac{\pi}{8 \cdot \eta},$$

somit

$$\eta_0 = \frac{\pi}{8 \cdot C} = \frac{3,14159 \dots}{8 \cdot 2162,40} = 0,0001816.$$

Da die benutzten Einheiten Millimeter und, weil der Druck einer Wassersäule von 1^{mm} Höhe auf das Quadratmillimeter ein Milligramm ist, Milligramme sind, so gibt uns die Konstante in Milligrammen die auf die Fläche von ein Quadratmillimeter wirkende verzögernde Kraft der Reibung, wenn benachbarte Schichten sich mit einer solchen Geschwindigkeit an einander vorüber bewegen, daß bei gleichförmiger Änderung der Geschwindigkeit der Geschwindigkeitsunterschied zweier 1^{mm} entfernter Schichten in der Sekunde ein Millimeter ist.

Die Konstante C wächst ganz bedeutend mit der Temperatur, und zwar erhält Poiseuille für dieselbe den Wert

$$C = 2162,40 (1 + 0,0336793 t + 0,0002209936 t^2),$$

wenn t in Graden der Celsiusschen Skala gegeben ist und der Druck immer in Milligrammen pro Quadratmillimeter ausgedrückt ist.

Für den Reibungskoeffizienten ergibt sich daraus eine entsprechende Abnahme, er wird

$$\eta = \frac{0,0001816}{1 + 0,0336793 t + 0,0002209936 t^2},$$

also z. B. für

$$10^\circ \dots \eta = 0,0001335$$

$$20^\circ \dots \eta = 0,0001029$$

$$30^\circ \dots \eta = 0,0000821.$$

Für absoluten Alkohol ergibt sich aus ähnlichen Versuchen Poiseuilles bei $10^\circ \eta = 0,0001741$, also beträchtlich größer als für Wasser; noch größer ist der Wert für Gemische aus Alkohol und Wasser.

Eine andere Methode zur Untersuchung der Flüssigkeitsreibung ist ursprünglich von Coulomb¹⁾ angegeben und später von O. E. Meyer²⁾ ge-

¹⁾ Coulomb, Mémoires de l'Institut nationale de France T. III, p. 246.

²⁾ O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXIII.

nauer studiert und zu Messungen verwandt worden. Die Methode benutzt den Widerstand, welchen eine horizontal an einem Drahte aufgehängte Kreisscheibe erfährt, wenn sie in einer Flüssigkeit durch Torsion des Drahtes in Schwingung versetzt wird.

Um zu erkennen, in welcher Weise die Bewegung durch die Reibung der Flüssigkeit beeinflusst wird, wollen wir die Beschleunigung der schwingenden Scheibe ableiten. Bei Besprechung der Torsionselasticität sahen wir, daß, wenn die Scheibe resp. der Draht um einen Winkel φ aus der Gleichgewichtslage abgelenkt ist, das die Scheibe gegen die Gleichgewichtslage zurücktreibende Torsionsmoment dem Ablenkungswinkel φ proportional ist. Im § 60 erkannten wir dann weiter, daß die innere Reibung des Drahtes der Bewegung einen Widerstand entgegensetzt, welcher der augenblicklichen Geschwindigkeit der Bewegung proportional ist. Wir erhielten deshalb, wenn die Scheibe im übrigen gar keinen Widerstand erfährt, im § 60 als Ausdruck für die Beschleunigung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{K}\varphi - 2\varepsilon\frac{d\varphi}{dt},$$

worin D das Torsionsmoment für $\varphi = 1$, K das Trägheitsmoment des schwingenden Systems und 2ε der Widerstand der innern Reibung ist, wenn die Geschwindigkeit gleich 1 ist.

Schwingt nun die Scheibe in einer Flüssigkeit, und wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß in der Beziehung auch die Luft als solche zu betrachten ist, so erfährt die Scheibe durch die Flüssigkeitsreibung einen Widerstand. Bei benetzenden, also stark adhärierenden Flüssigkeiten haftet die letzte Schicht an der Scheibe und wird mit derselben, also mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt. Diese Schicht reibt sich dann an der folgenden, dieselbe mit in Bewegung versetzend, und erfährt dadurch eine Verzögerung ganz in derselben Weise, wie wir es vorhin für die fließenden Wasserschichten ableiteten.

Wir betrachten nun ein Flächenelement der Scheibe, welches sich im Abstände q von dem Mittelpunkte der als kreisförmig angenommenen Scheibe befindet. Setzen wir die Winkelgeschwindigkeit der Scheibe zur Zeit t gleich ψ , so daß die Geschwindigkeit des betrachteten Elementes $q\psi$ ist, so ist das auch die Geschwindigkeit des betreffenden Elementes der an der Scheibe haftenden Flüssigkeitsschicht. Die der Scheibe parallelen Flüssigkeitsschichten haben dann eine kleinere Geschwindigkeit, und ist die Geschwindigkeitsabnahme, wenn wir uns von der Scheibe in normaler Richtung um dx entfernen, gleich $d\psi = dq\psi$, so ist, wenn f die Größe des betrachteten Flächenelementes ist,

$$\eta f \frac{d(q\psi)}{dx} = \eta f q \frac{d\psi}{dx}$$

Widerstand, welchen das betreffende Flächenelement in seiner Bewegung erfährt. Die Verzögerung, welche die Bewegung durch diesen Widerstand erfährt, ist gleich dem Moment dieses Widerstandes dividiert durch die q bewegte Masse, also gleich

$$\frac{q}{K} \cdot \eta f q \frac{d\psi}{dx}.$$

Um die Verzögerung zu erhalten, welche die ganze Scheibe durch die Reibung erfährt, müssen wir den Widerstand, den alle Flächenelemente erfahren, summieren. Zunächst können wir das Flächenelement f durch einen Ring vom Radius ϱ und der Breite $d\varrho$ ersetzen, da für den ganzen Ring der Widerstand an allen Stellen derselbe ist. Für die infolge des auf den Ring wirkenden Widerstandes vorhandene Verzögerung erhalten wir dann

$$2\pi\varrho \frac{\eta}{K} \varrho \frac{d\psi}{dx} d\varrho = \frac{\eta}{K} \frac{d\psi}{dx} \cdot 2\pi\varrho^3 d\varrho.$$

Diesen Ausdruck müssen wir für alle Ringe der Scheibe bilden und dann die Summe aller dieser nehmen. Zunächst entspricht jedem Ring auf der obern Seite auch ein solcher auf der untern Seite der Scheibe, der Wert für diese beiden Ringe erhalten wir, wenn wir den abgeleiteten Ausdruck mit 2 multiplicieren. Dann gibt uns das Integral

$$\int_0^R \frac{\eta}{K} \frac{d\psi}{dx} 4\pi\varrho^3 d\varrho = \pi R^4 \frac{\eta}{K} \frac{d\psi}{dx}$$

die Verzögerung der Bewegung durch den Reibungswiderstand, den die Scheibe erfährt, wenn wir mit R den Radius der Scheibe bezeichnen.

An diesem Ausdrucke ist, im Fall die Dicke der Scheibe nicht außer Acht gelassen werden darf, noch eine Korrektion wegen des an dem Umfange der Scheibe angreifenden Widerstandes anzubringen. Für den Umfang ist $\varrho = R$ und, wenn h die Dicke der Scheibe ist, für f einzusetzen $2\pi R h$, so daß das Korrektionsglied wird

$$2\pi R^3 h \frac{\eta}{K} \frac{d\psi}{dx}.$$

Die sich so ergebende Verzögerung haben wir von der Beschleunigung, welche die bewegenden Kräfte dem System erteilen, abzuziehen, und erhalten dann für die Beschleunigung

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{D}{K} \varphi - 2\varepsilon \frac{d\varphi}{dt} - \pi R^4 \frac{\eta}{K} \frac{d\psi}{dx} \left(1 + \frac{2h}{R}\right).$$

Bei großen dünnen Scheiben, wie sie zu solchen Versuchen benutzt werden, kann man das Glied $\frac{2h}{R}$ vernachlässigen.

Die ziemlich schwierige Behandlung dieser Gleichung, wegen der wir auf die Abhandlung von Meyer verweisen¹⁾, ergibt, daß wir auch in dem Falle eine abswingende Bewegung erhalten, deren Amplituden nach einer geometrischen Reihe abnehmen, die also ein konstantes logarithmisches Dekrement zeigt. Das logarithmische Dekrement ist gerade wie in § 6 das Maß für die Verzögerung, es gibt also gleichzeitig den Widerstand der innern Reibung des Drahtes und den der Reibung in der Flüssigkeit.

Um den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeit zu bestimmen, beobachtet man zuerst die Schwingung des Apparates in der Luft und dann jene, nachdem man die Scheibe in die Flüssigkeit gebracht hat. Aus der Differenz der logarithmischen Dekremente erhält man den Reibungs-

¹⁾ O. E. Meyer, Crelles Journal Bd. LIX. Poggend. Ann. Bd. CXIII.

Koeffizienten der Flüssigkeit; der Ausdruck für η , der sich aus der Beziehung von $\frac{d\psi}{dx}$ zur Geschwindigkeit der Drehung ergibt, ist

$$\sqrt{\frac{\pi\sigma\eta}{8}} = \frac{K}{(R^4 + 2hR^2)\sqrt{T_0}} \frac{\lambda - \lambda_0}{\pi} \left\{ 1 + \frac{\lambda - \lambda_0}{\pi} + \frac{5}{4} \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\pi} \right)^2 + \dots \right\},$$

worin $\lambda - \lambda_0$ die Differenz der logarithmischen Dekremente, T_0 die Schwingungsdauer des Apparates in der Luft und σ die Dichtigkeit der Flüssigkeit ist. Strenge genommen steht auf der linken Seite die Differenz

$$\sqrt{\frac{\pi\sigma\eta}{8}} - \sqrt{\frac{\pi\sigma_0\eta_0}{8}},$$

wenn η_0 der Reibungskoeffizient und σ_0 die Dichtigkeit der Luft ist, denn wie schon erwähnt ist auch in der Luft Reibung vorhanden. Da indes das Produkt aus dem Reibungskoeffizienten und der Dichte hier auftritt, kann man die Differenz als nicht meßbar von dem Minuend verschieden betrachten.

In dieser Weise erhielt Meyer unter andern für destilliertes Wasser die Werte

bei 10°, 1	$\eta = 0,000\ 157\ 5$
15°, 5	$\eta = 0,000\ 137\ 1$
17°, 9	$\eta = 0,000\ 129\ 9$
21°, 6	$\eta = 0,000\ 119\ 0$

Werte, welche etwa im Verhältnis 1,2 : 1 größer sind als die aus Poiseuilles Beobachtungen abgeleiteten.

Für Salzlösungen ergaben sich, mit Ausnahme der Lösungen von Kaliumnitrat, im allgemeinen größere und mit dem Salzgehalte wachsende Werte von η . So fand sich bei Lösungen von Natriumsulphat für eine Temperatur von 17°

bei 2,5670 Teilen Salz auf 100 Wasser	$\eta = 0,000\ 138\ 4$
5,1600 „ „ „ „ „	$\eta = 0,000\ 150\ 0$
7,7795 „ „ „ „ „	$\eta = 0,000\ 160\ 0$
10,4250 „ „ „ „ „	$\eta = 0,000\ 176\ 3.$

Später sind von Rellstab¹⁾, Hübener²⁾, Sprung³⁾, Grottrian⁴⁾ und besonders von Pribram und Handl⁵⁾ und andern ausgedehnte Versuche über die Reibung verschiedener Flüssigkeiten, insbesondere der Salzlösungen, und über die Änderung der Reibungskoeffizienten mit der Temperatur angestellt worden. Mit Ausnahme der zuerst citierten Versuche Grottrians, welche durch Beobachtung schwingender Scheiben ausgeführt wurden, ist dabei die Reibung mit Hilfe des Durchganges der Flüssigkeiten durch enge Röhren bestimmt worden. Unstreitig ist diese letztere Methode wegen der Leichtigkeit ihrer Versuche und der mit ihr zu erreichenden größern Genauigkeit der Methode der Schwingungen vorzuziehen. Wir teilen, um die

¹⁾ Rellstab, Inauguraldissertation. Bonn 1868.

²⁾ Hübener, Poggend. Ann. Bd. CL.

³⁾ Sprung, Poggend. Ann. Bd. CLIX.

⁴⁾ Grottrian, Poggend. Ann. Bd. CLVII, Bd. CLX, neue Folge, Bd. VIII.

⁵⁾ Pribram und Handl, Wien. Ber. Bd. LXXVIII, Bd. LXXX.

Verschiedenheit der Reibungskoeffizienten für verschiedene Flüssigkeiten zu übersehen, folgende aus den Beobachtungen Rellstabs unter Annahme des Poiseuilleschen Wertes für Wasser bei 10° C. berechneten Werte mit

Methylalkohol $\eta = 0,000\,070\,75$, Propylalkohol $\eta = 0,000\,203\,2$
 Äthylalkohol $\eta = 0,000\,155\,6$, Butylalkohol $\eta = 0,000\,387\,1$.

Der für Äthylalkohol aus den Versuchen Rellstabs sich ergebende Wert von η ist etwas kleiner als der von Poiseuille gefundene; der Grund dieses Unterschiedes liegt wohl darin, daß der Äthylalkohol, den Poiseuille anwandte, nicht ganz so wasserfrei war als der von Rellstab benutzte.

Auf die interessanten, besonders von Grottrian verfolgten Beziehungen zwischen den Reibungskoeffizienten und die galvanische Leitungsfähigkeit der Flüssigkeiten, kommen wir im vierten Bande zurück.

Ist die Konstante der Reibung der Flüssigkeiten an den festen Körpern nicht unendlich groß, so ist der Ausdruck für die durch kapillare Röhren ausfließende Menge, wie wir sahen,

$$V = \frac{\pi(p_a - p_c)}{8\eta L} \left(R^4 + 4\frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right),$$

es kommt also unter sonst gleichen Umständen ein von der dritten Potenz des Radius abhängiges Glied hinzu. Man sollte erwarten, daß demnach für nicht benetzende Flüssigkeiten dieses Glied in Rechnung zu ziehen sei. In der That glaubte Poiseuille bei dem Ausfluß des Quecksilbers durch gläserne Kapillarröhren zu finden, daß das für benetzende Flüssigkeiten aufgestellte Gesetz nicht mehr gültig sei. Genauere Versuche von Warburg¹⁾ haben indes gezeigt, daß auch für Quecksilber und Glas sich die ausgeflossene Menge darstellen läßt durch die Gleichung:

$$V = \frac{\pi(p_a - p_c)}{8\eta \cdot L} R^4,$$

wie z. B. folgende Beobachtung zeigt:

	$L = 871^{\text{mm}},5.$	$R = 0,223\,46.$	Temp. = 17°,25.
		Ausflußmenge in Milligr. pro 1"	
	$p_a - p_c$	beobachtet	berechnet aus 2
1.	100 ^{mm} ,6 Quecksilber.	126,5	127,1
2.	193 ^{mm} ,3 „	244,3.	

Setzen wir das spezifische Gewicht des Quecksilbers bei 17,2° gleich 13,55, so ergibt sich η aus der 2. Beobachtung

$$\eta = \frac{\pi \cdot 193^{\text{mm}},3 \cdot 13,55}{8 \cdot \frac{244,3}{13,55} \cdot 871,5} (0,22346)^4 = 0,000\,163\,29.$$

Es ergibt sich somit, daß auch bei nicht benetzenden Flüssigkeiten gültig sein kann.

§ 87.

Konstitution des ausfließenden Strahles. Bisher haben wir stillweisend vorausgesetzt, daß die Öffnung, aus welcher die Flüssigkeit fließt, eine kreisförmige sei, und daß somit der Strahl von der Stelle der größten Kontraktion an ein merklich cylindrischer sei. Ganz anders gestalten jedoch die ausfließenden Wasserstrahlen, wenn man statt kreisförmiger Öffnungen andere, z. B. viereckige oder kreuzförmige Öffnungen

Fig. 136.

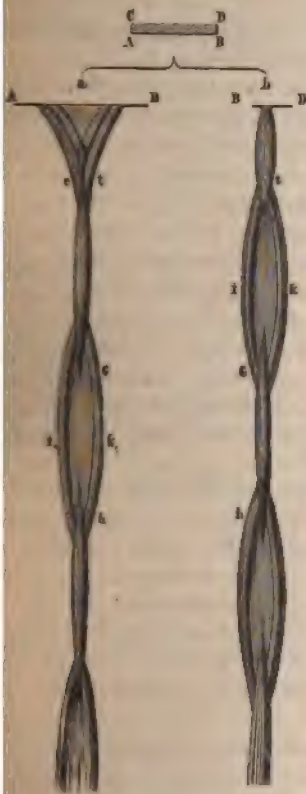


Fig. 137.



Fig. 138.



endet. Die Gestalten dieser Strahlen sind vorzugsweise von Bidone¹⁾ (später von Magnus²⁾) untersucht worden. Wir lassen hier einige der eckigsten Formen der aus eckigen Öffnungen ausfließenden Strahlen zu, nach der Beschreibung, welche Magnus von ihnen gibt. Fig. 136a ist die Ansicht eines Strahles, der aus einer viereckigen Öffnung ausfließt, deren eine Seite 2,6 Millim., deren andere 25 Millim. lang ist, gesehen in der zur größern Seite senkrechten und Fig. 136b in einer zur kleinern

¹⁾ Bidone, *Memorie dell' Accademia di Torino*. Bd. XXXIV.

²⁾ Magnus, *Poggend. Ann.* Bd. XCV. p. 1.

Seite senkrechten Richtung. Fig. 137 zeigt die Gestalt eines aus einer kreuzförmigen und Fig. 138 eines aus einer quadratischen Öffnung $ABDC$ ausfließenden Strahles. Das Wasser zieht sich unter der Öffnung sehr rasch zusammen und es bilden sich rundliche Ränder $AeBt$ (Fig. 136a), die sehr scharf gegen den übrigen Teil der Fläche begrenzt sind. Diese erzeugen, wo sie zusammentreffen, die zur Fläche $ABtc$ senkrechte Fläche $thgi$ (Fig. 136b), die sich nach unten immer mehr zusammenzieht und dann die Fläche $gkhi$ entstehen läßt, und so fort, bis der Strahl zersplittert. Dieselbe Gestalt erhielt der Strahl, als anstatt der einfachen Ausflußöffnung eine 20 Millimeter lange Röhre von gleichem Querschnitt an das Gefäß gebracht wurde.

Bei den aus der kreuzförmigen Öffnung (Fig. 137) austretenden Strahlen geht das Wasser in vier sich kreuzenden Strahlen nieder, Be , Be' , Ce etc., von denen jeder einen starken Rand hat. Indem diese vier Ränder zusammentreffen, erzeugen je zwei eine Fläche rpq ; da aber das Zusammentreffen central stattfindet, wenn die Arme der kreuzförmigen Öffnung genau gleich sind, so halbiert jede Fläche den Winkel, den die Ränder mit einander machen, so daß die vier entstehenden Flächen, rpq , $r'p'q'$, die Lage der zwischen AB und CD punktierten Linien p und p_1 haben. Zwischen ihnen ziehen sich die Ränder Ce bis gegen G hinab. In der durch diesen Punkt gehenden Horizontalen haben die Flächen rpq ihre größte Breite. Unterhalb dieser Stelle nehmen sie wieder dicke Ränder an, durch deren Zusammentreffen neue Flächen zv entstehen. Da auch hier die Ränder central zusammentreffen, so halbieren die Flächen zv die Winkel der vorigen. Ihre Richtung fällt also wieder mit derjenigen der Kreuzesarme zusammen.

Selten treten mehr als zwei solcher Flächensysteme auf, meist beginnt in dem zweiten die Zersplitterung des Strahles.

Bei dem aus der quadratischen Öffnung $ABCD$ (Fig. 138) hervorgehenden Strahle erblickt man unter der Stelle der größten Zusammenschnürung vier Flächen opq , deren Verlängerungen durch die Mitte der Seiten AB , BD . . gehen und auf diesen senkrecht stehen.

Unter diesem liegt ein zweites Flächensystem, welches, wie in dem vorigen Falle, die Winkel des ersten halbiert, also mit der Richtung der Diagonalen des Quadrats zusammenfällt. Unter dem zweiten befindet sich ein drittes, dem ersten gleiches Flächensystem u. s. f., so daß oft neuerartiger Systeme unter einander liegen.

Diese Formen, welche die Strahlen annehmen, die aus eckigen Öffnungen fließen, zeigen auf das deutlichste den Einfluß der seitlichen Bewegung der Flüssigkeit und der Molekularattraktion der Flüssigkeitsteilchen, die wir bei den vorhin betrachteten Ausflußerscheinungen als störende Umstände ansahen. Denn diese beiden Umstände scheinen hinreichend, um die sonderbaren Gestalten der Strahlen zu erklären.

Die Flüssigkeitsteilchen haben alle bei ihrem Austritt aus der Öffnung eine horizontale gegen das Innere des Strahles gerichtete Geschwindigkeit, welche noch durch die früher betrachtete Oberflächenspannung an den Seiten des Strahles vermehrt wird. Daraus ergibt sich die vorwiegend nach innen gerichtete Bewegung der Flüssigkeit unmittelbar nach der Öffnung; bei kreisförmigen Öffnungen ist die nach innen gerichtete Geschwindigkeit der Flüssigkeit sowohl als der Widerstand, den

innere des Strahls derselben entgegensetzt, nach allen Richtungen, deshalb zeigt sich dort die Einschnürung von allen Seiten ohne folgende Anschwellung; anders jedoch bei eckigen Öffnungen. Dort ist die Oberflächenspannung verschieden, und zwar ist sie am stärksten von den Ecken aus, weil dort der Krümmungsradius am kleinsten ist, während die übrige Fläche des Strahles eben, oder gar wohl konkav sein kann. Unter der Öffnung müssen daher vorzugsweise die von den Ecken der Öffnung kommenden Flüssigkeitsteile nach der Mitte zu sich bewegen, und es muß der Strahl hauptsächlich von den Ecken aus zusammengeschnürt werden.

Daher treten dann die von den Seiten der Öffnung herkommenden Flüssigkeitsteile über den Strahl heraus, und der Strahl muß einen der beiden entgegengesetzten Querschnitt erhalten, dort seinen kleinsten Durchmesser haben, wo die Öffnung den größten hat, und umgekehrt. An dieser Stelle kehren sich dann die Verhältnisse um; durch die Oberflächenspannung in jetzt stärker gewölbten Teilen des Strahles erhalten die hier bestehenden Teile des Strahles eine nach innen gerichtete Bewegung, und da, wie wir sahen, der Querschnitt des Strahles wegen der beschleunigten Bewegung abwärts immer kleiner wird, so wird jetzt die Zusammenschnürung hauptsächlich von den entstandenen Ecken des Strahles ausgehen und damit herausstreifen der Flüssigkeit an den konkaven Stellen des Strahles eintreten. Die Erscheinung ist also wesentlich eine Folge der verschiedenen Oberflächenspannung des Strahles, verbunden damit, daß wegen der zunehmenden nach unten gerichteten Geschwindigkeit der Bewegung die Teile des Strahles überhaupt, so lange der Strahl zusammenhängt, bestreben haben, sich der Mitte zu nähern, und daß deshalb an den Ecken der Öffnung niedergehenden Teile einen nur geringen Widerstand gegen ihre horizontale Bewegung erfahren¹⁾.

Auch an Strahlen, welche aus einer kreisförmigen Öffnung hervorgehen, beobachtet man meist Anschwellungen und Erscheinungen dieser Art. Von der Kontraktionstelle abwärts ist der Strahl zunächst noch cylindrisch, und dabei massiv und ganz klar. In einiger Entfernung von derselben ändert er aber sein Ansehen vollständig, er erstarrt, gestört, erfährt eine merkliche Anschwellung (Fig. 139) und wird trübe, so daß es den Anschein hat, als bilde er keine kontinuierliche Flüssigkeitsmasse mehr. Auf diese erste Anschwellung folgt dann eine Stelle, wo der Strahl wieder zusammengeschnürt ist, dann wieder eine Anschwellung und so fort. Die abwechselnden Anschwellungen und Einschnürungen nennt man nach Savart²⁾, zuerst genauer untersuchte, Bäuche und Knoten. Im Innern des Strahles scheint sich ein kontinuierlicher Kanal herabzuziehen, dann als Fortsetzung des massiven Strahles über dem ersten Knoten.

Daß diese Anschwellungen und Einschnürungen übrigens ganz anders beschaffen sind und von ganz anderen Ursachen herrühren als diejenigen, welche bei den aus eckigen Öffnungen hervorgehenden Strahlen auftreten, läßt sich leicht zeigen.

Zunächst kann man leicht erkennen, daß der Strahl an seinen

Fig. 139.



¹⁾ Buff, Poggend. Ann. Bd. C.

²⁾ Savart, Annales de chim. et de phys. T. LIII. 337.

unteren Stellen nicht mehr kontinuierlich ist, sondern aus getrennten Tropfen besteht. Wenn man nämlich ein Kartenblatt horizontal sehr rasch durch einen Bauch des vertikal herabgehenden Strahles hindurchführt, so findet man auf demselben nicht einfach eine benetzte Linie, sondern statt dessen eine Reihe benetzter Stellen, welche zeigen, daß auf einander folgende Stellen des Blattes von Tropfen getroffen sind. Hält man einen Draht oder ein Blech so in der Hand, daß es ein wenig in den Strahl hinein reicht, so fühlt man, so lange es von dem glatten Teile desselben getroffen wird, einen gleichmäßigen Druck. Wird dasselbe dagegen von einem Bauche getroffen, so fühlt man deutlich eine vibrierende Bewegung. Daraus folgt unmittelbar, daß das Aussehen des Strahles an dieser Stelle nur eine optische Täuschung sein kann, indem wir nicht die einzelnen Tropfen sehen, sondern nur den Gesamteindruck der rasch nach einander an den einzelnen Stellen erscheinenden Tropfen erhalten.

Denn die einzelnen auf einander folgenden Tropfen gehen einer nach dem andern sehr rasch vor unserem Auge vorüber, jeder muß daher auf unserer Netzhaut den Eindruck einer vertikalen Linie machen, gerade wie eine leuchtende Kohle, wenn sie rasch im Kreise geschwungen wird, den Eindruck eines feurigen Kreises macht; oder wie wir an einem rasch sich drehenden Rade nicht mehr die einzelnen Speichen sehen, sondern eine gleichmäßig den Radkranz ausfüllende Fläche. Wenn nun ein Tropfen am Auge vorüber gefallen ist, so folgt ihm sofort ein zweiter und der von dem ersten Tropfen hinterlassene Eindruck setzt sich fort, und so weiter. Wir sehen demnach die Kontouren aller auf einander folgenden Tropfen als einen kontinuierlichen Strahl. Daraus folgt weiter, da wir abwechselnd Bäuche und Knoten wahrnehmen, daß die Tropfen sich abwechselnd verbreitern und verlängern, daß sie in der Mitte der Bäuche am breitesten und in den Knoten am schmalsten sein müssen.

Man kann dies sehr deutlich wahrnehmen, wenn man den Strahl beobachtet, daß man ihn immer nur eine sehr kleine Zeit wahrnimmt, so daß während dieser Zeit die Tropfen ihre Stelle fast gar nicht ändern. Es gibt dazu mehrere Mittel, welche wir später kennen lernen werden; das sicherste ist die Beobachtungsmethode von Magnus¹⁾. In eine kreisförmige Scheibe von 250 Millimeter Durchmesser wird ein Spalt von 1 Millimeter Breite in der Richtung eines Radius eingeschnitten. Die Scheibe wird dann auf einer durch ihren Mittelpunkt gehenden Axe befestigt und in eine sehr rasche Rotation versetzt, so daß sie 20 bis 25 Umdrehungen in der Sekunde erhält. Man stellt das Auge und die rotierende Scheibe so, daß man den Strahl sieht, wenn die Spalte dem Strahl parallel steht. Man sieht den Strahl dann nur so lange, aber jedesmal, wenn die Spalte vor dem Auge hergeht. Da die Spalte nur ein Millimeter breit ist, so beträgt sie nur $\frac{1}{780}$ der ganzen Kreisfläche und da die Scheibe 20 bis 25mal in der Sekunde rotiert, so ist die Spalte nur $\frac{1}{15600}$ bis $\frac{1}{19500}$ Sekunde vor dem Auge. In dieser kurzen Zeit ändert aber der einzelne Tropfen seine Stelle nicht merklich, und deshalb sehen wir sie einzeln, als wären sie unbeweglich. Da aber ferner die Spalte 20—25mal

¹⁾ Magnus, Poggend. Ann. Bd. CVI. p. 1.

in der Sekunde an unserem Auge vorüber geht, so sehen wir das einzelne Bild 25mal in der Sekunde, wir glauben es daher ununterbrochen zu sehen.

Wenn man auf diese Weise einen mit Bäuchen versehenen Strahl betrachtet, so erhält man das Bild Fig. 140. Man sieht, wie der Strahl aus lauter einzelnen Tropfen besteht, von denen man aber zwei Arten unterscheiden kann. Die einen sind sehr klein und kugelförmig in der Axe des Strahles; sie bilden den erwähnten innern Strahl, um den sich die Bäuche herumlegen. Die andern sind viel größer, sie wechseln mit den ersten, welche in gleichen Abständen von einander stehen, ab und haben eine sehr verschiedene Gestalt. Man sieht zunächst unter dem kontinuierlichen Teile des Strahles, wie die Tropfenbildung eintritt, der Strahl zeigt Schwellungen und Einschnürungen, die bei β in einzelne Tropfen übergehen; die Einschnürungen werden zu den vorhin erwähnten kleinen Tröpfchen, die Anschwellungen zu den großen. Diese haben zuerst eine in die Länge gezogene Gestalt a , dann verkürzen sie sich, indem sie zugleich breiter werden b , bei c sind sie kugelförmig, bei d sind sie in vertikaler Richtung abgeplattet und in der horizontalen am stärksten ausgedehnt, bei e wieder mehr kugelförmig, bei f und noch mehr bei g , wo man den Knoten wahrnimmt, in die Länge gezogen. Von da ab wiederholen sich die Gestalten $a - g$, bis der Strahl unterhalb der Bäuche auseinandergeht, und zwar treten dieselben Gestalten immer an derselben Stelle auf. Dafs die Gestalt des Strahles deshalb die vorher beschriebene sein muß, geht unmittelbar aus dieser Gruppierung der Tropfen hervor. Es fragt sich nun, wie entsteht diese Erscheinung.

Wir erwähnten vorhin, dafs nicht immer an den aus kreisförmigen Öffnungen hervorfliessenden Strahlen diese Anschwellungen sich zeigen, sondern dafs oft der Strahl eine nahezu cylindrische Gestalt habe. Aber auch in diesem findet, wie Magnus¹⁾ nachwies, die Tropfenbildung statt, und zwar etwas tiefer als dort, wo sie dann eintritt, wenn sich Bäuche zeigen. Ein solcher cylindrischer oder vielmehr schwach konischer Strahl bietet nach Magnus ein Bild, wie Fig. 141. Auch hier sind die Tropfen bald länger bald breiter, aber die Formen wechseln nicht regelmäfsig; deshalb ist der nicht mit Bäuchen versehene Strahl auch an der untern Strecke nur breiter als an der obern. Die Tropfenbildung ist daher allen diesen Strahlen gemeinsam, betrachten wir sie zuerst.

Die Tropfenbildung ist Folge der beschleunigten Geschwindigkeit der herabfallenden Flüssigkeit; indem nicht soviel Flüssigkeit oben ausfließt, als unten notwendig ist, um den Strahl als ein Kontinuum zu erhalten, ersplittert der Strahl und dadurch bilden sich infolge der Oberflächenspannung Tropfen.

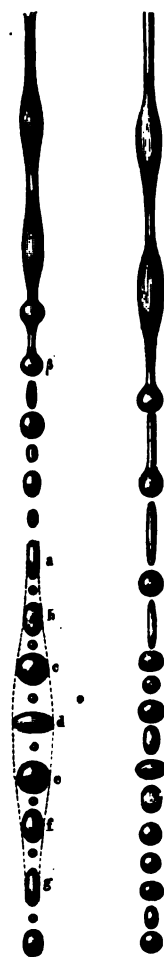
Dafs diese Erklärung die richtige sei, folgt aus der Beobachtung des aus einem mit einer Hahnöffnung versehenen Gefäße tropfenweise ausfließenden Wassers. Zunächst sammelt sich das Wasser an der Hahnöffnung an, verlängert sich dann in einen Tropfen; darauf tritt eine Einschnürung ein und der Tropfen fällt herab. Der herabfallende Tropfen nimmt eine kugelförmige Gestalt anzunehmen und dabei oscilliert er, so dafs er abwechselnd in die Länge gezogen, abwechselnd abgeplattet erscheint. Die Einschnürung bildet dann mehrere kleine Tropfen. In diesem

¹⁾ Magnus a. a. O.

Falle, wo die Ausflussmenge von Anfang an nicht so groß ist, um kontinuierlichen Strahl zu bilden, tritt die Tropfenbildung von Anfang

Ferner, Plateau zeigte, wenn man den § 80 beschriebenen in Alkoholgemische gebildeten Ölcylinder durch Entfernung der beiden

Fig. 140. Fig. 141.



kreise, zwischen denen er gebildet war, verlängert er dann, wenn man eine gewisse Grenze überschreitet. Unmittelbar vorher bilden sich abwechselnde Einschnürungen und Anschwellungen, deren letztere Tropfen bilden, während an Stelle der Einschnürungen kleine Tropfen auftreten. Also auch hier, wo die Flüssigkeit nicht mehr ausreicht, um einen kontinuierlichen Cylinder zu bilden, dieselbe Tropfenbildung infolge der Oberflächenspannung. Wenn nun in allen aus kreisförmigen Öffnungen ausfließenden Strahlen die Tropfenbildung eine gemeinsame ist, so müssen noch besondere Umstände eintreten, um einmal die regelmäßige Folge derselben zu bringen, ein andermal nicht. Savart¹⁾ und Magnus²⁾ haben diese nachgewiesen; sie zeigten, daß der Strahl die Gestalt Fig. 141 hat, wenn die Ausflußöffnung ganz ruhig ist und keine zitternde Bewegung besitzt, daß aber, wenn man derselben eine zitternde regelmäßige Bewegung mitteilt, die Bäuche auftreten. Savart hat dieses zu zeigen, das Gefäß an Fäden schwebend gehalten, daß es nicht erschüttert werden konnte und der Strahl die Gestalt Fig. 141, wurde aber durch das Durchstreichen eines Violoncells in der Nähe des Gefäßes mit der Bodenplatte in regelmäßige Vibrationen gesetzt, so traten sofort die Bäuche in schönster Regelmäßigkeit auf. Magnus zeigte dasselbe durch einen noch anderen Versuch. Die Ausflußöffnung wurde in eine Metallscheibe eingeschnitten, und diese durch eine Kautschukröhre auf eine Hülse befestigt, welche aus dem Boden eines mit Flüssigkeit versehenen Gefäßes herabhing. Die Metallscheibe, in der sich die Ausflußöffnung befand, wurde auf ein Paar Kissen von Wolle gelegt, die auf einer Unterlage gelegt waren. Wurde nun das Gestell, an dem das Ausflußgefäß stand, in eine regelmäßige vibratorische Bewegung versetzt, so zeigten sich keine Bäuche, sondern nur Tropfen. Wurden die Vibrationen des Gefäßes sich nicht durch den Kautschuk zur Bodenplatte fortpflanzen konnten; wenn aber die

in der die Ausflußöffnung angebracht war, mit dem Gestell in feste Verbindung gebracht war und somit vibrierte, so traten sofort die Bäuche

Wie nun infolge dieser Vibrationen das regelmäßige Abreißen der Tropfen und damit die Bäuche entstehen, erklärt Magnus folgendermaßen: Indem der Rand der Ausflußöffnung regelmäßig auf- und niedergeht, ändert sich die Geschwindigkeit des ausfließenden Strahles abwechselnd besch

¹⁾ Savart a. a. O.

²⁾ Magnus a. a. O.

und verzögert. Durch diese abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen entstehen die abwechselnden Anschwellungen und Einschnürungen, die in größter Tiefe die Trennung in einzelne regelmäßige Tropfen zur Folge haben. Sind diese abwechselnden Beschleunigungen und Verzögerungen nicht vorhanden, so fehlen die Bäuche und das Abreißen findet in größerer Entfernung von der Öffnung und viel weniger regelmäßig statt. Wahrscheinlich trägt die geringere Entfernung, in welcher, wenn Bäuche vorhanden sind, die einzelnen Massen abreißen, nicht unwesentlich zu jener Regelmäßigkeit bei, da alle Bewegungen in einem Strahl in geringerer Entfernung von der Öffnung regelmäßiger sind als entfernt davon.

Noch auffallender und interessanter zum Teil sind die Formen, welche Flüssigkeitsstrahlen bilden, wenn sie durch feste Körper oder andere entgegenkommende Strahlen gestört werden; man sieht diese Erscheinungen häufig in Gärten als Zierat benutzt. Das Wasser wird nämlich von den festen Körpern nicht regelmäßig zurückgeworfen, wie wir das bei den festen Körpern fanden, sondern breitet sich in oft höchst sonderbaren Formen aus. Es würde uns jedoch zu weit führen, darauf einzugehen, deshalb verweisen wir auf die Abhandlungen von Magnus¹⁾ und Savart²⁾.

Drittes Kapitel.

Von den gasförmigen Körpern.

§ 88.

Allgemeine Beschaffenheit der Gase. Wir lernten § 46 außer der festen und flüssigen Aggregatform noch eine dritte kennen, in welcher Körper vorkommen können, die gasförmige. Diese definierten wir dahin, daß sie weder eine selbständige Gestalt wie die festen Körper, noch ein selbständiges Volumen wie die flüssigen Körper besitzen, sondern sich so weit ausbreiten, bis ein äußeres Hindernis sie zurückhält.

Wir können uns leicht durch Beobachtung und Versuche davon überzeugen, daß wir überall von einem Körper dieser Aggregatform, der Luft, umgeben sind; wir atmen sie ein, fühlen ihre Strömungen im Winde und ihren Widerstand bei raschen Bewegungen.

Wenn man eine scheinbar leere Glocke so in Wasser taucht, daß ihre ganze Basis zugleich die Wasseroberfläche berührt, so vermag nur wenig Wasser in die Glocke einzudringen, auch wenn wir sie so tief in das Wasser hineindrücken, daß sie ganz unter Wasser steht. Wir müssen daraus schließen, daß die Glocke mit etwas erfüllt ist, was dem Eindringen des Wassers sich entgegensetzt. Neigen wir nun die Glocke, indem wir aber dafür sorgen, daß die Basis derselben stets unter Wasser bleibt, so weit, daß das Niveau in die Glocke eingedrungenen Flüssigkeit an einer Stelle den Rand der Glocke nicht mehr erreicht, so sehen wir bei fernerm Niederdrücken, wie

¹⁾ Magnus a. a. O. und Poggend. Ann. Bd. LXXX. p. 1. Bd. XCV. p. 1.

²⁾ Savart a. a. O. und Ann. de chim. et de phys. T. LIV. p. 55 und p. 113. LV. p. 257.

aus ihr durch das Wasser große Blasen aufsteigen und wie dann das Wasser höher in die Glocke einsteigt. Noch deutlicher wird dieser Versuch, wenn wir die Glocke oben mit einem Hahn versehen. So lange der Hahn geschlossen ist, kann das Wasser in die Glocke nicht eindringen, öffnen wir aber denselben, so dringt beim Niederdrücken das Wasser ein, zugleich bemerken wir aber, wie aus der Hahnöffnung die Luft hervordringt, indem wir ihren Stoss fühlen, oder sehen, wie leichte Körperchen durch den hervordringenden Luftstrom fortgerissen werden.

Dieser Versuch beweist auf das evidenteste sowohl das Vorhandensein als die Körperlichkeit der Luft, indem er uns beweist, daß in einem mit Luft erfüllten Raume ein anderer Körper nicht eindringen kann.

Durch einen ebenso einfachen Versuch können wir uns überzeugen, daß die Luft eine Flüssigkeit ist, daß ihre Teile frei beweglich sind. Denn kehren wir die Glocke um, so daß ihre Basis nach oben gerichtet ist, so können wir flüssige und feste Körper leicht hineinbringen. Die eingebrachten Körper verdrängen die Luft ebenso leicht, wie eine Flüssigkeit, in die man sie eintaucht, oder wie eine schwerere die leichtere Flüssigkeit verdrängt, mit welcher sie sich nicht mischt. Wir müssen daher die Luft als eine Flüssigkeit betrachten und ihren Teilen dieselbe freie Beweglichkeit zuschreiben, wie den einzelnen Teilen der Flüssigkeiten.

Dasselbe zeigt uns der geringe Widerstand, den die Bewegung der Körper in einem mit Luft erfüllten Raume erfährt, der noch um vieles geringer ist als der Widerstand, den eine Bewegung in einem mit Flüssigkeit erfüllten Raume findet.

Daß die Luft kein selbständiges Volumen besitzt, zeigt folgender Versuch. Man kann eine Blase leicht zum Teil mit Luft anfüllen. Bringt man sie dann in eine Glocke, aus der wir durch einen später zu beschreibenden Apparat, die Luftpumpe, die Luft fortschaffen können, so zeigt die in der Blase enthaltene Luft das Bestreben, sich auszudehnen, indem die Blase sehr bald vollständig gespannt ist, und selbst durch die ausdehnende Kraft der in ihr eingeschlossenen Luft zersprengt werden kann.

Die Luft hat demnach keine selbständige Gestalt, sie dehnt sich aus, bis sich ihrer Ausdehnung ein äußerer Widerstand entgegensetzt. Da nun dieselbe eine Flüssigkeit ist, so nennt man sie dieser Eigenschaft wegen eine ausdehnsame Flüssigkeit, eine expansibele Flüssigkeit, und die bisher betrachteten Flüssigkeiten im Gegensatz dazu tropfbare.

§ 89.

Eigenschaften der Gase, welche sie mit den Flüssigkeiten gemein haben. Da die Gase Flüssigkeiten sind, so folgt, daß sie eine Reihe von Eigenschaften besitzen, welche wir an den Flüssigkeiten kennen gelernt haben. Zunächst sind sie schwer wie alle Körper. Um dieses durch einen einfachen ohne weiteres verständlichen Versuch nachzuweisen, nehmen wir eine mit einem Hahne versehene Glaskugel von leichtem Glase, welche vielleicht 5—10 Liter Inhalt hat (Fig. 142), hängen sie an eine empfindliche Wage und bestimmen ihr Gewicht. Wenn wir dann die Kugel auf den bereits vorhin erwähnten Apparat bringen, mittels dessen wir die Luft aus ihr entfernen können, und die Luft aus ihr fortnehmen, so zeigt eine

Wägung, daß nach Fortnahme der Luft die Kugel leichter geworden ist, und zwar bei einer Kapazität von 10 Liter um ungefähr 10 Gramm.

Die Luft und ebenso alle Gase, welche uns die Chemie kennen lehrt, sind demnach schwer wie alle Flüssigkeiten.

Wie bei den Flüssigkeiten nur dann Gleichgewicht war, wenn der Druck auf ein Flüssigkeitselement im Innern von allen Seiten derselbe war, so auch bei den Gasen; im Zustande des Gleichgewichts erhält jedes Gasmolekül von allen Seiten den gleichen Druck; ist derselbe in einer Richtung gestört, so tritt eine Bewegung ein. Dies zeigt sich schon in dem zuerst erwähnten Versuche mit der Glocke. Als der Hahn geöffnet wurde, während dieselbe in die Flüssigkeit eingedrückt war, trat sofort ein Ausströmen der Gase ein, da der von unten nach oben auf das in der Glocke befindliche Gas wirkende Druck größer war als der von oben nach unten gerichtete Druck. Von unten nach oben drückte die über dem Flüssigkeitsniveau unter der Glocke erhobene Flüssigkeitsschicht, und vielleicht ein äußerer auf der Flüssigkeit lastender Druck; von oben nach unten nur dieser letztere; deshalb drang die Luft aus der Hahnöffnung hervor.

Fig. 142.



Wenn wir auf ein in einem Gefäße eingeschlossenes Gas durch einen dem Gefäße genau anpassenden Kolben einen Druck ausüben, so muß wegen der flüssigen Natur der Gase dieser Druck sich nach allen Richtungen gleichmäßig fortplanzen, es muß demnach jedes Flächenstück von gleicher Größe auch einen gleichen Druck erfahren. Da nun die Gase, wie wir sahen, schwer sind, so muß sich alles das, was wir bei den der Schwere unterworfenen Flüssigkeiten fanden, auch hier und besonders in der uns umgebenden atmosphärischen Luft wiederholen.

Denken wir uns zu dem Ende einen mehrere Meilen hohen Cylinder über die Erde erhoben, vollkommen verschlossen und vollständig mit Gas erfüllt, und zerlegen wir dieses Gas in lauter sehr dünne horizontale Schichten, so können wir diese als ebenso viele Kolben betrachten, welche auf das darunter liegende Gas drücken. Der Druck wird daher von oben nach unten zunehmen; in irgend einer Schicht aber auf ein gleiches Flächenstück überall gleich sein müssen, und zwar nach allen Richtungen gleich, ebenso nach allen Seiten auf die Wände des Cylinders, als auch nach oben oder nach unten; derselbe ist gleich dem Gewichte der über dieser Fläche befindlichen Luftsäule. Dieser Druck ist ganz unabhängig von der Form oder der Größe des Cylinders, vorausgesetzt nur, daß seine Höhe dieselbe bleibt. Dieser letztere Umstand ist von bedeutender Wichtigkeit, da wir dadurch berechtigt sind, unsere Schlüsse auf die unsere Erde umgebende Atmosphäre auszu dehnen. Die Atmosphäre ist eine Luftmasse, welche sich rings um die Erde als eine Schicht von etwa 8 Meilen Dicke herumlegt, und welche, wie die Chemie uns lehrt, ein Gemenge zweier gasförmiger Körper ist, von Sauerstoff und Stickstoff. Nach den vielfachsten Analysen enthält sie um wenig mehr als 79 Teile Stickstoff (79,03) und nahe 21 Teile Sauerstoff (20,97), und außerdem noch geringe Mengen eines andern Gases, der Kohlensäure, und etwas Wasserdampf. Man nimmt an, die Atmosphäre

sei von einer letzten Schicht begrenzt, welche wegen ihrer geringen Dichtigkeit und der Centrifugalkraft auf die darunter liegenden Schichten keinen Druck ausübt. Denn die Luft nimmt an der Umdrehung der Erde Theil, ist, Störungen abgerechnet, welche, durch Temperaturdifferenzen bedingt, in Luftströmungen sich zeigen, in Bezug auf die Punkte der Erdoberfläche unbeweglich. Mit der Höhe über der Erde muß daher die centripetalen Beschleunigung zunehmen, und deshalb in einer gewissen leicht zu berechnenden Entfernung von der Erde der Schwere gleich werden.

Wir können demnach die Atmosphäre, indem wir von jenen Störungen absehen, als ein im Gleichgewicht befindliches Flüssigkeitsmeer betrachten, auf dessen Boden wir leben, von konstanter Höhe, und welches alle Wirkungen hervorbringt, welche eine tropfbare Flüssigkeit von gleicher

Fig. 143.



Dichte hervorbringen würde. Jede Fläche übt demnach einen Druck, der dem Gewichte der über ihr befindlichen Luft gleich ist; derselbe ist konstant in Schichten, welche mit der Erdoberfläche parallel sind; er vermindert sich, wenn wir uns emporheben, nimmt zu, wenn wir uns der Erde nähern. An jedem Orte ist der Druck auf gleiche Flächenstücke derselbe, wie sie auch gerichtet sind, und bei verschiedenen Flächenstücken ihrer Grösse proportional. Er ist ferner derselbe sein im Zimmer wie in freier Luft, und an einer und derselben Stelle bis auf die oben erwähnten Störungen konstant sein.

Ehe wir dazu übergehen, diesen Druck zu messen, wird es gut sein, vorher die den Gasen und Flüssigkeiten gemeinsamen Eigenschaften noch weiter betrachten.

Sowie ein in Wasser getauchter Körper an Gewicht verliert, so verliert auch stets ein Teil des Gewichtes der Körper von der Luft getragen. Der von der Luft umgebene Körper ebenso einen an seinem Schwere angreifenden nach oben gerichteten Druck erhält, der dem Gewichte von ihm verdrängten Luft gleich ist. Der experimentelle Nachweis dieses Satzes ist nicht schwierig, jedoch begnügen wir uns hier damit, zu zeigen, daß überhaupt ein Gewichtsverlust vorhanden ist, und sei es in der Grösse desselben als durch die früheren Lehren bewiesen an. Wir bringen zu dem Ende eine kleine Wage an (Fig. 143), deren Balken an der einen Seite eine große hohle Kugel von dünnwandigem Glase trägt, während der andern Seite ein kleines Gewicht ihr das Gleichgewicht hält. Das kleine Gewicht ist auf seinem Wagebalken verschiebbar, und man bringt es dann so, daß es der Kugel in der Luft genau das Gleichgewicht hält. Darauf bringt man diesen Apparat unter die Glocke einer Luftpumpe, nimmt die Luft unter der Glocke fort. Man sieht dann, wie sich alle der Wagebalken nach der Seite der Kugel neigt, ein Beweis, daß sie schwerer wird. Die mit dem kleinen Gewichte gleich schwere große Kugel verliert in der Luft, da sie eine größere Menge Luft aus der Stelle verdrängt, an Gewicht als das kleine Messinggewicht; die Gewichtszunahme, welche die Luft fortgenommen wird, ist daher bei ihr größer als bei dem kleinen Gewicht.

Eine wichtige Folgerung aus diesem Satze ist die, daß uns die Wage nicht das wahre Gewicht der Körper gibt, sondern nur die Differenz zwischen dem Gewicht des Körpers und dem der verdrängten Luft. Nennen wir das wahre Gewicht des Körpers P , jenes, welches uns die Wage angibt, P' , das Volumen des Körpers v , und das specifische Gewicht der Luft s , so haben wir

$$P = P' + v \cdot s,$$

indem $v \cdot s$ das Gewicht der verdrängten Luft ist. Da indes auch die Gewichte, welche den Körper abzuwägen, ein Volumen v' Luft verdrängen, so müssen wir, um das wahre Gewicht P zu erhalten, noch das Gewicht $v' \cdot s$ von diesen verdrängten Luft abziehen, so daß

$$P = P' + v \cdot s - v' \cdot s = P' + (v - v') s.$$

Man sieht, darnach kann das wahre Gewicht größer oder kleiner sein als das scheinbare, je nachdem $v > v'$ oder $v < v'$ ist, das heißt, je nachdem das Volumen des abzuwägenden Körpers oder das der Gewichte größer ist.

Diese Korrektion, welche wir anbringen müssen, um das wahre Gewicht eines Körpers zu erhalten, können wir erst später in der Wärmelehre vollständig bestimmen, da die Größe s sich sehr bedeutend mit der Temperatur der Luft ändert. Hier sei nur soviel erwähnt, daß bei der Temperatur des schmelzenden Eises und 760^{mm} Barometerstand das Gewicht eines Liter (1000 Cent. kub.) Luft nach den Versuchen von Regnault 1^{er}, 293 trägt, das specifische Gewicht s der Luft also 0,001 293 ist.

Eine weitere wichtige Folge aus obigem Satze ist die, daß in der Luft gerade so wie im Wasser Körper schwimmen können, wenn das Gewicht der von ihnen aus der Stelle gedrängten Luft größer ist als ihr eigenes Gewicht. Nennen wir s das specifische Gewicht der Luft, s' das des Körpers vom Volumen v , so ist gerade wie § 67 $v (s' - s)$ das Gewicht, welches die Körper fallen macht. Ist nun $s' > s$, so fällt der Körper zur Erde nieder, ist $s' = s$, so befindet er sich in der Luft im Gleichgewicht, ist $s' < s$, so steigt er in der Luft auf.

Hieraus geht hervor, daß in der Wirklichkeit nicht alle Körper gleich schnell fallen können, wie wir es im ersten Kapitel des ersten Abschnittes annahmten, da die Kraft, mit welcher sie zur Erde niederfallen, durch die Einwirkung der Luft modificiert, nicht einfach ihrem Gewichte proportional ist; specifisch leichtere Körper werden langsamer fallen müssen als schwerere.

Wir werden aber in der Luftpumpe ein Mittel kennen lernen, um solche herzustellen, die keine oder nur sehr wenig Luft enthalten und zeigen, daß in diesen ein Stückchen Papier ebenso rasch fällt, als ein Stückchen Platin.

Die letzte Bedingung $s' < s$ kann man herstellen, wenn man große Ballons mit dünnen und leichten Wänden mit erwärmter Luft oder einem Gas anfüllt, welches specifisch leichter ist als Luft, z. B. Wasserstoffgas oder Leuchtgas.

Um die Kraft, mit welcher der Ballon aufsteigt, zu erhalten, haben wir nur von dem Auftrieb des Ballons $v (s - s')$ das Gewicht p aller seiner Bestandteile abzuziehen, wir erhalten also dafür

$$v (s - s') - p$$

Ist z. B. das Gas, mit dem der Ballon gefüllt ist, Wasserstoff

$$s = 0,001\,2932$$

$$s' = 0,000\,0895$$

bei Null Grad Temperatur, und wir erhalten

$$0,001\,203\,v - p$$

für die Kraft, mit welcher ein solcher Ballon in der Luft emporgehoben wird in Kilogrammen, wenn v in Litern gegeben ist.

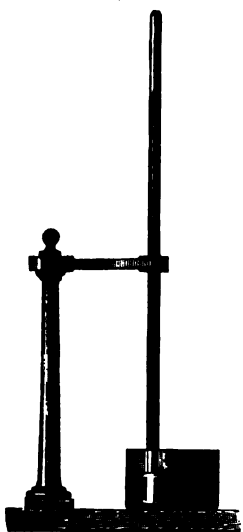
Die in neuerer Zeit vielfach benutzten Luftballons beruhen auf demselben Satze. Ein großer Schlauch von leichtem und doch dichtem Zeug mit einem leichten Gase gefüllt, so daß selbst nach Anhängen eines Gewichtes etc. sein Gewicht noch kleiner ist als die aus der Stelle gehobene Luft. Ein solcher Ballon wird sich daher mit allem Zubehör in der Luft erheben.

§ 90.

Das Barometer. Wir sahen in dem vorigen Paragraphen, daß auf dem Boden eines Luftmeeres uns befinden, und daß deshalb jeder Punkt einen ihrer Größe proportionalen Druck auszuhalten hat, der gleich dem Gewicht der Luftsäule, welche die Fläche zur Basis hat, deren Höhe ist derjenigen der Atmosphäre. Es bietet keine Schwierigkeit, diese Tatsache durch den Versuch nachzuweisen und die Größe dieses Druckes zu bestimmen.

Füllt man eine Röhre von ungefähr 1 Meter Länge ganz mit Quecksilber an, schließt sie mit dem Finger, stellt sie in ein Gefäß mit Wasser, wie Fig. 144 und öffnet dann durch Weg-

Fig. 144.



des Fingers die Röhre unter Wasser, so daß das Quecksilber in der Röhre, aber nur bis zu einem gewissen Punkte, so daß das Quecksilber in der Röhre ungefähr 760^{mm} höher steht als das Wasser im Gefäß.

Daraus folgt nach den früher bekannten statischen Gesetzen, daß auf der äußeren Oberfläche des Quecksilbers ein Druck lastet, der im Inneren der Röhre nicht vorhanden ist und dem die Quecksilbersäule von 760^{mm} das Gleichgewicht hält.

Kann man in diesem Drucke auf die äußere Oberfläche des Quecksilbers den Druck der äußeren Luft; durch die Füllung mit Quecksilber alle Luft aus der Röhre vertrieben, so ist dort kein dem äußeren Drucke gleicher Gegendruck. Deshalb kann das Quecksilber gehoben werden und zwar so weit, bis der Druck der gehobenen Quecksilbersäule dem äußeren Drucke gleich ist. Die gehobene Quecksilbersäule misst also die Schwere einer ihr an Volumen gleichenden Luftsäule, deshalb nennt man diesen Versuch ein Barometer.

Die Idee, mittels dieses Versuches die Existenz des Luftdruckes nachzuweisen, rührt von Viviani (1644) her. Schon früh kannte man die Tatsache, daß in Röhren, aus welchen die Luft ganz oder teilweise fortgezogen war, Flüssigkeiten emporsteigen. Man hatte diese Erscheinung z.

konstruktion der sogenannten Saugpumpen benutzt. Die Erklärung derselben suchte man aber nicht in einem Drucke der äußern Luft, sondern in dem *error vacui*, man nahm an, daß die Natur einen Abscheu vor dem leeren Raume habe, und daß infolge dieses Abscheues das Wasser in den Pumpenröhren aufsteige, wenn durch Hebung des Kolbens in denselben ein leerer Raum sich bilde. Auf das Unhaltbare dieser Erklärung wurde man aufmerksam, als in Florenz ein Pumpenmacher eine Saugpumpe herstellte, deren Saugrohr unter dem Bodenventil länger als 32 Fuß war; es gelang ihm, mit derselben das Wasser höher als nahe 32 Fuß zu heben. Nach dieser frühern Erklärungsweise hätte man annehmen müssen, daß die Natur bis zu dieser Höhe einen Abscheu vor dem leeren Raume hätte. Galilei, den man sich damals wandte, vermochte diese Schwierigkeit nicht aufzuklären; erst sein Schüler Viviani erkannte die Ursache des Steigens des Wassers. Er schloß weiter, wenn der Luftdruck das Wasser bis zu einer Höhe von 32 Fuß oder 10,25 Meter heben kann, so kann er das Quecksilber, welches ungefähr 13,5 mal schwerer ist, nur bis zu einer 13,5 mal geringern Höhe oder nur bis ungefähr 28 Zoll = 760^{mm} heben. Der von Torricelli's Freund, Toricelli, ausgeführte Versuch bewies die Richtigkeit dieser Annahme. Später zeigte dann Pascal in der That, daß die Höhen, bis zu denen verschiedene Flüssigkeiten in so vorgerichteten Röhren gehoben werden, ihrem spezifischen Gewichte umgekehrt proportional seien, ein Beweis, daß ein bestimmtes Gewicht einer Flüssigkeit in einer Röhre von gegebenem Querschnitte gehoben wird, welches dem äußern Drucke gleich ist.

Der vorhin beschriebene Apparat, das Barometer in seiner einfachsten Form, ist jedoch zu genauen Messungen über die Größe des Luftdruckes nicht geeignet. Dazu muß dasselbe sorgfältig hergerichtet werden.

§ 91.

Konstruktion des Barometer. Damit das Barometer seinen Zweck erfülle, ein genau bestimmbares Maß des Luftdruckes zu bieten, muß es mehreren Bedingungen genügen:

1) Muß das Quecksilber vollständig rein sein, da unreines Quecksilber eine andere Dichtigkeit hat als reines und an den Wänden der Glasröhre haften kann.

2) Die Barometerröhre muß ganz rein sein.

3) In dem über dem Quecksilber befindlichen Raume des Barometer muß keine Luft sein.

Um der ersten Bedingung zu genügen, muß man das käufliche Quecksilber, welches stets eine geringe Menge Oxyd und fremde Metalle enthält, reinigen. Das beste Verfahren dazu ist, daß man das Quecksilber in einer starken Glasflasche mit stark verdünnter Salpetersäure dauernd heftig schüttelt. Man setzt das so lange fort, bis sich das Quecksilber in der verdünnten Säure in ganz kleine Kügelchen zerteilt, so daß das Quecksilbergemenge beim Schütteln als eine gleichförmige graue Masse erscheint. Dann gießt man die verdünnte Säure ab und füllt statt ihrer kochendes Wasser in die Flasche und schüttelt wieder. Das Wasser wird bald und zwar so lange erneuert, bis das abgegossene Wasser durchaus nicht mehr sauer reagiert; man überzeugt sich davon durch Prüfung mit

erwärmen, um das stofsweise Kochen zu verhindern. Nach einiger Übung ist es nicht schwer, ein ruhiges Kochen zu erzielen. Hat man die Spitze nun ausgekocht, so geht man mit der Flamme an der Röhre hinauf, indem man sie immer um die Röhre herumführt, und kocht die höhern Teile der Röhre, aber nur bis ungefähr 5^{cm} unter der Oberfläche derselben, um zu verhindern, daß das siedende Quecksilber mit der äußern Luft in Berührung kommt, da hierbei sonst eine teilweise Oxydation des Quecksilbers eintritt und das gebildete Oxyd sich im Quecksilber auflöst und es verunreinigt. Ist das Kochen soweit vorgeschritten, so unterbricht man es und füllt das Rohr bis zum zweiten Drittel mit trockenem und heißem Quecksilber. Man fängt dann etwas unter der Stelle, an der man vorhin das Kochen beendigte, wieder an vorsichtig zu erhitzen und verfährt wie vorhin. Ist auch der Teil ausgekocht, so füllt man das Barometerrohr vollständig, bis vielleicht 2^{cm} unter dem obern Ende an und kocht auch dieses Stück in der vorhin beschriebenen Weise aus, indem man immer stofsweises Kochen vermeidet und verhindert, daß das siedende Quecksilber mit der Luft in Berührung kommt.

Man vertreibt auf diese Weise alle Luft und alle Feuchtigkeit, welche vorher noch in der Röhre waren, indem sie am Glase adhärirten, und erkennt, ob das Barometer wirklich gelungen ist, daran, daß man in der ganzen Ausdehnung desselben keine Blase zwischen Glas und Quecksilber wahrnimmt, und daß das Rohr wie ein vollkommener Spiegel aussieht.

Nach dieser Methode kann man es leicht dahin bringen, daß nur selten ein Barometer mißlingt, und zugleich ist sie ziemlich ungefährlich. Bekanntlich sind die Quecksilberdämpfe giftig, und man muß sich hüten, sie einzuathmen. Springt das Barometer, so löscht man die Flamme augenblicklich durch Zudrehen des Gashahns, und auf der Wanne von Blech kühlt sich das Quecksilber fast momentan ab, so daß nur wenig Dämpfe sich entwickeln; hat man aber das Rohr nach sonstigen Methoden in eine geneigte rostartige Rinne gelegt und durch glühende Kohlen erhitzt, so ist bei einem Zerspringen des Rohres die massenhafte Entwicklung von Dämpfen wohl kaum zu vermeiden. Überdies hat man bei der angegebenen Methode die Erhitzung weit besser in seiner Gewalt.

Taupenot gibt eine Vorsichtsmaßregel, welche das Kochen sehr erleichtert (*Annal. de chim. et de phys.* III. Série. Tome XLIX. p. 91). Er schlägt vor, die Röhre ungefähr 10^{cm} länger zu nehmen, als man sie später bedarf, in dem Stücke einige Verengerungen anzubringen, an das offene Ende der Röhre eine Kautschukröhre zu befestigen, welche mit einer Luftpumpe in Verbindung steht, und dann die Luft über dem Quecksilber auszusaugen. Dann siedet das Quecksilber bei einer um 90° tiefern Temperatur und das Stofsen wird noch leichter vermieden.

Nach dem Kochen läßt man die Röhre sich abkühlen, schneidet den überschüssigen Teil derselben glatt ab und füllt die Röhre mit trockenem warmem Quecksilber soweit, daß dasselbe in Form einer Kuppe an den Rändern der Röhre hervorragt. Man schließt die Röhre mit dem Finger, indem man die Kuppe vorsichtig abstreift, kehrt sie um und taucht sie in ein Gefäß mit Quecksilber, wobei man darauf zu achten hat, daß beim Umdrehen keine Luftblase in den leeren Raum der Röhre mit dem Quecksilber eindringt.

Ist das Barometer auf diese Weise hergestellt, so muß es fest gestellt und mit einer Teilung in Millimeter versehen werden, um Augenblick den vertikalen Abstand der beiden Quecksilberniveaus inn und auferhalb der Röhre zu messen. Da nun aber das Quecksilber in der Röhre nur steigen kann, wenn das Niveau im Gefäße eine entsprechende Strecke sinkt, so muß die Teilung so angebracht sein, daß man die beiden Niveaus beobachten kann.

§ 92.

Verschiedene Formen der Barometer. Dient das Barometer zu genauen Versuchen im Laboratorium, so daß es nicht von seinem Orte gebracht zu werden braucht, und hat man ein Kathetometer zu Gebote, ist die Einrichtung desselben sehr einfach. Man wendet als Gefäß einen parallelepipedischen Glaskasten an, den man auf ein in der Zimmerwand am besten vor einem Fenster angebrachtes festes Tischchen fest aufstellt (Fig. 145). Das Rohr wird mittels zweier Klammern an einem Brett befestigt, welches mit dem Tischchen zugleich unten an der Zimmerwand fest eingelassen ist, und welches an der Stelle, wo sich der leere Raum des Barometers befindet, einen Ausschnitt erhält, so daß man durch den Ausschnitt dem Barometer die helle Fensterfläche sieht.

Fig. 145.



Man mißt dann die Niveauunterschiede des Kathetometers. Um diese Messungen mit größter Genauigkeit auszuführen, ist unten am Gefäße ein Stift A angebracht, der mittels einer Schraube in dem festen Gestell gehoben und gesenkt werden kann. Wenn man die Messung machen will, beginnt man damit, den Stift soweit herab zu lassen, daß seine Spitze gerade das Quecksilber berührt. Dann kann dieses mit der größten Genauigkeit abgelesen werden, denn beim Herablassen sieht man das Bild des Stiftes im Quecksilber und den Stift selbst sich gegen ein bewegen. Der Stift berührt in dem Augenblicke das Quecksilber, wo die beiden Spitzen genau auf einander treffen. Schraubt man zu weit, so hebt sich das Quecksilber rings um den Stift aus. Darauf stellt man das Kathetometer zunächst auf die Quecksilberkuppe in der Röhre ein, indem man den horizontalen Faden des Fadenkreuzes gerade die Kuppe tangieren läßt. Man bemerkt den Stand des Kathetometers an der Skala.

Man stellt dann unten auf das Niveau im Gefäße ein, indem man die Spitze des Stiftes wieder gerade das Fadenkreuz berühren läßt. Die Differenz der beiden Ablesungen gibt die Höhe des Barometerstandes. Hat man vorher die Länge des Stiftes genau gemessen, so kann man auch so verfahren, daß man anstatt das Niveau des untern Quecksilbers mit dem Kathetometer visieren, das obere Ende des Stiftes bestimmt. Zur Differenz der beiden Ablesungen am Kathetometer fügt man dann, um den Barometerstand zu erhalten, die Länge des Stiftes.

es Barometer ist das einfachste, und diese Messungsmethode ist die beste, denn man kann auf diese Weise die Niveaununterschiede am besten erhalten; mag das Barometer vertikal stehen oder nicht, man ermittelt den vertikalen Abstand der beiden Quecksilberoberflächen. Man kann die Höhe des Barometers bis auf ein Fünfzigstel Millimeter

Barometer von Fortin. Das soeben beschriebene Barometer kann auch an einem festen Orte benützt werden. Man bedarf aber in sehr seltenen transportabler Barometer, teils auf Reisen, um den Luftdruck an verschiedenen Orten zu messen, teils, wie wir später zeigen werden, zu anderen Zwecken. Man muß daher dann ein tragbares Barometer anwenden, an welchem der Maßstab ein für allemal ist. Das vorzüglichste Gefäßbarometer der Art ist das von Fortin.

Das Gefäß desselben (Fig. 146) besteht aus einem Metallgefäß, welches mit einem kupfernen Deckel versehen ist, in seiner Mitte eine Öffnung hat, um das Barometerrohr durchzulassen. Der Glaszylinder steht in einem Cylinderrahmen von Buchsbaumholz, der mittels einer Schraube an dem Deckel festgeschraubt ist. Der Boden des Cylinderrahmens ist aus einem elastischen Material, einem Beutel, dessen innere Seite aus vulkanisiertem Kautschuk, dessen äußere aus Metall besteht, und der über den vorspringenden Rand des Cylinderrahmens von Buchsbaum fest aufgebunden ist. Der Cylinderrahmen ist in einem weiten Metallgefäß eingeschraubt, durch dessen Boden eine Schraube hindurchgeht, deren oben abgerundeter Kopf ein metallisches Stück drückt, welches in der Mitte des Beutels befestigt ist und in dessen nach unten gerichteter Höhlung der Kopf der Schraube hineinpafst. Das Gefäß ist bis zu einer gewissen Höhe mit Quecksilber gefüllt. Wenn man die Schraube dreht, hebt oder senkt die elastische Boden des Gefäßes und damit die Höhe des Quecksilbers in dem Glaszylinder. Man ist daher imstande, das Niveau des Quecksilbers im Gefäße immer auf gleicher Höhe zu halten. Um diese zu markieren, reicht von dem Boden des Glaszylinders ein Elfenbeinstift *s* in den Boden des Gefäßes hinab und man hat nur nötig, gerade so wie bei den gewöhnlichen Barometern dafür zu sorgen, daß die Spitze des Stiftes *s* und ihr Bild sich berühren, indem man die Oberfläche des Quecksilbers mit Hilfe der Schraube soweit hebt. Diese Spitze ist der Ausgangspunkt der Teilung des Barometerrohrs.

Das Barometerrohr reicht durch die in der Mitte des Deckels angeordnete Öffnung in das Gefäß hinein, und ein Stück Leder, welches an beiden Enden über den Deckel hervorragenden Wänden der Öffnung angebracht ist, verschließt dieselbe soweit, daß kein Quecksilber heraus-

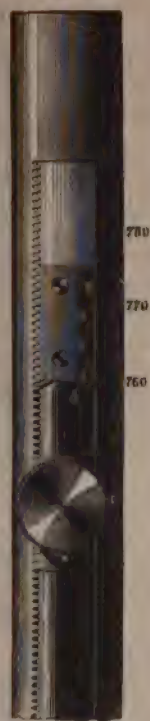
Fig. 146.



treten, aber die äußere Luft ungehindert mit der des Gefäßes kommunizieren kann. Das Rohr ist vollständig von einer Messinghülse umgeben, um es gegen Stöße zu schützen, in welcher nur, um den Stand des Quecksilbers beobachten zu können, oben zwei gegenüberliegende Spalten gebracht sind, die vielleicht zwei Decimeter unter und über den Nullpunkt

Fig. 148.

Fig. 147.



Stand des Barometers von 760 Millimeter lang sind. Auf der Messinghülse ist eine Millimeterteilung angebracht, welche oben neben dem Nullpunkt der Spalte steht und deren Nullpunkt die Spitze des Elfenbeinstiftes bildet. Der eine Rand der Spalte ist gezahnt (Fig. 147) und mittels eines Nonius ist daran ein Nonius auf und ab verschiebbar. Will man eine Ablesung machen, so beginnt man damit, unten das Niveau des Quecksilbers in der Hülse einzustellen. Dann verschiebt man den Nonius, indem man das Nonius in der durch den untern Rand desselben gehenden Horizontalebene hin und her schiebt, bis diese Ebene die Quecksilberkuppe tangiert, und hat die Stellung des in dieser Ebene liegenden Nullpunktes des Nonius abgelesen.

Lesung zu bestimmen, um den Stand des Barometer bis auf Zehntel Millimeter genau zu erhalten. Das Barometer wird auf einem dreibeinigen Stativ, welches beim Transport zugleich als Etui dient (Fig. 148), so aufgehängt, daß es durch die Schwere des Gefäßes immer vertikal hängt. Dann ist es mittels einer sogenannten Cardanischen Aufhängung befestigt, das heißt um zwei zu einander senkrechte Axen drehbar. Das Barometer ist an dem Durchmesser eines Ringes drehbar befestigt, der selbst um einen in jenem senkrechten Durchmesser drehbar ist.

Dieses Barometer ist sehr leicht transportabel und bietet so einen weitern Vorteil dar. Man schraubt dann das Quecksilber des Gefäßes in die Höhe, soweit, bis nicht nur das Gefäß, sondern auch das Rohr selbst ganz mit Quecksilber gefüllt ist. Die vorher in dem Gefäße befindliche Luft tritt dann durch das Leder aus. Dann kann man den Apparat legen oder umkehren, ohne daß Luft in das Barometer eindringt, und ohne berichten zu müssen, daß durch etwaige Stöße Schwankungen des Quecksilbers eintreten, so daß durch den Stoß des Quecksilbers das Glas entzweielt. Der zusammengelegte Dreifuß schützt als Etui das Barometer vor äußern Verletzungen.

§ 93.

Korrektion wegen der Kapillarität. Da in den bisher beschriebenen Barometern das Rohr stets in ein mehr oder weniger weites Gefäß mit Quecksilber taucht, so ist nach den § 73 vorgetragenen Lehren klar, daß die Oberfläche des Quecksilbers in dem Rohre bedeutend stärker gekrümmt ist, als in den Gefäßen, und daraus folgt weiter, daß in den Röhren wegen der kapillaren Depression das Quecksilber nicht so hoch steht, als es in Folge des hydrostatischen Druckes thun würde. Wir müssen daher an den beobachteten Barometerständen eine Korrektion anbringen, indem wir die Depressionsgröße bestimmen und diese der beobachteten Barometerhöhe hinzufügen. Dies ist jedoch sehr schwierig. Wir sahen, daß die kapillare Depression abhängt von der Weite der Röhre und dem Winkel, unter dem die Flüssigkeitsoberfläche die Wandfläche schneidet. Wenn man nun den Winkel mißt, den die Quecksilberoberfläche mit der Wand bildet, so findet man denselben, wie wir bereits früher erwähnten, keineswegs konstant; ja die Schwankung ist im Barometer noch viel bedeutender als sonst, es kommt vor, daß der Winkel nahezu ein rechter wird, wo dann keine Depression eintritt. Die Depression des Quecksilbers kann demnach in Röhren gleichen Durchmessers sehr verschieden sein, und man kann keine allgemein gültigen Tabellen aufstellen, um die Depression für Röhren eines bestimmten Durchmesser zu bestimmen. Man wird für jedes Barometer den Durchmesser der Röhre und für jede Beobachtung die Höhe des Quecksilbers messen, daraus den Winkel bestimmen müssen, unter dem die Quecksilberoberfläche die Wandfläche schneidet, und daraus dann die Depression berechnen. Um das leichter zu machen, sind verschiedene Tabellen berechnet, welche nach den Formeln von La Place die Depressionen bei verschiedenen Winkeln und Röhrendurchmessern angeben. Eine solche von Laplace berechnet findet sich im XIV. Bande der Memoiren der Brüsseler Akademie. Für einen Winkel von 36° gibt Bravais¹⁾ folgende Zahlen an:

¹⁾ Bravais, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome V.

Durchmesser der Röhre	Depression
4 ^{mm}	1 ^{mm} ,635
6	0 909
8	0 538
10	0 322
12	0 195
14	0 117
16	0 070
18	0 041
20	0 025.

Man sieht, wie die Depression mit der Weite der Röhre nimmt, und daß sie bei einem Röhrendurchmesser von 20^{mm} schon halb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler beim Fort Barometer fällt. Wenn man die Röhre noch weiter, gegen 30^{mm} so ist der Fehler stets verschwindend klein. Deshalb wendet man festen Barometern auch Röhren von solchem Durchmesser an. I transportabeln ist jedoch eine solche Weite wegen des zu großen Ge des darin enthaltenen Quecksilbers nicht anwendbar. Doch auch bei darf der Durchmesser der Röhre füglich nicht unter 10^{mm} klein sei

§ 94.

Heberbarometer. Von den bisher beschriebenen Barometer Gefäßbarometern, unterscheiden sich die Heberbarometer. Diesel stehen aus einer heberförmig gebogenen Glasröhre, deren langer S oben geschlossen und deren kurzer Schenkel oben offen ist. Sind die an der Stelle, wo die Quecksilberoberflächen sich befinden, gleich v bedarf es bei ihnen keiner Korrektion wegen der Kapillarität, so da bei der Unsicherheit dieser Korrektion mit diesen Barometern weit si Resultate erhält.

In dem Falle aber ändern sich beide Niveaus des Quecksil gleichem Maße und deshalb muß hier die Teilung in besonderer angebracht werden.

Kann man den Barometerstand mit dem Kathetometer bestimm bedarf es auch in diesem Falle gar keiner Teilung, eine heberförm bogene Glasröhre wird vor einem mit Ausschnitten versehenen Brette befestigt (Fig. 149) und mittels desselben vertikal aufgehäng die beiden Quecksilberoberflächen nahezu vertikal unter einander zu l wird die Röhre meist noch einmal doppelt gebogen. Eine einfache A mit dem Kathetometer ergibt dann den Barometerstand mit größt nauigkeit. Hat man kein Kathetometer zu Gebote, so kann man z die Teilung auf dem Glase anbringen. Dazu wird der Abstand Punkte *a* und *b* genau gemessen und der Punkt *a* als Nullpunkt d lung betrachtet. Sei die Entfernung *ab* gerade gleich 760^{mm}, so wi den Teilstrich *a* mit 0 und *b* mit 760 bezeichnen. Über und unter über und unter *b* werden dann eine Reihe von Teilstrichen gezogen den Barometerstand zu erhalten, beobachtet man, wie viel Teilstr obere und untere Kuppe des Quecksilbers über oder unter dem Null steht, und die Differenz beider Ablesungen gibt den Barometersta unserer Zeichnung würde z. B. die untere Kuppe am Teilstriche 10

Nullpunkte α , die obere bei 750 stehen, der Barometerstand wäre $750 - 10 = 740^{\text{mm}}$. Beim Ablesen hat man darauf zu achten, daß er sich mit dem Gipfel der Kuppe in der gleichen Horizontalebene befindet. Um dieses zu erhalten und zugleich um die Ablesung genauer zu machen, sind bei feinem Apparaten an dem obern, sowie am untern Teile des Barometers verschiebbare, mit Fadenkreuz versehene kleine Mikroskope angebracht.

Anstatt die Teilung auf dem Barometerrohr selbst anzubringen, kann sie auch neben dem Rohre auf dem Brette angebracht werden. Ist das ein für allemal fest angebracht, und ist die Teilung fest, so erhält man den Barometerstand in gleicher Weise wie in dem vorigen Falle.

Häufig findet man an Barometern, um eine genaue Ablesung des Barometerstandes zu erhalten, das Rohr oder die Skala vertikal verschiebbar angebracht. Ist wie in Fig. 150 das Rohr vertikal verschiebbar, so befindet sich das Rohr auf dem Brette, auf welchem die Skala angebracht ist, der Nullpunkt der Teilung steht auf dem Nullpunkte der Skala. Man stellt dann mit Hilfe der Schraube das Rohr so, daß die untere Kuppe gerade an dem Nullpunkte der Skala ansteht. Die an dem obern Teile des Barometers angebrachte Teilung ist von diesem Punkte aus aufgetragen und die Ablesung ergibt den Stand des Barometers.

Ist die Skala verschiebbar, so wird der Nullpunkt derselben auf die untere Kuppe eingestellt.

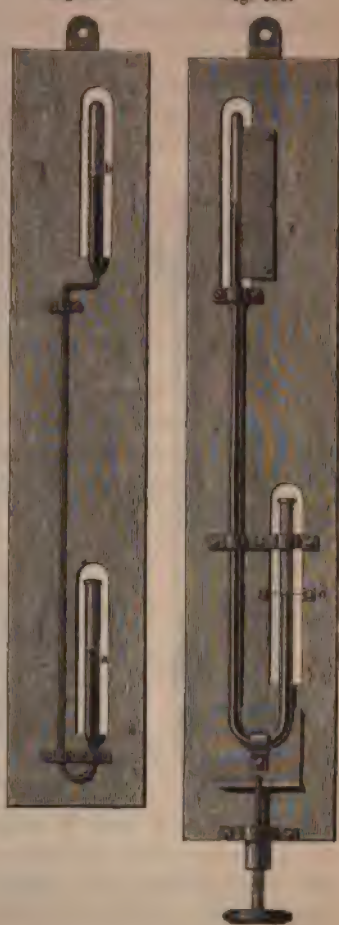
Man hat den Heberbarometern, um sie sicherer und sicherer transportieren zu können, mancherlei Formen gegeben, deren eine ist, den offenen Schenkel zu verschließen, so daß kein Quecksilber herausfließen kann, eine Luft in den leeren Raum des Barometers hinein kann. Die in Fig. 149 dargestellten Barometer werden durch ein mit Baumwolle umwickeltes Stäbchen geschlossen, nachdem man vorsichtiges langsames Neigen den Raum ganz mit dem Quecksilber gefüllt hat. Das Stäbchen wird soweit

gedrückt, daß es ganz auf dem Quecksilber aufsteht, und dann das Barometer umgekehrt, damit das Gewicht des Quecksilbers das Stäbchen heraufdrückt.

Ein vortrefflicher Verschluss bietet die Vorrichtung, welche der Herr Greiner an seinem Heberbarometer angebracht hat (Fig. 151).

Fig. 149.

Fig. 150.



Die innern Wände des langen und kurzen Schenkels gehen nicht unmittelbar in einander über, sondern der lange Schenkel ist mit dem kurzen durch den künstlichen Glasverband *aa* verbunden. Der längere Schenkel ist konisch ausgezogen und um diesen Konus liegt bei *a* angeschmolzen der ausgeweitete Teil des kürzeren Schenkels. Durch die Öffnung *b*, welche ungefähr 2^{mm} weit ist, kommuniziert der längere Schenkel mit dem kürzeren, der sie umgebende Raum ist stets mit Quecksilber gefüllt. Zum Transport wird das Barometer verschlossen, indem der Stopfen in die Verengung des kürzeren Schenkels hinab geschoben und dessen Stiel in der Messfassung *d* des kürzeren Schenkels festgeklemmt wird.

Fig. 151.

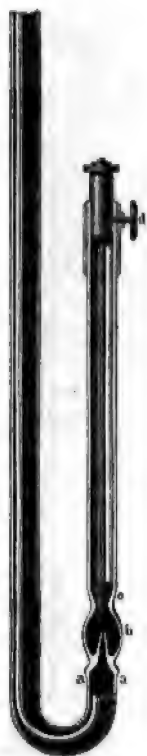


Fig. 152.

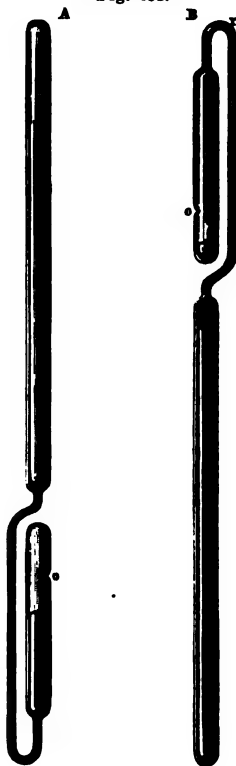


Fig. 153.



Fig. 152 *A* und *B* zeigt das Gay-Lussacsche Barometer, welches ebenfalls sehr leicht und sicher transportiert werden kann. Es besteht aus zwei Stücken einer gut cylindrischen Röhre, welche durch eine mehrfach gebogene enge Röhre so verbunden sind, daß die Quecksilbersäulen in beiden Röhren gerade unter einander liegen. Das Gefäß des Barometers hat nur eine sehr kleine Öffnung bei *O*, die dadurch erhalten wird, daß man in die vor der Glasbläserlampe erweichte Röhrenwand hineinsticht. Zum Transport neigt man das Barometer langsam, bis der kurze Raum ganz mit Quecksilber erfüllt ist, und kehrt dann das Barometer vollständig um. Dann füllt das Quecksilber den langen Schenkel bis zur

das überschüssige fällt in den kürzeren Schenkel unter die Öffnung *O*, durch welche es wegen der kapillaren Depression des Quecksilbers im Glase nicht eintreten kann. Man sieht, daß das umgekehrte Barometer, da es vollständig bis *r* mit Quecksilber erfüllt ist, beim Transport keine Stöße erleiden kann, und zugleich, daß durch die enge Röhre nicht wohl Luft in den leeren Raum des Barometer gelangt.

Das Barometer von Buntén (Fig. 153) ist vor dem Eindringen von Luft noch mehr gesichert, indem über der untern Biegung der engern Röhre eine weitere Röhre angebracht ist, in welche sich der obere Teil der engern Röhre fortsetzt und in der er in einer feinen Spitze endigt; wenn nun doch eine Luftblase eindringen sollte, so legt sich dieselbe in den Raum, der die Fortsetzung der engen Röhre umgibt, bei *R* und dringt nicht in den leeren Raum des Barometer.

Die drei letzten Barometer sind im übrigen gerade so auf einem Brette aufgestellt, wie die zuerst beschriebenen einfachen Heberbarometer. Die Skala ändert sich entweder auf dem Rohre oder auf der Unterlage des Barometer mit den vorhin erwähnten Modifikationen¹⁾.

Bei dieser Art Barometer bedarf es keiner Korrektion wegen der Dilatabilität, aber bei diesen sowohl wie bei den Gefäßbarometern einer Korrektion wegen der Temperatur. Das Quecksilber dehnt sich nämlich mit der Wärme aus, alle Körper beim Erwärmen aus und wird dadurch leichter; demnach hält die Luft daher von kaltem Quecksilber eine kürzere Strecke als das Gleichgewicht als von warmem. Die bei verschiedenen Temperaturen genommenen Barometerstände sind daher nicht vergleichbar. Man muß deshalb die bei verschiedenen Temperaturen genommenen Stände auf eine Temperatur und somit gleiche Dichtigkeit reducieren. Als solche Normaltemperatur nimmt man die Temperatur des schmelzenden Eises, Null Grad. Ist der Barometerstand *B* bei einer Temperatur *t*⁰ nach der Barometerskala von Celsius, so ist, wie wir in der Wärmelehre nachsehen werden, der Barometerstand *b* bei der Temperatur Null Grad

$$b = \frac{B}{1 + 0,00018 \cdot t}.$$

§ 95.

Aneroidbarometer. Alle bisher betrachteten Barometer beruhen auf dem hydrostatischen Gesetze, daß in kommunizierenden Röhren die Höhen der Flüssigkeitssäulen von verschiedenem spezifischen Gewicht sich verhalten umgekehrt wie die spezifischen Gewichte der Flüssigkeiten. Bourdon²⁾

¹⁾ Eine Beschreibung und Theorie der in neuerer Zeit auf den meteorologischen Observatorien vielfach als Registrierapparate benutzten Wagebarometer, die hier zu weit führen und liegt, als von speciell meteorologischem Interesse, unsern Zwecken zu fern. Man findet eine ausführliche Besprechung derselben in: *Schreiber*, Theorie und Praxis des Wagebarometers. *Carl*, Repertorium Experimentalphysik Jahrg. 1872.

²⁾ *Bourdon*, Baromètre métallique. Comptes rendus hebdomadaires de l'Institut France. Bd. XXXVII. p. 656. Die Metallbarometer sind seitdem in sehr vielen verschiedenen Formen konstruiert, da sie als Reisebarometer sehr bequem sind. Heute zu letzterem Zwecke sind die Barometer von *Goldschmidt* in Zürich sehr

hat zuerst ein Barometer konstruiert, welches auf einem ganz andern Principe beruht, und welches, wenn auch zu exakten Messungen nicht so eignet wie die bisher betrachteten, doch in sehr einfacher Weise Schwankungen des Luftdruckes zu erkennen gibt. Das Barometer beruht auf dem § 53 vorgetragenen Satze, daß die Biegung von Stäben proportional ist der Kraft, welche die Biegung hervorbringt. Wenn eine elastische kreisförmig gebogene Röhre an ihren Enden fest verschlossen wird, so krümmt sie sich demnach stärker oder schwächer, wenn bei constantem innern Druck der äußere Druck stärker oder schwächer wird.

Fig. 154.



dem Bourdonschen Barometer ist eine sehr dünne elastische Röhre bei F befestigt und an A und B frei; im Innern der Röhre ist die Luft sehr stark verdünnt. Wenn nun der Druck der atmosphärischen Luft stärker wird, nähern sich die Enden A und B , und um die feste Axe C drehbarer Winkel $ADCEB$ dreht sich und überträgt die Drehung mittels des gezähnten Radstückes G auf einen Zeiger, der auf einer am Umfang des Barometer angebrachten Teilung eintrifft. Nimmt der Luftdruck ab, so gehen die Enden A und B der Röhre wieder aus einander, und der Zeiger bewegt sich nach entgegengesetzter Richtung. Bei mittlern Barometerstand zeigt der Zeiger über F , steigt der Luftdruck

bewegt er sich zur rechten, fällt derselbe, zur linken Seite. Die Teilung wird nach einem Quecksilberbarometer aufgetragen und gibt den Luftdruck in Millimetern Quecksilberhöhe an.

In neuerer Zeit hat Victor Pierre ¹⁾ Reduktionsformeln angegeben, mittels deren das Barometer bei nicht zu großen Schwankungen des Luftdruckes auch zu Messungen geeignet ist, wenn nicht die äußerste Genauigkeit verlangt wird. Die von Hempel in Paris gearbeiteten Metallbarometer sind indes so vorzüglich, daß man sie, wenigstens wo nicht die äußerste Genauigkeit verlangt wird, ohne weiteres zu Messungen benutzen kann.

§ 96.

Anwendung des Barometer. Wir haben bei der Konstruktion die Beschreibung des Barometer so lange verweilt wegen der Wichtigkeit des Apparates. Wir werden dasselbe bei sehr vielen physikalischen Untersuchungen in Anwendung finden.

Eine der wichtigsten Anwendungen findet es in der Meteorologie, wo es nicht nur den Luftdruck im allgemeinen mißt, sondern auch die Schwankungen desselben in jedem Augenblicke angibt, und so eine Grundlage für die Fundamentalererscheinungen der Witterungslehre auf das genaueste zu

geeignet. Man muß dieselben aber ebenso wie alle übrigen Metallbarometer von Zeit zu Zeit nach einem Quecksilberbarometer regulieren. Besser noch als die von Goldschmidt sind die Barometer von Naudet.

¹⁾ Über das Bourdonsche Metallbarometer von Victor Pierre. Prag, (Aus den Verhandl. der kgl. Böhmisches Gesellschaft der Wissenschaften.)

n gestattet. Wir müssen uns damit begnügen, einige Resultate hier führen, deren weitere Ausführung der Witterungslehre angehört.

Beobachtet man an einem und demselben Orte regelmäßig, vielleicht Stunden, das Barometer, so sieht man bald, daß dasselbe keineswegs denselben Stand hat, sondern bald höher bald tiefer steht. Bei genaueren Untersuchung dieser Schwankungen unterscheidet man bald Klassen derselben: periodisch regelmäßige und unregelmäßige. Erstere geben nur wenige Millimeter, letztere können 30—40 Millimeter betragen. Betrachten wir zunächst die regelmäßigen Schwankungen, welche in der Region der Tropen fast allein vorhanden sind, so erkennt man, daß das Barometer zweimal des Tages einen höchsten und zweimal einen tiefsten Stand hat. Die höchsten Stände sind kurz nach Sonnenuntergang und des Morgens zwischen 9 und 10 Uhr Vormittags, die tiefsten einige Zeit vor Sonnenaufgang und des Nachmittags gegen 4 Uhr. Die Zeiten, an denen Maxima und Minima auftreten, ändern sich im Laufe des Jahres etwas, der erste Stand des Nachmittags und der höchste Stand am Abend tritt immer sehr viel später, dagegen der tiefste Stand am Morgen im Sommer viel früher ein als im Winter, nur der höchste Stand am Morgen fällt nahezu um dieselbe Zeit, im Sommer vielleicht $\frac{1}{4}$ Stunde früher als im Winter.

Wenn man aus den stündlichen Beobachtungen das arithmetische Mittel nimmt und so den mittlern täglichen Barometerstand bestimmt, so findet man bei einer Vergleichung der verschiedenen Barometerstände im Laufe des Jahres, daß auch diese einer periodischen Änderung unterworfen sind, die Barometerstände sind im Winter höher, der Luftdruck ist also größer als im Sommer.

Nimmt man aber aus allen täglichen mittlern Barometerständen wieder das arithmetische Mittel und bestimmt so den mittlern jährlichen Barometerstand, so findet man denselben bei fortgesetzten Beobachtungen in verschiedenen Jahren merklich gleich groß, so daß wir schließen müssen, daß der Luftdruck im Großen und Ganzen, jene Schwankungen abgerechnet, derselbe bleibt.

Vergleicht man aber die so erhaltenen Jahresmittel, welche uns also den mittlern Luftdruck eines Ortes geben, für verschiedene Orte mit einander, so finden wir, daß der Luftdruck für verschiedene Orte eine verschiedene Größe hat. Zunächst ändert sich der Barometerstand mit der Höhe eines Ortes über dem Boden, oder der Meeresfläche, nach einem Gesetze, welches wir demnächst ableiten werden, nämlich so, daß die Barometerhöhe in einer geometrischen Reihe abnimmt, wenn die Erhebungen in arithmetischen Reihenfolge wachsen, das heißt, wenn wir um

$$a, 2a, 3a \dots na$$

aufsteigen, ist der Barometerstand

$$bq, bq^2, bq^3 \dots bq^n,$$

q eine konstante Zahl bedeutet, welche kleiner als 1 ist.

Mit Hilfe dieses Gesetzes können wir alle an verschiedenen Orten, deren Höhe über der Meeresfläche bekannt ist, beobachteten Barometerstände auf die Meeresfläche reducieren. Thut man das, so findet man, daß

auch dort der Barometerstand keineswegs an allen Orten derselbe ist, da er vielmehr sich mit der Länge und Breite eines Ortes ändert. Und Änderungen des Barometerstandes mit der Länge eines Ortes auch annähernd zu bestimmen, dazu reicht das vorhandene Beobachtungsmaterial keineswegs aus. Für die Änderungen mit der Breite eines Ortes scheint aber ganz allgemein das Gesetz zu herrschen, daß der Barometerstand vom Äquator bis gegen den 30. Breitengrad zunehme, von dort bis zum 65. Breitengrad abnehme und in höheren Breiten wieder wachse. Um ein Bild der Änderungen zu geben, führen wir Schouws Angaben hier an, der aus Beobachtungen verschiedener Orte auf Inseln und an den Gestaden atlantischen Oceans folgende Übersicht zusammengestellt hat¹⁾:

Breite nördlich	Barometerstand	Breite nördlich	Barometerstand
0	762,2	50	762,2
10	763,7	60	758,9
20	765,5	65	753,4
30	766,6	70	755,6
40	764,4	75	758,9

Die Barometerstände am Meeresufer, schließt Schouw, scheinen nämlich das neben einander darzubieten, was in zeitlicher Reihenfolge die täglichen und jährlichen Schwankungen zeigen.

Von viel bedeutenderer Größe als die periodischen Änderungen des Barometerstandes sind die nicht periodischen. Daß aber auch diese gewissen Regelmäßigkeit folgen, hat Dove auf das sicherste nachgewiesen, indem er den Begriff der barometrischen Windrose aufstellte und zeigte, daß die Barometerschwankungen auf das innigste mit den Änderungen der Windrichtung zusammenhängen.

Der Barometerstand ist im allgemeinen bei Nordostwind am höchsten, sinkt bei Ost-, Südost-, Südwind, ist bei Süd- oder Südwestwind am tiefsten und steigt bei West-, Nordwest- und Nordwind²⁾.

So ist z. B. für Carlsruhe:

Windrichtung	Barometerstand	Differenz
NO	757,74	
O	756,75	— 0,99
SO	754,50	— 2,25
S	752,92	— 1,58
SW	754,24	+ 1,32
W	754,86	+ 0,62
NW	756,26	+ 1,40
N	757,14	+ 0,88
NO	757,74	+ 0,60.

Den innern Zusammenhang dieser Thatfachen weist die Meteorologie nach, sie zeigt, daß die Luftströmungen, welche ein Sinken des Barometers bewirken, uns warme, und diejenigen, welche ein Steigen des Barometers bewirken, uns kalte Luft bringen.

¹⁾ Schouw, Poggend. Ann. XXVI. p. 434.

²⁾ Doves Repertorium der Physik. Bd. 4. Meteorologische Untersuchungen. Berlin 1835 und Klimatologische Beiträge. Berlin 1857.

ren, uns kalte Luft zuführen. Die Wärmelehre wird uns den physikalischen Grund dieser Thatsachen darbieten.

Mit der Änderung des Windes hängt nun aber auf das innigste die Änderung des Wetters zusammen; im mittlern Europa bringt Süd- und Westwind im allgemeinen Regen, dagegen Nordostwind heiteres und besseres Wetter, so daß der Barometerstand selbst mit dem Wetter parallel verläuft.

Bei hohem Barometer haben wir sogenanntes gutes Wetter, bei niedrigem Regen und Wind; der mittlere Barometerstand entspricht dem Übergang vom guten zum schlechten und vom schlechten zum guten Wetter. Deshalb findet man auch in vielen Häusern das Barometer als solches Wetterglas, und neben den entsprechenden Barometerständen die Vorhersagen gutes Wetter, veränderliches Wetter, Regen oder Wind u. s. f.). Bei einer sehr großen Anzahl physikalischer Erscheinungen kommt Luftdruck in Betracht; bei allen diesen brauchen wir daher das Barometer.

So erwähnten wir vorhin, daß wir bei Wägungen die Gewichte im luftleeren Raum beziehen müßten; wir werden sehen, daß die Dichtigkeit der Luft an der Erdoberfläche dem auf ihr lastenden Drucke proportional ist, diese Korrektur ändert sich demnach mit dem Barometerstand. Ebenso werden wir das Barometer benutzen, um die Volumänderungen der Gase mit dem auf sie ausgeübten äußern Druck zu vergleichen und zu einer Reihe anderer Untersuchungen, so daß die Ausführlichkeit, mit der wir den Apparat beschrieben haben, gerechtfertigt ist.

§ 97.

Größe des Luftdruckes. Mittels des Barometers sind wir in der Lage, den Druck zu bestimmen, welchen die über uns lagernde Luftmasse auf ein Flächenstück von bestimmter Größe ausübt. Derselbe ist gleich dem Gewichte einer Quecksilbersäule, deren Querschnitt gleich ist jenem Flächenstück, und deren Höhe gleich ist der Höhe des Quecksilbers im Barometer, also im Mittel gleich 760^{mm}. Nennen wir die Höhe des Barometerstandes h , die Größe des Querschnittes des Barometers q , das spezifische Gewicht des Quecksilbers s , so ist der Druck P gleich

$$P = h \cdot q \cdot s,$$

setzen wir $h = 76\text{cm}$, $q = 1\text{cm}^2$ quadr., so erhalten wir, da

$$s = 13,5959,$$

$$P = 1,0333 \text{ Kilogramm},$$

oder einen Querschnitt von q Quadratcentimetern

$$P = 1,0333 \cdot q \text{ Kilogr.}$$

Bei dieser Größe des Luftdruckes ist es ersichtlich, daß er sehr große mechanische Wirkungen hervorbringen kann, wenn man bewirkt, daß der Druck nur einseitig auftritt, wenn man ihn also an der einen Seite eines Körpers fortnimmt, wie wir es z. B. im Barometer gethan haben. Wir

), Ausführlicheres in Kämtz, Lehrbuch der Meteorologie. II. Bd. Halle 1832, Schmidt, Lehrbuch der Meteorologie als XXI. Bd. von Karstens allgemeiner Encyclopädie der Physik. Leipzig 1860.

wollen eine Reihe von Apparaten, welche auf dem Drucke der Luft beruhen betrachten, wenn wir in der Luftpumpe ein Mittel kennen gelernt haben, um aus irgend einem Raume die Luft fortzunehmen. Die Luftpumpe beruht auf der zweiten Grundeigenschaft der Gase, durch welche sie sich von tropfbaren Flüssigkeiten unterscheiden, nämlich darauf, daß die Gase selbständiges Volumen haben, sondern sich so weit ausdehnen, bis ein äußeres Hindernis sich ihnen entgegenstellt.

§ 98.

Mariottesches Gesetz. Da die Flüssigkeiten ein selbständiges Volumen haben, so haben sie auch eine bestimmte von dem äußern Drucke, dem sie unterworfen sind, nur in geringem Grade abhängige Dichtigkeit.

Bei den Gasen ist das jedoch durchaus anders, da wir sahen, daß ihr Volumen nur von dem äußern Drucke abhängt. Es fragt sich nun, wie hängt das Volumen und die Dichtigkeit der Gase von dem äußern Drucke ab.

Diese Frage ist schon frühzeitig untersucht und zwar fast gleich von dem französischen Physiker Mariotte.¹⁾ und dem englischen Physiker Boyle.²⁾ Beide gelangten zu demselben Resultate, das sich in folgender Weise nach dem erstern das Mariottesche genannte Gesetz aussprechen läßt.

Wenn man eine gegebene Gasmenge in einem Gefäße abschließt, dieselbe dann verschiedenen Drucken P und P' aussetzt, so verhält sich ihr Volumen des Gases in beiden Fällen, v und v' umgekehrt wie die Drucke.

$$v : v' = P' : P.$$

Anstatt dieses Ausdrucks können wir auch setzen

$$v' \cdot P' = v \cdot P,$$

oder das Produkt aus dem Volumen einer Gasmenge und dem Druck, dem sie steht, ist konstant.

Da nun, wie wir früher sahen, die Dichtigkeit eines Körpers gleichem Gewichte dem Volumen desselben umgekehrt proportional ist

$$v : v' = d' : d,$$

so folgt aus dem Obigen, daß die Dichtigkeit einer Gasmenge dem Druck, dem sie ausgesetzt ist, direkt proportional ist, oder

$$d : d' = P : P'.$$

Die Versuche, mittels welcher Mariotte dieses Gesetz nachwies, sind folgende. Er nahm eine lange Glasröhre, welche vor einem festen Körper befestigt und nahe ihrem Ende umgebogen war, so daß ein kürzerer steigender Schenkel entstand, wie bei dem Heberbarometer. Der kürzere Schenkel war oben geschlossen, der längere oben offen (Fig. 155). Er bringt nun zunächst eine kleine Menge Quecksilber in das Rohr, so daß es in beiden Röhren bis zum Nullpunkte der Teilung reicht.

¹⁾ Mariotte, De la nature de l'air. Paris 1679.

²⁾ Boyle, Nova experimenta physico-mechanica de vi aëris et vacuum. London 1662.

dann die in dem kürzern geschlossenen Schenkel enthaltene Luft ab. Das Volumen der abgesperrten Luft wird gemessen durch der Röhre angebrachte Teilung. Das Gas erfüllt jetzt den abgemessenen Raum unter dem Drucke der äußern Luft, welche auf der Oberfläche des Quecksilbers im offenen Schenkel lastet, und nach den früher erkannten hydrostatischen Gesetzen wird der Druck auf die geschlossene Röhre sich überträgt.

Auf gießt man durch den Trichter in das offene Schenkel Quecksilber nach. Das Niveau desselben steigt auf beiden Seiten, aber in dem geschlossenen Schenkel steigt es weniger als in dem offenen, und man findet, dass das Quecksilber in dem geschlossenen Schenkel bis zum Teilstriche 5 angestiegen ist, die eingeschlossene Luft nur mehr die Hälfte ihres frühern Volumens einnimmt, wenn der Unterschied der beiden Quecksilberstände gerade die Höhe des Barometer betrügt. Dann gießt man auch das Gas den Druck zweier Atmosphären an, indem außer dem Drucke der äußern Luft noch den Druck einer dem Gewichte der Luft an Größe gleiche Quecksilbersäule auf das abgeschlossene Gas aufbringt. Wenn man weiter Quecksilber hinzufügt, so wird der Niveauunterschied gleich 2, 3, 4 . . . Barometern, und man übt man dadurch einen Druck von 2, 3, 4 . . . Atmosphären aus, und man findet dann, dass das Volumen der abgesperrten Luft auch $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$. . . des frühern Volumens beträgt.

Um die Richtigkeit des Mariotteschen Gesetzes für Gase zu prüfen, welche kleiner sind als der Druck der äußern Atmosphäre, kann man sich folgendes Verordnen, welches im wesentlichen schon Mariotte angegeben hat. Eine möglichst cylindrische Barometerröhre wird in ganzen Länge nach in Millimeter geteilt und kalibriert, der zwischen zwei Teilstrichen enthaltene Raum bezogen auf den Teilstrich n . Zu dem Ende bringt man gleiche Gewichte Quecksilber nach einander in die Röhre.

Man füllt die Röhre bis zum Teilstriche n , das erste und zweite Teilstriche n' , durch Hinzufügen des dritten fülle sich die Röhre bis zum Teilstriche n'' u. s. f., so folgt daraus, dass sich die Räume, welche zwischen den Teilstrichen n , n' , n'' , reichen, verhalten wie 1 : 2 : 3 . . . u. s. f.

Man kann auf diese Weise das Kaliber der Röhre an allen Stellen bestimmen, so füllt man dieselbe vollständig so, als wenn man ein Barometer anstellen wollte, und kehrt dann das fertige Barometer in das Gefäß um. Dasselbe besteht aus einer weiten Röhre von Glas oder Eisen von Gußeisen, welche unten verschlossen und mit einem Hahne versehen ist und oben in einem weitem Gefäß von Glas endet. Dieselbe wird in einem Dreifuß vertikal aufgestellt und bis nn mit Quecksilber gefüllt. Der unten angebrachte Hahn dient dazu, um das Quecksilber leichter ablassen zu können.

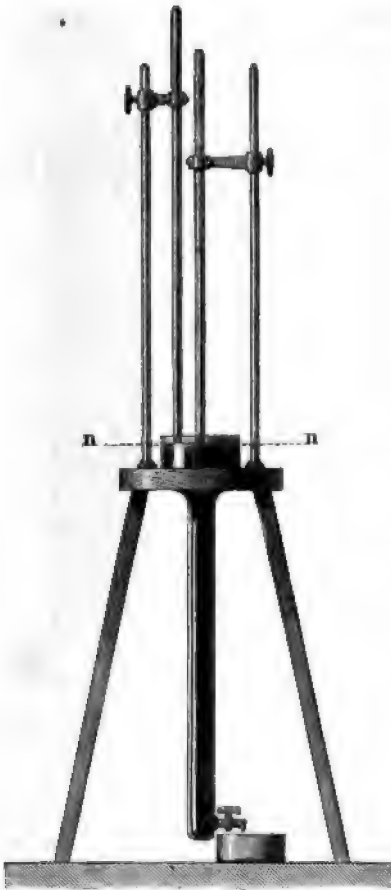
Man bringt das fertige Rohr in das Gefäß umgekehrt, so bringt man

Fig. 155.



mittels eines Zuleitungsrohres etwas trockne Luft in dasselbe. Die steigt durch das Quecksilber in den leeren Raum auf, und sofort sieht man, wie das Quecksilberniveau durch den Druck dieser Luft sinkt. Man zieht nun die Röhre zunächst in das Gefäß herunter, so weit, daß die Oberflächen des Quecksilbers im Innern der Röhre und außerhalb von gleicher

Fig. 156.



Höhe sind; der Teilstrich, neben welchem das Quecksilber steht, gibt dann den Raum, welchen die Luft dem Drucke einer Atmosphäre einnimmt. Zieht man darauf das Rohr weiter aus dem Quecksilber heraus, so vermehrt man dadurch das Volumen der abgesperrten Luft; aber zugleich steigt auch das Quecksilber infolge des äußern Luftdruckes in der Röhre auf, und der Unterschied zwischen der Quecksilberhöhe in dieser Röhre und der Barometerhöhe gibt uns den Druck, welchem sich das Gas befindet. Wenn man das Rohr auswärts lastet auf dem Quecksilber, so lastet der Druck der ganzen Atmosphäre ein Druck gleich dem einer Quecksilbersäule von der Höhe des Barometers, im Innern hält diesem Druck zum Teil die gehobene Quecksilbersäule das Gleichgewicht; der übrige Druck schuf der Barometerhöhe über der Quecksilbersäule drückt also das Gas zusammen; diesem Drucke hält die Elasticität des Gases, der Druck des Gases infolge des Bestrebens, sich auszudehnen, auf die Wände ausübt das Gleichgewicht.

Um diese Unterschiede zwischen dem Barometerstande und der in der Röhre gehobenen Quecksilbersäule zu messen, ist neben der Röhre ein festes Barometer angebracht. Man vergleicht die Höhen des Quecksilbers in diesem Barometer mit den Höhen in der Röhre mittels des Kathetometers.

Vergleicht man die von dem Gase angefüllten Räume und die Drucke unter welchen es steht, so findet man stets

$$P \cdot v = P' \cdot v'.$$

Füllt z. B. das Gas, wenn das Rohr so tief eingetaucht ist, daß die Oberfläche des Quecksilbers innerhalb und außerhalb der Röhre von gleicher Höhe ist, die Röhre bis zum Teilstriche *n*, so füllt es die Röhre bis zum Teilstriche *n'*, das Volumen des Gases ist also doppelt so groß, als die Höhe des Quecksilbers in der Röhre gerade die Hälfte der Barometerhöhe beträgt u. s. f.

Mittels dieser schon von Mariotte angestellten Versuche kann man das Mariottesche Gesetz nachweisen; indes können sie keinen Anspruch auf große Genauigkeit machen, da es besonders äußerst schwierig ist, die Temperatur konstant zu erhalten. Das ist aber durchaus erforderlich, da bei jeder Temperaturänderung das Gas ebenfalls sein Volumen ändert, das Mariottesche Gesetz also nur bei konstanter Temperatur der Gase gültig sein kann.

Überdies kann man bei diesen Methoden die Drucke, denen das Gas ausgesetzt ist, nur zwischen verhältnismäßig engen Grenzen variieren lassen. Der Wichtigkeit dieses Gesetzes fragt es sich jedoch, ob es strenge und allgemein gültig ist.

Seit Mariotte und Boyle sind deshalb sehr vielfach Versuche darüber angestellt, ob dieses Gesetz für alle Gase und für alle Drucke gültig sei. Die älteren Versuche von Musschenbroek¹⁾, Sulzer²⁾, Robison³⁾ gelangten zu keinem entscheidenden Resultate; der erstere schloß in Übereinstimmung mit Boyle, daß unter Drucken, welche größer waren als vier Atmosphären, die Luft weniger, die letzteren, daß sie mehr zusammengedrückt würde, als das Gesetz verlangt.

Im Jahre 1826 publicierten dann Oersted und Schwendsen⁴⁾ Versuche nach einer der beschriebenen ähnlichen Methode, aber mit besseren und genaueren Apparaten, und nach einer zweiten ganz verschiedenen Methode. Sie komprimierten Luft in dem Kolben einer Windbüchse und bestimmten mittelst einer Wage das Gewicht und somit die Dichtigkeit der in dem Kolben enthaltenen Luft. Den Druck, unter welchem die Luft stand, bestimmten sie mit Hilfe eines Sicherheitsventiles aus dem Drucke, den dieselbe auf die Wände des Kolbens ausübte. Das Ventil wurde mit einem geeigneten Hebel festgedrückt, und das Gewicht auf demselben so lange vergrößert, bis die eingeschlossene Luft es gerade zu heben imstande war.

Bei der ersten Methode dehnten Oersted und Schwendsen ihre Versuche bis zu einem Drucke von 8, mit der letztern bis auf 68 Atmosphären aus. Sie schlossen aus ihren Versuchen, daß für Luft das Mariottesche Gesetz zu diesen Drucken strenge gültig sei; bei der unvermeidlichen Ungenauigkeit der letztern Methode darf man daraus jedoch nur schließen, daß es mit großer Annäherung unter so hohen Drucken noch besteht.

Für andere Gase als die atmosphärische Luft fanden die genannten Physiker das Gesetz jedoch nicht bestätigt, besonders wenn die Gase durch Kompression flüssig zu machen sind. Sie fanden z. B., daß sich schweflige Säure bei einem Drucke von zwei Atmosphären gerade so verhielt wie atmosphärische Luft, daß aber bei höheren Drucken das Gas stärker komprimiert wurde.

Gleiche Resultate erzielten die Versuche von Despretz⁵⁾. Er brachte mehrere graduierte oben geschlossene Röhren, deren eine Luft, die übrigen andere Gase enthielten, in einen Oerstedschen Kompressionsapparat (Fig. 70), nachdem er die offenen Enden der Röhren in ein Gefäß mit Queck-

¹⁾ *Musschenbroek*, Cours de physique. Paris 1759. Tome III.

²⁾ *Sulzer*, Mémoires de Berlin 1753.

³⁾ *Robison*, System of Mech. Phil. III.

⁴⁾ *Oersted und Schwendsen*, Edinburgh Journal of science. Vol. IV. p. 224.

⁵⁾ *Despretz*, Annales de chim. et de phys. Tom. XXXIV.

silber eingesetzt hatte (Fig. 157). Bei einer Kompression des Wasser dem Apparate wurde auch das Gas der Röhren komprimiert. Der Druck war in dem ganzen Apparate derselbe, und da die Röhren alle ein gleiches Volumen hatten und dafür gesorgt war, daß das Niveau des Quecksilbers beim Beginne des Versuches in allen Röhren gleich war, so hätte es auch in allen Röhren dasselbe bleiben müssen, wenn die Gase alle dem Mariotteschen Gesetze folgten. Es war das jedoch nicht der Fall, als die eine Röhre atmosphärische Luft, die zweite Ammoniakgas, die dritte Schwefelwasserstoff und die vierte Cyangas enthielt. Das Volumen dieser Gase nahm schon bei einem Drucke, welcher größer war als der zweier Atmosphären, schneller ab, als die Drucke zunahmen, schneller, als das Volumen der atmosphärischen Luft abnahm.

Fig. 157.



Despretz schloß ferner, daß Wasserstoffgas und atmosphärische Luft bis zu einem Drucke von 15 Atmosphären dem Mariotteschen Gesetze folgen, daß aber bei einem Drucke von 20 Atmosphären und darüber die Luft stärker zusammengepresst werde, als das Gesetz von Mariotte es verlangt.

Durch Despretz's Versuche wurde also die exakte Gültigkeit des Gesetzes von Mariotte auch für atmosphärische Luft wieder in Frage gestellt, deshalb nahmen auf Aufforderung der französischen Akademie Arago und Dulong¹⁾ die Frage wieder auf.

Dieselben verfolgten mit ihren Versuchen die Kompression der atmosphärischen Luft bis zu einem Drucke von 27 Atmosphären nach der Methode, die sich im Principe durchaus nicht von der Mariotteschen unterscheidet; die aber durch die Sorgfalt, mit welcher die einzelnen Theile des Apparates gearbeitet waren, und die Genauigkeit, mit welcher Physiker beobachteten, Resultate ergab, welche das höchste Vertrauen verdienen. Die zu komprimierende Luft war in einer sorgfältig ausgemessenen Röhre von 1^m,70 Länge und 5^{mm} lichte Durchmesser eingeschlossen. Die Röhre war von einem weitem Cylinder umgeben, durch welchen kontinuierlich Wasser derselben Temperatur hindurchlief, um die in der Röhre eingeschlossene Luft auf konstanter Temperatur zu erhalten. Die mit der Röhre kommunizierende offene Röhre hatte eine Länge von 27 Meter. Für die näheren Details der Apparate und der einzelnen Vorsichtsmaßregeln, welche diese Physiker anwandten, müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen.

Dulong und Arago unternahmen drei Versuchsreihen; in jeder derselben wurde der kurze geschlossene Schenkel ihrer Röhre mit Luft zum Drucke der Atmosphäre angefüllt, und diese dann immer stärker komprimiert. Nach jeder Erhöhung des Druckes wurde das Volumen der eingeschlossenen Luft und die Niveaudifferenz des Quecksilbers in der geschlossenen und offenen Röhre gemessen. Bei jeder Versuchsreihe wurde der Druck bis auf 27 Atmosphären verstärkt. Folgende Tabelle enthält die von ihnen erhaltenen Zahlen in einer Versuchsreihe, bei der die

Dulong und Arago unternahmen drei Versuchsreihen; in jeder derselben wurde der kurze geschlossene Schenkel ihrer Röhre mit Luft zum Drucke der Atmosphäre angefüllt, und diese dann immer stärker komprimiert. Nach jeder Erhöhung des Druckes wurde das Volumen der eingeschlossenen Luft und die Niveaudifferenz des Quecksilbers in der geschlossenen und offenen Röhre gemessen. Bei jeder Versuchsreihe wurde der Druck bis auf 27 Atmosphären verstärkt. Folgende Tabelle enthält die von ihnen erhaltenen Zahlen in einer Versuchsreihe, bei der die

¹⁾ Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. p. 193 ff.

er genau auf 13° erhalten war. Die erste Kolonne enthält den Druck in Millimeter Quecksilberhöhe, die zweite das Volumen der Luft in der geschlossenen Röhre, die dritte das Volumen berechnet nach dem Mariotteschen Gesetze von dem Anfangsvolumen und dem Anfangsdrucke aus, und die vierte endlich die Unterschiede zwischen dem so berechneten und dem beobachteten Volumen.

Tabelle der von Dulong und Arago erhaltenen Zahlen.

Druck in mm. Quecksilber	Beobachtetes Volumen	Berechnetes Volumen	Differenz
mm 760,00	501,3	—	—
3612,48	105,247	105,470	0,230
3757,18	101,216	101,412	0,206
4625,18	82,286	82,380	0,094
5000,78	76,095	76,198	0,103
5737,38	66,216	66,417	0,201
8596,23	44,008	44,320	0,312
9992,36	37,851	38,132	0,281
12620,00	30,119	30,192	0,073
13245,06	28,664	28,770	0,106
14667,36	25,885	25,978	0,093
16534,9	22,968	23,044	0,076
16584,4	22,879	22,972	0,093
18438,5	20,547	20,665	0,118
20236,6	18,833	18,872	0,039
20498,6	18,525	18,588	0,063

Vergleicht man die beobachteten mit den berechneten Zahlen, so findet man dieselben sehr nahe gleich. Man muß daraus schließen, daß die wirkliche Kompression der Luft, wenn überhaupt, sich nur sehr wenig von der nach dem Mariotteschen Gesetze berechneten unterscheidet. Mehr darf man jedoch daraus nicht schließen, da die Unterschiede nicht gleich Null sind und da die beobachteten Volumina immer kleiner sind als das berechnete Volumen. Es kann das seinen Grund haben entweder in der nicht vollkommenen Richtigkeit des Gesetzes oder auch in Ungenauigkeiten der Messungen. Die Art der Abweichungen spricht jedoch für das Erstere.

Wie schon in der Einleitung hervorgehoben wurde, ist man niemals im Stande, ganz vollkommene Messungen zu machen; wenn die Abweichungen von den Beobachtungen und den nach einem vermuteten Gesetze angestellten Berechnungen nur sehr klein sind, so ist man zu der Annahme berechtigt, daß die Unterschiede gleich Null sein würden, wenn die Messungen ganz vollkommen wären, und dann auf die Richtigkeit des Gesetzes zu schließen. Indes wird in dem Falle der Unterschied zwischen Beobachtung und Rechnung bald positiv, bald negativ sein, das heißt, bald die beobachtete, bald die sich aus den Rechnungen ergebende Zahl die größere sein, da es ebenso wahrscheinlich ist, daß die unvermeidlichen Beobachtungsfehler, bei einer sonst richtigen Methode, die Resultate ver-

größern als verkleinern. Abweichungen, welche immer in demselben Sinne erfolgen, und seien sie auch noch klein, lassen entweder einen konstanten Fehler in der Methode oder eine Ungenauigkeit des Gesetzes vermuten. Da ersterer nun nicht aufzufinden ist, so dürfen wir durch diese Versuche das Gesetz nicht als bewiesen ansehen; müssen vielmehr annehmen, daß die sich zeigenden Abweichungen zum Teil allerdings in den Beobachtungsfehlern, zum Teil jedoch in einer Ungenauigkeit des Mariotteschen Gesetzes ihren Grund haben.

Arago und Dulong schlossen anders; sie glaubten, wie man überhaupt im Anfange dieses Jahrhunderts geneigt war anzunehmen, daß die Naturerscheinungen einfachen Gesetzen folgen, daß der mathematische Ausdruck derselben stets wenig kompliziert sein müsse. Deshalb übersahen diese Physiker es, daß die Abweichungen stets in demselben Sinne stattfanden, und hielten bei der geringen Größe der Unterschiede das Gesetz für bewiesen.

Arago und Dulong konnten ihre Versuche nicht über andere Gase als die atmosphärische Luft ausdehnen, da die französische Regierung ihnen die Benutzung der Gebäude entzog, in denen ihre Apparate aufgestellt waren.

Diese Lücke suchte Pouillet¹⁾ auszufüllen. Pouillet nahm für die Luft nach den vorhergegangenen Versuchen das Mariottesche Gesetz als richtig an, und verglich mit den Kompressionen der Luft jene der andern Gase. Seine Versuchsmethode war derjenigen von Despretz ähnlich; die Röhren in welchen er die Gase komprimierte, hatten eine Länge von zwei Meter.

Die Resultate Pouillets sind folgende:

1) Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Stickoxyd und Kohlenoxydgas folgen bis zu 100 Atmosphären dem Kompressionsgesetz der atmosphärischen Luft.

2) Die Gase, schweflige Säure, Ammoniak, Kohlensäure und Stickoxydulgas, welche bei relativ geringen Drucken schon in die tropfbar flüssige Form übergehen, werden merklich stärker komprimiert als die atmosphärische Luft, sobald ihr Volumen auf $\frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{4}$ komprimiert ist.

3) Das Gleiche gilt für leichtes und schweres Kohlenwasserstoffgas, welche bei einem Drucke von 100 Atmosphären noch nicht flüssig werden.

Folgende Tabelle enthält die von Pouillet mitgetheilten Resultate. Die erste Kolumne enthält die Drucke, die zweite die theoretischen Volumina, die folgenden die Quotienten $\frac{v'}{v}$ der beobachteten Volumina v' und der theoretischen v für die darüber stehenden Gase.

Lange Zeit nahm man mit Arago und Dulong an, daß die atmosphärische Luft so wie Wasserstoff, Sauerstoff und Stickstoff dem Mariotteschen Gesetze vollständig folgen, bis Regnault die Frage 1845 wieder aufnahm. Er war durch gewisse Erscheinungen beim Ausdehnen der Gase durch die Wärme auf die Vermutung geführt worden, daß das Gesetz von Mariotte auch für diese Gase nur ein annähernd richtiges sei. Da nun das Gesetz über die Kompression der Gase ein Fundamentalgesetz der Physik ist, indem es in fast alle Bestimmungen über die Gase eingeht, so stellte Regnault eine Reihe neuer Versuche über diesen Punkt an²⁾.

¹⁾ Pouillet, *Éléments de Physique*. 4. édit. Tome I. p. 327.

²⁾ Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France. T. XXI. p. 325.

in u	Theore- tisches Volumen v	$\frac{v'}{v}$ Kohlensäure	$\frac{v'}{v}$ Stickoxydul	$\frac{v'}{v}$ Leichtes Kohlenwas- serstoffgas	$\frac{v'}{v}$ Schweres Kohlenwas- serstoffgas
	1,00	1,000	1,000	1,000	1,000
	0,50	1,000	0,996	0,998	0,994
	0,25	1,000	0,988	0,995	0,989
	0,20	0,989	0,983	0,992	0,986
	0,15	0,980	0,971	0,989	0,983
	0,10	0,965	0,956	0,981	0,972
	0,065	0,934	0,923	0,949	0,962
	0,050	0,919	0,896	0,956	0,955
	0,040	0,880	0,849	0,951	0,948
	0,030	0,808	0,787	0,951	0,931
	0,025	0,739	0,732	0,940	0,919
	0,020	—	—	0,907	0,899
	0,012	—	—	—	0,850

Apparate, welche Regnault anwandte, waren im wesentlichen die-
welche auch Arago und Dulong angewandt hatten, auch er benutzte
Methode von Mariotte, ein abgeschlossenes Gasvolumen durch Queck-
silber zusammendrücken zu lassen, und maß dann zugleich das Vo-
lumen des Gases und den zugehörigen Druck.

Die Verbesserung der Methode lieferte jedoch eine bedeutend größere
Genauigkeit in den Messungen erzielen.

Arago und Dulong waren bei ihren Versuchen stets davon ausgegangen,
eine geschlossene Röhre mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre
zu nehmen und diese nach und nach bis zu einem Drucke von 27 Atmo-
sphären zusammen zu pressen. Da nun das Anfangsvolumen des Gases
unter dem Drucke einer Atmosphäre gleich 1 war, so war es unter dem
Drucke von 5 Atmosphären nur $\frac{1}{5}$, bei 10 nur $\frac{1}{10}$, bei 20 nur $\frac{1}{20}$ u. s. f.
Bei den hohen Drucken das Volumen sehr klein und dadurch war
es unmöglich, es mit der größten Genauigkeit auszumessen, besonders
zu beachten, daß es äußerst schwierig ist, das Volumen der ein-
zelnen Teile der Röhre genau zu erhalten, und daß der Meniskus des
Quecksilbers nicht genau seine Gestalt beibehält.

Die sich hieraus unvermeidlich ergebenden Ungenauigkeiten der Messung
wurde Regnault folgendermaßen:

Die Glasröhre von 8—10 Millimeter lichtem Durchmesser und 3 Meter
lang wurde vertikal aufgestellt. Die Röhre, an ihrem obern Ende durch
Kork verschlossen, kommunizierte an ihrem untern Ende mit einer
ebenfalls vertikal aufgestellten, oben offenen Röhre von 36 Meter Länge,
die Quecksilbersäule enthält, welche das in der ersten Röhre ab-
gemessene Gas zusammendrücken sollte. Auf der oben verschlossenen
Röhre von drei Meter Länge waren zwei Marken gezogen, die eine an
ihrem obern Ende, welche das Volumen der ganzen Röhre bestimmte, in-
der Mitte, Anfang jedes Versuches dafür gesorgt war, daß das Quecksilber

in dieser Röhre bis zu dieser Marke stand; die zweite Marke war in der Mitte der Röhre gezogen, so daß sie genau das halbe Volumen der Röhre von ihrem obern Ende bis zur untern Marke bestimmte.

Man füllt nun zunächst die Röhre mit trockener Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre bis zur untern Marke, dann drückt man, indem man die Quecksilbersäule in der langen Röhre verlängert, die Luft so weit zusammen, bis sie gerade das halbe Volumen annimmt, bis also das Quecksilber in der verschlossenen Röhre bei der zweiten Marke steht. Ist das Mariottesche Gesetz genau richtig, so muß jetzt die Höhe der Quecksilbersäule in der offenen Röhre über der in der verschlossenen genau die Höhe des Barometer sein, der Druck muß genau gleich zwei Atmosphären sein.

Man füllt nun zu einem zweiten Versuche die ganze geschlossene Röhre bis zur untern Marke mit trockener Luft unter dem Drucke zweier Atmosphären und komprimiert wieder auf die Hälfte; der Druck muß dann gleich vier Atmosphären sein.

Fällt man dann das Volumen 1 mit trockener Luft unter dem Drucke von vier Atmosphären und komprimiert diese auf das Volumen $\frac{1}{2}$, so muß jetzt der Druck acht Atmosphären sein u. s. f.

Kurz, man untersucht auf diese Weise, ob der Druck, der ein Volumen Luft, welches unter dem Drucke h steht, auf die Hälfte reduciert, gleich $2h$ ist. Die Gasvolumina sind bei diesen Versuchen stets sehr groß und deshalb der genauesten Messung fähig.

Wegen der Einzelheiten des Apparates und der Vorsichtsmaßregeln bei den Messungen müssen wir auf die Originalabhandlung verweisen, nur müssen wir kurz erwähnen, wie die geschlossene Röhre mit Luft unter höheren Drucken angefüllt wurde. Die Röhre kommunizierte mittels des an ihrem obern Ende befindlichen Hahnes mit einer Pumpe, durch welche man bei geöffnetem Hahn Luft in die Röhre pumpen konnte. Man füllte auf diese Weise die Röhre bis zur untern Marke mit Luft an und bestimmte den Druck, unter welchem die Luft sich befand, aus der Höhe der Quecksilbersäule in der langen Röhre. Man hatte es auf diese Weise in der Hand, die Röhre, in welcher das Gas komprimiert wurde, bis zur untern Marke mit Luft unter beliebigem Drucke anzufüllen.

Um zu zeigen, wie Regnault aus diesen Versuchen die Resultate erhielt, wollen wir zunächst eine Versuchsreihe mit atmosphärischer Luft folgen lassen, bei welcher das Volumen 1 mit Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre angefüllt wurde. Die geschlossene Röhre kommunizierte beim Beginne des Versuches frei mit der atmosphärischen Luft; als sie bis zur untern Marke mit Luft angefüllt war, wurde der Hahn geschlossen und durch Einfüllen des Quecksilbers in die lange Röhre das Volumen möglichst genau auf $\frac{1}{2}$ reduciert.

Kolumne 1 enthält die Volumina V_0 und V_1 beim Beginne des Versuches und nach der Kompression, Kolumne 2 die entsprechenden Drucke in Millimeter Quecksilberhöhe, Kolumne 3 die Temperaturen der Luft

und 4 das Verhältniß der Volumina $\frac{V_0}{V_1}$, Kolumne 5 das Verhältniß

Kolumne 6 das Verhältniß $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$.

Volumina V_0 und V_1	Drucke P_0 und P_1	Temperatur °C.	$\frac{V_0}{V_1}$	$\frac{P_1}{P_0}$	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$
1939,69	738,72	4,44	2,001 215	1,998 389	1,001 414
969,26	1476,25				
1939,69	738,99	4,40	1,999 990	1,997 076	1,001 448
969,86	1475,82				
1940,21	739,07	4,40	2,000 010	1,997 565	1,001 224
970,10	1476,34				
1939,47	739,19	4,43	2,000 701	1,997 863	1,001 421
969,39	1476,80				

Wäre das Mariottesche Gesetz genau richtig, so müßten die in einer Horizontalreihe befindlichen Zahlen der Kolonnen 4 und 5 genau gleich sein, da nach dem Mariotteschen Gesetz

$$V_0 : V_1 = P_1 : P_0;$$

und da ebenso

$$V_0 \cdot P_0 = V_1 \cdot P_1,$$

müßten die Zahlen der letzten Kolonne gleich 1 sein.

Man sieht aber, während $\frac{V_0}{V_1}$ fast genau gleich 2 ist, daß $\frac{P_1}{P_0}$ stets kleiner als 2 und somit $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} > 1$ ist.

Es folgt also aus diesen Versuchen, daß die atmosphärische Luft schon bei einer Druckdifferenz von einer Atmosphäre von dem Gesetze Mariottes abweicht. Gleiches fand Regnault bei allen übrigen Gasen.

In der folgenden Tabelle sind die von Regnault erhaltenen Zahlen für atmosphärische Luft, Stickgas, Kohlensäure und Wasserstoffgas zusammengestellt.

Für jedes Gas sind zwei Kolonnen verzeichnet; die erste enthält die Drucke P_0 beim Beginne der Versuche, die zweite das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$, wo V_1 stets fast genau $\frac{1}{2} V_0$ war und P_1 der dem Volumen V_1 entsprechende Druck ist.

Tabelle von Regnaults Versuchen über die Kompression der Gase.

Luft		Stickstoff		Kohlensäure		Wasserstoff	
P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$	P_0	$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$
738,72	1,001 414	753,62	1,000 788	764,03	1,007 725	—	—
3112,53	1,002 765	1159,26	1,000 996	1414,77	1,012 313	—	—
4140,82	1,003 090	2159,60	1,001 381	2164,81	1,018 973	2211,18	0,998 584
19,22	1,003 495	3030,22	1,001 955	3186,13	1,028 494	3989,47	0,996 961
70,15	1,004 286	4953,92	1,002 860	4879,77	1,045 625	5845,18	0,996 121
36,41	1,006 366	5957,96	1,003 271	6820,22	1,066 137	7074,96	0,994 697
		7297,06	1,003 924	8393,68	1,084 278	—	—
		8628,54	1,004 768	9620,06	1,099 830	9175,25	0,993 126
		9775,38	1,004 881			10361,78	0,992 327
		10981,42	1,006 456				

Man sieht, daß bei diesen vier untersuchten Gasen das Verhältniß $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ nur sehr wenig von der Einheit abweicht, so daß also das Mariottesche Gesetz, wenn es auch nicht genau richtig ist, doch nur wenig von der Wahrheit abweicht. Wir werden es deshalb in den meisten Fällen als richtig annehmen dürfen, ohne fürchten zu müssen, große oder auch nur merkliche Ungenauigkeiten zu erhalten, besonders da wir in den meisten Fällen nur kleinere Drucke anzuwenden haben, und wie die Tabelle zeigt, für Drucke, welche nur wenig von dem der Atmosphäre verschieden sind, das Verhältniß $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ sich der Einheit immer mehr nähert.

Bei aufmerksamer Betrachtung jener Tabelle findet man, daß die drei ersten Gase, Luft, Stickstoff, Kohlensäure, alle in demselben Sinne vom dem Mariotteschen-Gesetze abweichen, daß bei allen $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} > 1$, also bei allen das Volumen in rascherem Verhältnisse abnimmt, als der Druck wächst, oder das beobachtete Volumen V_1 kleiner ist, als es nach dem Mariotteschen Gesetze sein sollte. Dasselbe Resultat enthielten schon die Versuche von Arago und Dulong. Die neuen Versuche indes zeigen weiter, daß das Verhältniß $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ wächst, wenn der anfängliche Druck, unter dem das dem Versuche unterworfenen Gas steht, größer ist, daß also die Abweichungen zwischen dem wirklichen Verhalten der Gase und dem Mariotteschen Gesetze um so größer werden, je mehr die Zusammenrückung des Gases wächst. Wenn nun auch die Regelmäßigkeit dieser Zahlen auf das entschiedenste dafür spricht, daß die beobachteten Abweichungen nicht Folge der Beobachtungsfehler sind, sondern einer Ungenauigkeit des Gesetzes zugeschrieben werden müssen, so ist es doch gut nachzuweisen, daß sie größer sind als die Beobachtungsfehler, welche wir annehmen dürfen. Sei deshalb der beobachtete Wert

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \alpha,$$

und nehmen wir V_1 genau $= \frac{1}{2} V_0$, so ist

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} = \frac{2 \cdot P_0}{P_1} = \alpha,$$

oder

$$\frac{2 \cdot P_0}{\alpha} = P_1.$$

Wäre nun das Mariottesche Gesetz genau richtig, so müßte

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1'} = \frac{2 P_0}{P_1'} = 1,$$

oder

$$P_1' = 2 P_0$$

sein. Der Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung ist demnach

$$P_1' - P_1 = 2 P_0 - 2 \frac{P_0}{\alpha} = 2 P_0 \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Dieser Unterschied zwischen Theorie und Beobachtung läßt sich nun berechnen, wenn wir in diesen Ausdruck die Werte P_0 und α unserer Tabelle einsetzen, man erhält dann den Unterschied in der Höhe der Quecksäulchen, wie sie beobachtet wurden, und wie sie nach dem Gesetze von Mariotte hätten sein sollen. Für Luft erhalten wir dann

P_0	$P'_1 - P_1$
738 ^{mm} ,72	2 ^{mm} ,08
2112 53	11 65
4140 82	25 50
4219 05	29 36
6770 15	57 68
9336 41	118 01.

Diese Differenzen sind offenbar zu groß, als daß man sie den Beobachtungsfehlern zuschreiben könnte. Das Mariottesche Gesetz ist demnach nicht streng richtig, wenn auch die Abweichungen so unbedeutend sind, daß wir sie im allgemeinen nicht zu beachten haben werden.

Stickstoff, Kohlensäure und Sauerstoff verhalten sich wie atmosphärische Luft, sie werden stärker zusammengedrückt, als das Mariottesche Gesetz verlangt. Sie bilden also mit den von Despretz und Pouillet untersuchten Gasen, Ammoniak, schweflige Säure, Cyan u. s. f. eine Gruppe; diese Gase besitzen eine Zusammendrückbarkeit, welche mit dem äußeren Drucke zunimmt.

Anders jedoch das Wasserstoffgas; für dieses ist das Verhältnis $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ kleiner als 1. Dieses Gas wird also bei steigenden Drucken weniger stark zusammengedrückt, V_1 nimmt nicht in demselben Verhältnisse ab, P_1 wächst; und da bei immer größern Anfangsdrucken der Wert $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ immer kleiner wird, so folgt, daß mit wachsendem Drucke die Kompressibilität abnimmt.

Folgende Tabelle, welche Zahlen enthält, welche Regnault aus seinen Versuchen berechnete, zeigt, wie die Kompressibilität wächst bei den drei ersten und abnimmt bei dem letzten Gase. Sie gibt die Drucke an, welche erforderlich sind, um ein Gas, welches unter dem Drucke 1 Meter Quecksilber das Volumen 1 hat, auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$... zu komprimieren.

Luft		Kohlensäure		Stickgas		Wasserstoff	
Druck	Differenz	Druck	Differenz	Druck	Differenz	Druck	Differenz
Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter	Meter
1,0000	+ 0,0000	1,0000	+ 0,0000	1,0000	+ 0,0000	1,0000	- 0,0000
1,9978	+ 0,0022	1,9829	+ 0,0171	1,9986	+ 0,0014	2,0011	- 0,0011
3,9874	+ 0,0126	3,8973	+ 0,1026	3,9919	+ 0,0081	4,0068	- 0,0068
7,9456	+ 0,0543	7,5193	+ 0,4807	7,9641	+ 0,0359	8,0339	- 0,0339
9,9162	+ 0,0838	9,2262	+ 0,7738	9,9435	+ 0,0565	10,0560	- 0,0560
11,8823	+ 0,1177	10,8632	+ 1,1368	11,9191	+ 0,0809	12,0844	- 0,0844
15,8044	+ 0,1956	13,9260	+ 2,0740	15,8597	+ 0,1403	16,1616	- 0,1616
19,7198	+ 0,2801	16,7054	+ 3,2946	19,7885	+ 0,2115	20,2687	- 0,2867

Um diese Erscheinungen zusammenzufassen, kann man sich ein Gas denken, welches genau dem Mariotteschen Gesetze folgt und welches die Grenze bildet zwischen den beiden Gruppen, deren eine, Luft, Stickgas, Kohlensäure, stärker komprimiert wird, deren andere, allein durch den Wasserstoff repräsentiert, jedoch in geringerem Grade zusammengedrückt wird als jenes angenommene Gas. Das Mariottesche Gesetz ist demnach ein Gesetz, dem sich die verschiedenen Gase mehr oder weniger annähern. Die Abweichungen hängen ab von der Natur des Gases, von den anfänglichen Drucken und andern Umständen; in welcher Weise jedoch die Differenz zwischen dem beobachteten Werte von $\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1}$ und dem theoretischen Werte der gleich 1 ist, oder

$$\frac{V_0 \cdot P_0}{V_1 \cdot P_1} - 1 = \beta$$

von diesen Umständen abhängt, läßt sich bisher nicht bestimmen.

Man kann indes aus den Beobachtungen in übersichtlicher Weise eine die Abweichungen der Gase vom Mariotteschen Gesetz darstellende Interpolationsformel ableiten. Für eine gegebene Gasmenge hat das Produkt PV für jeden Druck oder auch für jedes Volumen einen bestimmten Wert, und nach dem Mariotteschen Gesetz sollte dieses Produkt für jeden Druck oder jedes Volumen denselben Wert haben. Die Abweichung der Gase von diesem Gesetz besteht nun darin, daß mit steigendem Druck oder abnehmendem Volumen dieses Produkt kleiner wird; man kann dieselbe deshalb darstellen, indem man die Veränderung dieses Produktes durch eine Gleichung wiedergibt, welche die Abhängigkeit desselben von dem Drucke P oder dem Volumen V ausdrückt. Gehen wir von irgend einem Drucke P_0 aus und nennen das zugehörige Volumen V_0 , so können wir entweder setzen

$$\frac{PV}{P_0 V_0} = 1 - A \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right) + B \left(\frac{V_0}{V} - 1 \right)^2 \dots\dots\dots$$

oder auch

$$\frac{PV}{P_0 V_0} = 1 - A_1 \left(\frac{P}{P_0} - 1 \right) + B_1 \left(\frac{P}{P_0} - 1 \right)^2 \dots\dots\dots$$

Daß wir in den Klammern den Überschufs der betreffenden Quotienten über 1 setzen müssen, erkennt man daraus, daß für $V = V_0$ oder $P = P_0$ die Quotienten auf der linken Seite der Gleichung gleich 1 werden müssen.

Man erkennt weiter leicht, daß in der ersten Formel V im Nenner, in der zweiten P im Zähler stehen muß, da die Abweichungen der Gase vom Mariotteschen Gesetze um so größer werden, je kleiner das Volumen oder je größer der Druck wird. Setzen wir $P_0 = 1$, etwa 1 Meter Quecksilber, und V_0 ebenfalls gleich 1, nehmen also etwa an, daß sich unsere Werte auf 1 Liter Gas unter dem Drucke 1 Meter Quecksilber beziehen, so können wir obige Formeln schreiben

$$PV = 1 - A \left(\frac{1}{V} - 1 \right) + B \left(\frac{1}{V} - 1 \right)^2 \dots\dots\dots \text{Ia}$$

$$PV = 1 - A_1 (P - 1) + B_1 (P - 1)^2 \dots\dots\dots \text{IIa}$$

Die erste Form der Interpolationsgleichung wurde von Regnault selbst

benutzt¹⁾, während Jochmann²⁾ und Schröder van der Kolk³⁾ die zweite wählten. Der letztere zeigte, daß für keines der untersuchten Gase sich alle beobachteten Werte von PV mit der von Regnault bei seinen Beobachtungen angenommenen Genauigkeit mit einem Paare von Konstanten darstellen ließe, er benutzte deshalb die Gleichung nur für kleinere Intervalle. Wir begnügen uns indes hier damit, die von Regnault aus seinen Beobachtungen abgeleiteten Konstanten anzuführen, da wir doch noch im § 102 und später in der Wärmelehre auf diese Rechnungen zurückkommen müssen.

Die durch ihre Logarithmen gegebenen Konstanten für die vier von Regnault untersuchten Gase sind:

Luft	$\log A = 0,043\,5120 - 3$	$\log B = 0,287\,3751 - 5$
Stickstoff . . .	$\log A = 0,838\,9375 - 4$	$\log B = 0,847\,6020 - 6$
Kohlensäure . .	$\log A = 0,931\,0399 - 3$	$\log B = 0,862\,4721 - 6$
Wasserstoff . .	$\log A = 0,738\,1736 - 4$	$\log B = 0,925\,0787 - 6$

Für den Wasserstoff ist zu beachten, daß PV stets größer als 1 ist, es ist deshalb in der Gleichung das zweite Glied positiv zu setzen. Die Konstanten leitete Regnault aus den für 8^m und für 16^m Druck beobachteten Werte von PV ab.

Später hat Regnault⁴⁾ noch einige andere Gase bis zu einem Drucke von etwa 8 Atmosphären untersucht. Die von ihm für dieselben berechneten Interpolationsformeln haben die Gestalt

$$\frac{V_0 \cdot 0,76}{V \cdot P} = 1 - A(P - 0,76) - B(P - 0,76)^2,$$

wenn die Drucke ebenfalls in Meter Quecksilber gegeben sind. Die Logarithmen der Konstanten haben folgende Werte:

Sauerstoff . . .	$\log A = 0,269\,9060 - 3$	$\log B = 0,664\,6643 - 5$
Kohlenoxyd . .	$\log A = 0,780\,5656 - 3$	$\log B = 0,848\,9327 - 4$
Stickoxydul . .	$\log A = 0,814\,6743 - 3$	$\log B = 0,667\,0487 - 4$
Stickoxyd . . .	$\log A = 0,446\,5181 - 3$	$\log B = 0,439\,5015 - 4$

In der Gleichung für Stickoxydul ist B negativ, also das dritte Glied positiv zu setzen.

Für eine Anzahl anderer Gase hat Regnault das Verhalten gegenüber dem Mariotteschen Gesetze bis zu einem Drucke von zwei Atmosphären verfolgt. Folgende Tabelle enthält die Resultate; in dieselbe sind auch die vorher erwähnten Gase aufgenommen, sie ist geordnet nach dem Grade, in welchem die Gase vom Mariotteschen Gesetze abweichen, die Abweichung ist um so größer, je größer der Quotient $\frac{P_0 \cdot V_0}{P \cdot V}$ ist. Die Zahlen gelten für eine Temperatur von 7°,9 C.

	P_0	P	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P_0 \cdot V_0}{P \cdot V}$
Luft	702,78	1457,61	2,074	1,002 15
Stickoxyd	720,08	1416,33	1,967	1,002 85
Kohlenoxyd	703,18	1457,28	2,072	1,002 93

¹⁾ Regnault, Mémoires de l'Acad. T. XXI. p. 418 ff.

²⁾ Jochmann, Schömilchs Zeitschrift für Mathematik etc. Bd. V. p. 101.

³⁾ Schröder van der Kolk, Poggend. Ann. Bd. CXVI.

⁴⁾ Regnault, Mémoires de l'Acad. T. XXVI. p. 299 ff.

	P_0	P	$\frac{P}{P_0}$	$\frac{P_0 \cdot V_0}{P \cdot V}$
Grubengas	706,53	1383,73	1,958	1,006 34
Stickoxydul	703,10	1448,63	2,060	1,006 51
Kohlensäure	774,03	1550,63	2,003	1,007 22
Chlorwasserstoff	708,93	1460,03	2,059	1,009 25
Schwefelwasserstoff . . .	722,53	1409,93	1,951	1,010 83
Ammoniak	703,53	1435,33	2,040	1,018 81
Schweflige Säure	697,83	1341,58	1,922	1,020 88
Cyan	703,48	1428,58	2,031	1,023 53

Die Abweichungen vom Mariotteschen Gesetze, stets im Sinne ei stärkern Kompressibilität, sind zum Teil sehr beträchtlich, sie sind, wie später zeigen werden, im allgemeinen um so gröfser, je leichter die G zu Flüssigkeiten kondensiert werden.

§ 99.

Abweichung der Gase vom Mariotteschen Gesetze bei hoh Drucke. Die Regnaultschen Versuche ergeben uns das Verhalten der G von etwa 1 bis 30 Atmosphären. Sowohl für Drucke, welche kleiner als derjenige einer Atmosphäre, als für gröfsere Drucke hat er die G nicht verfolgt. Für erstere Drucke glaubte er, dafs die Beobachtungsfe zu grofs seien, um einige Sicherheit über das Verhalten der Gase erha zu können. Da indes die Gase nach Regnaults Beobachtungen mit steig dem Drucke immer weiter vom Mariotteschen Gesetze abweichen, m man an, dafs sie in ihrem Verhalten sich demselben um so mehr näh je kleiner der Druck wird.

Es sind nun in neuerer Zeit Versuche über das Verhalten der G bei Drucken, die kleiner sind als der Druck einer Atmosphäre, von Beobachtern durchgeführt worden, von Siljeström¹⁾, Mendelejeff²⁾ Amagat³⁾. Der erstere schliesst aus seinen Versuchen, dafs in der G mit abnehmendem Drucke das Produkt aus Druck und Volumen stets nehme, dafs sich dasselbe aber nicht einer bestimmten Grenze annäh dafs also selbst bei grofser Verdünnung die Gase nicht dem Mariottes Gesetze folgen. Die Versuche von Siljeström sind indes von Mendel einer scharfen Kritik unterzogen, und da Siljeström selbst angibt, dafs von ihm beobachteten Abweichungen vom Mariotteschen Gesetze die Änderungen des beobachteten Druckes verschwinden, die im allgeme kleiner sind als die von ihm zugegebenen Beobachtungsfehler der einz Beobachtungen, so kann man trotz der zahlreichen Versuche, die Siljeström angestellt sind, seine Folgerungen nicht für begründet halte

Mendelejeff kommt bei seinen mit Kirpitschoff angestellten Versuche dem entgegengesetzten Resultate; er findet, dafs, wenn man von dem Dr einer Atmosphäre aus den Druck des Gases vermindert, das Produkt wieder abnimmt, so dafs dasselbe also bei dem Druck einer Atmosph

¹⁾ Siljeström, Poggend. Ann. Bd. CLI.

²⁾ Mendelejeff, Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft Bd. pp. 486. 1339.

³⁾ Amagat, C. R. T. LXXXII. p. 914.

Maximum hätte. Mir sind bisher nur die vorläufigen von Mendelejeff in den Berichten der deutschen chemischen Gesellschaft veröffentlichten Resultate bekannt; die dort mitgeteilten Zahlen zeigen indes bei kleinen Drucken eine derartige Abnahme des Produktes PV , daß man an der Richtigkeit derselben zweifeln muß. Bezogen auf das Produkt PV bei 1 mm Druck als Einheit erhält Mendelejeff bei 51,628 mm 0,993 06, bei 14,555 mm schon 0,971 14 und bei 14,555 mm gar nur 0,965 51. So lange nicht die vollständige Arbeit von Mendelejeff und Kirpitschoff vorliegt, kann ich die vorläufigen Resultate nicht für richtig halten.

Dafür sprechen auch die Versuche von Amagat; derselbe findet, daß bei hohen Drucken die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, oder nur so wenig von demselben abweichen, daß die Abweichungen durch vermeintlichen Beobachtungsfehler verdeckt werden. Das von Amagat in seinen Versuchen benutzte Verfahren war folgendes. Zwei Kugeln dickwandigen Glases, jede von etwas mehr als 100^{ke} Inhalt, waren durch ein Rohr mit einander verbunden. An der untern befand sich ein langes Rohr, welches in ein tiefes, auf und nieder verstellbares Gefäß mit Quecksilber tauchte. Die obere Kugel trug ein Ansatzrohr, welches durch einen dicht durchbohrten Hahn mit einer gegabelten Röhre in Verbindung stand, deren einer Arm zu einer Luftpumpe, deren anderer zu einem Manometer führte.

Während nun das untere Ende des langen Rohres in Quecksilber tauchte, wurde aus den Kugeln die Luft ausgepumpt, bis das Quecksilber eine Marke stieg, die sich an dem die beiden Kugeln verbindenden Rohr befand, und dann am Manometer der Druck des noch in der Kugel vorhandenen Gases abgelesen. Darauf wurde das Quecksilber so weit gesenkt, bis das Quecksilber aus der untern Kugel bis zu dem dem untern langen Rohr befindlichen Marke hinabsank, und wieder wurde der Druck des jetzt nahezu auf das doppelte Volumen gebrachten Gases abgelesen.

Die beiden Kugeln befanden sich, um die Temperatur konstant zu erhalten, in einem Wasserbade, und es schwankte infolge dessen die Temperatur nur etwa um $\frac{1}{30}$ Grad.

Bei sieben Versuchsreihen, bei denen die Temperaturen stets zwischen 12° waren, ergaben sich folgende Resultate:

Reihe	Zahl der Einzelversuche	Anfangsdruck P_0 mm	$\frac{PV}{P_0 V_0}$
1	5	6,541	1,0018
2	5	6,546	1,0035
3	8	10,499	1,0000
4	6	10,516	0,9998
5	6	10,552	1,0022
6	4	6,538	1,0011
7	7	6,536	1,0018

Die Abweichungen der Zahlen der letzten Reihe sind kleiner als die bei den Beobachtungsfehler, so daß in der That diese Zahlen eine Abweichung der Luft vom Mariotteschen Gesetze nicht erkennen lassen. Wir nehmen deshalb, bis weitere Versuche vorliegen, annehmen, daß dem Ver-

halten der Gase in Drucken über 1 Atmosphäre entsprechend, die Abweichung vom Mariotteschen Gesetze immer kleiner wird, je kleiner der Druck wird; oder die Gase nähern sich mit wachsender Verdünnung ihrem Verhalten dem Gesetze mehr und mehr.

Wenn man die Gase stärkern als den von Regnault angewandten Drucken unterwirft, so tritt bei der Mehrzahl, wie schon erwähnt, der Übergang in die flüssige Form ein, bei einigen, den sogenannten permanenten Gasen, Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Wasserstoff, Kohlenoxyd nicht, wenigstens dann nicht, wenn man die Kompressionen bei der gleichen Temperatur unserer Umgebung vornimmt. Wir beschränken hier auf die Besprechung des Verhaltens der Gase bei gewöhnlicher Temperatur und werden erst im dritten Bande, wenn wir die Kontinuität der flüssigen und gasförmigen Zustände besprechen, auf das Verhalten der Gase in den verschiedenen Temperaturen zurückkommen.

Die Untersuchung des Verhaltens der permanenten Gase in weit höheren Drucken, bis zu 2000 Atmosphären, ist zuerst von Natterer¹⁾ vorgenommen. derselbe komprimierte die Gase in der Flasche seines § 110 beschriebenen Kompressionsapparates und maß den Druck, ähnlich wie Oersted und Schwendsen bei ihren vorhin erwähnten Versuchen, indem er gegen die Flasche angebrachtes Ventil einen Hebel wirken ließ und die Gasmenge bestimmte, welche den Hebel im Gleichgewicht hielten. Das komprimierte Gas ließ er dann durch eine Röhrenleitung unter eine in einer pneumatischen Wanne stehende Glocke treten, deren Kubikinhalt genau 10 mal so groß war als der Kubikinhalt der Flasche des Kompressionsapparates. Wenn nun die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, so muß je nachdem, wie oft die Glocke einmal aus der Flasche unter dem Drucke einer Atmosphäre gefüllt wird, der Druck um 10 Atmosphären abnehmen, sind die Gase weniger kompressibel, als es das Mariottesche Gesetz verlangt, muß der Druck bei jeder Füllung der Glocke um mehr als 10 Atmosphären abnehmen und zwar um so mehr, je mehr die Gase in dem Sinne vom Gesetze abweichen. Es zeigte sich, daß in hohen Drucken die Druckabnahme bis zu mehr als dem 10fachen wuchs; als Stickstoff z. B. 1 mal komprimiert war, sank bei dem ersten Austreten des Gases das 10fache Volumen Gas der Druck um 136, dann um 132 Atmosphären, als der Druck auf 75 Atmosphären herabgegangen war, nahm er für jedes 10fache Volumen heraustretenden Gases um 10 Atmosphären ab.

Indem Natterer in dieser Weise die Flasche allmählich entleerte nach jedesmaligem Ausfließen von 10 Volumen den Druck beobachtete, ließ sich auch rückwärts bestimmen, wieviel Volumen Gas in der Flasche bei einem bestimmten Drucke komprimiert waren. Da nun der reziproke Wert der in der Flasche enthaltenen Anzahl Volumina das Volumen in der Flasche unter dem Drucke einer Atmosphäre vorhandenen angibt, so läßt sich auf diese Weise das Produkt $P \cdot V$ für jedes Gas angeben, jenes bei 1 Atmosphäre Druck gleich 1 gesetzt. In dieser sind in folgender Tabelle einige von Natterers Angaben zusammengestellt, die erste der für jedes Gas angegebenen Spalten enthält die Drucke.

¹⁾ Natterer, Sitzungsberichte der Wiener Akademie Bd. V. Bd. VI. B. Poggend. Ann. Bd. LXII. Bd. XCIV. Die hier angeführten Versuche sind in P. A. Bd. XCIV.

Atmosphären, die zweite die Anzahl der in der Flasche unter diesen
 eken komprimierten Volumina der Gase, deren reciproker Wert das
 umen jener Gasmenge ist, welche unter dem Drucke einer Atmosphäre
 Flasche ausfüllt, die dritte Kolumne enthält den Quotienten $\frac{P_0 V_0}{P \cdot V} = \frac{1}{P \bar{V}}$,
 n Abweichung von der Einheit den Grad der Abweichung vom Mariotte-
 Gesetze in derselben Weise angibt wie bei den Zahlen von Regnault.

Wasserstoff			Sauerstoff		
P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P \cdot V}$	P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P \bar{V}}$
2790	1008	0,3613	1354	657	0,4582
2347	958	0,4081	1106	617	0,5578
1781	848	0,4761	923	577	0,6251
1508	778	0,5159	764	537	0,7028
1259	708	0,5615	563	467	0,8294
1015	628	0,6187	463	417	0,9006
751	528	0,7030	370	347	0,9378
505	398	0,7881	276	267	0,9674
365	308	0,8438	243	237	0,9753
248	218	0,8790	210	207	0,9857
100	98	0,9800	188	187	0,9947
78	78	1,0000	177	177	1,0000

Stickstoff			Kohlenoxyd		
P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P \cdot V}$	P	$\frac{1}{V}$	$\frac{1}{P \bar{V}}$
2790	705	0,2527	2790	727	0,2606
2046	645	0,3152	2088	677	0,3242
1640	605	0,3680	1674	637	0,3805
1458	585	0,4012	1416	607	0,4286
1228	555	0,4519	1196	577	0,4824
1035	525	0,5072	1016	547	0,5383
801	475	0,5930	814	507	0,6228
600	415	0,6917	599	447	0,7462
403	335	0,8312	408	367	0,8999
206	195	0,9466	204	197	0,9657
107	105	0,9813	138	137	0,9928
85	85	1,0000	127	127	1,0000

Für geringere als die zuletzt in den Tabellen angegebenen Drucke er-
 Natterer für die Produkte $P \cdot V$ den Wert 1, da diese Methode selbst-
 endlich nicht imstande ist, die kleinen Abweichungen der Gase vom
 otteschen Gesetze in geringeren Drucken erkennen zu lassen.

Die Versuche Natterers sind neuerdings wiederholt von Cailletet¹⁾;

¹⁾ Cailletet, Comptes Rendus T. LXX. p. 1131.

das von demselben angewandte Verfahren ist dem von demselben Physiker bei der Kompression der Flüssigkeiten benutzten ähnlich. Die Gase befanden sich in einer unten offenen und mit dem offenen Ende in Quecksilber tauchenden Gasröhre von etwa 50^{ke} Inhalt; an das obere Ende der Röhren war ein innen vergoldetes Kapillarrohr angesetzt, welches oben geschlossen war. Diese Vorrichtung war in einen mit Wasser angefüllten Kompressionsapparat gesetzt. Liefs man nun auf das Wasser den durch ein Desgoffesches Manometer (§ 64) gemessenen Druck wirken, so pflanzte sich derselbe auf das Quecksilber fort, und dieses stieg, wenn der Druck groß genug war, in das kapillare Rohr und löste das Gold an den Wänden soweit auf, als es in das Rohr eingedrungen war. Der Raum des kapillaren Rohres, an dessen Wandung das Gold nicht aufgelöst war, gab dann das Volumen des komprimierten Gases, welches nach Beendigung der Kompression bestimmt wurde. Die von Cailletet auf diese Weise bei einer Temperatur von 15° erhaltenen Zahlen gibt folgende Tabelle, zusammengestellt mit den Zahlen von Natterer.

Druck in Atmosphären	Wasserstoff		$\frac{V_0 P_0}{VP}$	Luft	
	Cailletet	Natterer		Cailletet	Natterer
60	0,9810	—		1,0137	—
80	"	—		1,0118	—
100	0,9552	0,9800		1,0098	1,0000
200	0,9158	0,9050		0,9990	0,9502
300	0,8761	0,8600		0,9405	0,9200
400	0,8374	0,8312		0,8672	0,8628
605	0,7580	0,7533		0,7215	0,7185

Später hat Cailletet¹⁾ Messungen über die Kompressibilität des Stickstoffes angestellt, bei welchen er direkt die Höhe der drückenden Quecksilbersäule maß. Die Einrichtung des Kompressionsgefäßes zeigt Fig. 158. In einer starken Röhre von Stahl, 1,8^m lang und 25^{mm} weit, befindet sich das oben in eine enge Röhre verlängerte mit dem Gase gefüllte Gefäß *A*. Die Glasröhre ist wieder auf ihrer innern Seite vergoldet. Die Stahlröhre ist oben durch den eisernen Conus *D* und die Schraube *C* verschlossen; dieselbe ist vollständig mit Quecksilber gefüllt. An dem untern Ende ist die Stahlröhre, wie die Fig. zeigt, mit einer 3^{mm} weiten Röhre *TT* von weichem Stahl verbunden, welche eine Länge von 250^m hat, und welche um eine Holztrommel von 2^m Durchmesser gewickelt ist, die sich um eine vertikale Axe drehen kann. Das Gefäß hängt selbst an einem 4^{mm} dicken ebenfalls um eine Holztrommel gewickelten Stahldraht. Die Stahlröhre ist vollständig und mit großer Sorgfalt mit Quecksilber gefüllt, so daß die Quecksilbersäule nirgendwo durch eine Luftblase unterbrochen ist. Die ganze Vorrichtung war über dem 500^m tiefen artesischen Brunnen zu Butte-aux-Cailles aufgestellt. Durch Drehen der den Draht und die Stahlröhre tragenden Holztrommeln wird dann der Apparat vorsichtig und langsam in den Brunnen hinabgelassen, bis zu einer Tiefe, die genau durch die Länge des abgewickelten Stahldrahtes gemessen wird, der dann auch die Höhe der drückenden Quecksilbersäule entspricht. Die an dem Apparat angebrachten Maximumthermometer gestatten nach dem Herausziehen des

¹⁾ Cailletet, D'Almeida, Journal de physique T. VIII.

die Temperatur zu bestimmen, welche der Apparat im Brunnen hatte, er also die Kompression stattgefunden hatte. Dieselbe war bis zu einer von $84^{\circ} 15'$ und stieg dann bei dem Hinablassen bis 182° auf 17° . Das Volumen der komprimierten Luft ergab sich gerade wie bei den beschriebenen Versuchen aus der Strecke, bis zu welcher in der Röhre das Gold aufgelöst war.

Folgende Tabelle gibt einige der von Cailletet erhaltenen Resultate; Drucke sind in Meter Quecksilber, die Volumina in Volumteilen des Compressionsgefäßes angegeben.

Druck	Volum		Druck	Volum	
P	V	$P \cdot V$	P	V	PV
30,359	207,93	8184	89,388	97,97	8267
44,264	184,20	8153	99,188	86,06	8536
49,271	162,82	8022	114,119	76,69	8751
59,462	132,86	7900	144,241	62,16	8966
64,366	123,53	7951	154,224	54,97	9023
69,367	115,50	8011	174,100	52,79	9191
79,234	103,00	8162	181,985	51,27	9330.

Das Minimum von PV , also die stärkste Kompressibilität des Stickstoffs, ergibt sich somit hier bei 182° Quecksilberdruck, von da ab nimmt dieselbe mit steigendem Maße ab.

Amagat¹⁾ hat die Kompressibilität der Gase noch weiter verfolgt und seine Versuche auf sämtliche sonst permanenten Gase ausgedehnt. Die Versuche wurden in einem Schachte von 400 Meter Tiefe in der Nähe von Saint-Etienne ausgeführt, auf dessen Boden ein Compressionsapparat aufgestellt war. Das Verstellrohr, welches Amagat anwandte, war demjenigen von Cailletet gleich, jedoch mußte er, wie Biot und Arago, die Kompressionen mit einer und derselben Gasfüllung anstellen. Um die kleinen Volumina mit Genauigkeit messen zu können, war deshalb dem Gasbehälter eine solche Form gegeben, wie sie auch von Cailletet benutzt war. Das Manometerrohr war ein enges Stahlrohr von 2^{mm} Durchmesser im Lichten und einer Wandstärke von 1,5^{mm}. Dasselbe war aus einzelnen Stücken zusammengesetzt und wurde nach Bedürfnis verlängert, wenn zu höhern und höhern Drucken übergegangen wurde. Bei jedem einzelnen Versuche wurde das Manometer in einer Glasröhre, in welcher das Quecksilber beobachtet wurde. Die Höhe der Quecksilbersäule wurde an einem mit einem versehenen Stahldrahte gemessen, welcher am Manometer im Schacht herabhing, indem der Beobachter in einem Fahrstuhl in dem Schacht empor-

Fig. 158.



¹⁾ Amagat, Annales de chim. et de phys. V. Série. T. XIX.

stieg und durch Einfüllen oder Herausnehmen von Quecksilber aus der Glasröhre bewirkte, daß das obere Niveau des Quecksilbers in gleicher Höhe mit einer Marke des Drahtes war.

Auf die Details dieser begreiflicher Weise mit den größten Schwierigkeiten verknüpften und deshalb um so verdienstvolleren Versuche können wir hier nicht eingehen; wir müssen deshalb auf die Abhandlung von Amagat verweisen, in welcher die zur Überwindung aller Schwierigkeiten angewandten Mafsregeln vortrefflich beschrieben sind.

In folgender Tabelle sind die Resultate der Messung für Stickstoff von Amagat zusammengestellt.

Druck P Meter Hg.	PV	Druck in Atmosph.	Druck ber. nach dem M. G.	Differenzen
20,740	50989	27,289	27,289	0,000
35,337	50897	46,496	46,580	+ 0,084
47,176	50811	62,034	62,251	+ 0,217
55,481	50857	73,001	73,181	+ 0,188
61,241	50895	80,580	80,728	+ 0,140
69,140	50987	90,975	90,978	+ 0,003
82,970	51226	109,171	108,665	— 0,506
96,441	51602	126,896	125,388	— 1,508
128,296	52860	168,810	162,835	— 5,975
158,563	54214	208,635	196,224	— 12,411
190,855	55850	251,127	229,271	— 21,855
221,103	57796	290,934	256,669	— 34,275
252,353	59921	332,039	282,544	— 49,495
283,710	62192	373,302	306,005	— 67,247
327,388	65428	430,773	335,707	— 95,066

Den kleinsten Wert erhält das Produkt PV hier bei einem etwas kleineren Drucke, als bei den Versuchen von Cailletet, bei einem Druck von 47^m Quecksilber.

Die Kompressibilität der übrigen Gase verglich Amagat dann mit der des Stickstoffs nach dem Verfahren von Despretz und Pouillet. Aus der beobachteten Volumverminderung des Stickstoffs wurde nach den in der vorigen Tabelle angegebenen Zahlen der Druck in Meter Quecksilber berechnet.

In folgender Tabelle sind die von Amagat erhaltenen Resultate zusammengestellt, wobei nur zu bemerken ist, daß die Drucke auf die erste Decimale abgerundet sind, da die von Amagat für die verschiedenen Gase angegebenen Drucke in der zweiten Decimale etwas verschieden sind. Die erste Kolumne enthält so die Drucke in Meter Quecksilber, für welche in den folgenden Kolumnen angegebenen Werte von PV erhalten wurden.

P	PV für					
	Luft	Sauerstoff	Wasserstoff	Kohlenoxyd	Grubengas	Äthylgas
24,1	26968	26843	27381	27147	26325	21473
34,9	26908	26614	27618	27102	25596	18352
45,2	26791	—	27652	27007	24998	12263
55,5	26789	26185	27960	27025	24433	9772
64,0	26778	26050	28129	27060	24074	9370

	<i>PV</i> für					
	Luft	Sauerstoff	Wasserstoff	Kohlenoxyd	Grubengas	Äthylen
2	26792	25858	28323	27071	23724	9703
2	26840	25745	28533	27158	23318	10675
5	27041	25639	—	27420	22951	12210
9	27608	25671	29804	28092	22915	15116
6	28540	25891	30755	29217	23739	18962
5	29585	26536	31625	30467	25054	22115
2	30572	—	32426	31722	26742	25065
0	—	28756	—	—	—	29333
0	32488	—	33887	33919	29289	—

Mit Ausnahme des Wasserstoffs, bei welchem entsprechend dem schon tegnault gefundenen Verhalten das Produkt PV stetig zunimmt, zeigen Gase ein Minimum des Produktes PV , welches aber bei jedem Gase nem andern Drucke eintritt. Am auffallendsten ist das Verhalten des ens, bei welchem der Wert des Produktes bei dem Minimum weniger n Drittel des Wertes bei 300^m Druck beträgt, und bei welchem dann ein ides Ansteigen des Produktes eintritt, daß die Kompressibilität dieses in höhern Drucken ohne Zweifel kleiner wird, als das aller übrigen.

Überall findet man aber das zuerst von Natterer gefundene Resultat igt, daß je weiter ein Gas komprimiert wird, um so mehr dasselbe Mariotteschen Gesetze abweicht, daß das Volumen ganz erheblich mer abnimmt, als es nach diesem Gesetze der Fall sein müßte.

Das Mariottesche Gesetz ist somit nur ein ideales Gesetz, dem sich rklischen Gase bei geringen Drucken mehr oder weniger anschließen, rucken von weniger als drei Atmosphären so nahe, daß wir es in den n Fällen unbedenklich bei Gasmessungen anwenden dürfen, das heißt, wir Gasquantitäten durch Messung des Volumens unter solchen en bestimmen oder vergleichen wollen, daß wir sie mit Anwendung iariotteschen Gesetzes auf das bei einem Normaldrucke, etwa dem e einer Atmosphäre von ihnen ausgefüllte Volumen reducieren dürfen.

§ 100.

Dynamische Theorie der Gase. Die Gase sind gegenüber den festen lüssigen Körpern dadurch charakterisiert, daß sie kein selbständiges en haben, daß eine bestimmte Quantität Gas nur unter einem be- ten Druck auch ein bestimmtes Volumen ausfüllt, wobei dann die uf die Wände des Raumes, in dem sie eingeschlossen sind, einen ie in dem Raum haltenden genau gleichen Gegendruck ausüben. Der gis nach liegt es nahe, in diesem Drucke der Gase wie bei den festen lüssigen Körpern eine elastische Gegenwirkung gegen den äußern zu sehen, also eine gegenseitige Abstossung der Moleküle des Gases. des die Gase stets, ihr Volumen mag so klein oder so groß sein wie ll, einen bestimmten Druck erheischen, um in einem bestimmten en gehalten zu werden und den diesem gleichen Gegendruck aus- so müßte man schliessen, daß die Moleküle der Gase sich gegen- stets und unter allen Umständen abstossen, eine Annahme, die man ielfach und lange Zeit gemacht hat. Unter Annahme, daß die Ab-

stofsung der Gasmoleküle mit einer Kraft stattfindet, die mit wachsender Entfernung abnimmt, läßt sich in der That das die Gase wenigstens im charakterisierende Mariottesche Gesetz ableiten. Wir werden indes in der Wärmelehre bei Besprechung der innern Arbeit bei Ausdehnung der Gase Erscheinungen kennen lernen, welche den Beweis liefern, daß eine solche Abstofsung zwischen den Gasmolekülen nicht vorhanden ist.

Schon Daniell Bernoulli¹⁾ sprach es aus, daß man sich auch eine ganz andere Vorstellung von der Natur des gasförmigen Zustandes machen kann, daß die Annahme genüge, daß die Gasmoleküle sich ganz unabhängig von einander frei im Raume bewegen, bis sie aneinander oder an eine feste Wand treffen, wo sie dann nach den Gesetzen des elastischen Stosses zurückgeworfen werden. Diese Ansicht wurde mehr als ein Jahrhundert kaum oder nur ganz vereinzelt beachtet und geteilt, bis sie vor etwa dreißig Jahren infolge unserer neuern Auffassung über das Wesen der Wärme bekanntlich von drei Physikern, von jedem selbständig und ohne Kenntniss der frühern vereinzelt ausgesprochenen Vorstellung, wieder neu gebildet wurde, von Joule²⁾, Krönig³⁾ und Clausius⁴⁾. Besonders Clausius führte diese Auffassung des Gaszustandes in der glücklichsten Weise durch, er leitete für eine Reihe von Erscheinungen die Gesetze des Verhaltens der Gase ab. Wenn auch die ganze Fruchtbarkeit dieser Theorie der Gase, in der Wärmelehre hervortreten wird, so ergeben sich doch eine Reihe von Erscheinungen, die uns an dieser Stelle zu betrachten obliegen, so unmittelbar aus dieser Theorie, daß wir dadurch veranlaßt werden, dieselbe jetzt vorzuführen, ihre Vervollständigung in der Lehre von der Wärme uns vorbehaltend.

Nach dieser Theorie existiert in den Gasen kein eigentlicher Gleichgewichtszustand, die Moleküle sind vielmehr immerfort in einer geradlinig fortschreitenden Bewegung, bis sie an eine feste Wand stoßen und von dieser als vollkommen elastische Körper zurückgeworfen werden, oder zwei Moleküle in geradem oder schiefe Stosse an einander prallen. Man denke sich, sagt schon Bernoulli, ein cylindrisches senkrecht stehendes Gefäß und darin einen beweglichen Stempel, auf welchem ein Gewicht liegt. Die Höhlung möge äußerst kleine Körperchen enthalten, welche sich mit größter Geschwindigkeit nach allen Richtungen hin bewegen; dann würden diese Körperchen, welche gegen den Stempel anprallen und ihn tragen, die elastische Flüssigkeit darstellen.

Um die Möglichkeit einer solchen stetig fortdauernden Bewegung veranschaulichen, stellt sich Krönig einen Kasten vor, in welchem eine große Zahl absolut elastischer Kugeln sich befinden, deren Volumen jedoch gegen den ganzen innern Raum des Kastens nur klein ist. Wenn man die Kasten lebhaft auf und ab und hin und her schüttelt, so erhalten

¹⁾ Bernoulli in seiner Hydrodynamik, sectio decima, aus dem Jahre 1738. Nach einer Bemerkung von P. Du Bois Reymond Poggend. Ann. Bd. CVII.

²⁾ Joule, Philos. Mag. Series IV vol. XIV. p. 211.

³⁾ Krönig, Poggend. Ann. Bd. XCIX.

⁴⁾ Clausius, Poggend. Ann. Bd. C. In Poggend. Ann. Bd. CXV p. 2. Clausius an, wie weit man sich in frühern Zeiten dieser Hypothese angeschlossen hat. Mit der Theorie von Clausius stimmt im wesentlichen die Theorie von Helmholtz überein. Helmholtz, Phil. Mag. Series IV vol. XIX und XX. Eine andere Theorie entwickelt Helmholtz später Phil. Mag. Series IV vol. XXXII und XXXV.

regeln eine Bewegung, wie sie für die Gasmoleküle angenommen ist, und um diese Kugeln sowie die Wände des Kastens als absolut elastisch angenommen werden, so dauert die Bewegung ohne Ende fort.

Außer dieser geradlinig fortschreitenden Bewegung müssen, wie Clausius hervorgehoben, die Moleküle zunächst noch eine rotierende Bewegung haben, da im allgemeinen die Stöße, mit denen die Moleküle aufeinander prallen, nicht lediglich centrale sein werden; jeder schiefe Stoß fügt aber, wie wir sahen, eine Rotation der Moleküle um eine in ihnen liegende Axe hervor. Dadurch ist, bei den zusammengesetzten Molekülen wenigstens, sofort auch die Wahrscheinlichkeit oscillirender Bewegungen der einzelnen Teile der Moleküle gegeben. Diese rotierende und oscillirende Bewegung nennt Clausius im Gegensatze zu der fortschreitenden Bewegung selber die Bewegung der Bestandteile. Bei einem bestimmten Gase und gegebener Temperatur müssen die lebendigen Kräfte dieser beiden Bewegungen in einem konstanten Verhältnisse stehen. Es folgt das einfach aus der Überlegung, daß in einem eine äußerst große Anzahl von Molekülen enthaltenden Raume in jedem Zeitelemente alle überhaupt nur möglichen Arten von Stößen stattfinden müssen; da nun die Bewegung der Bestandteile nur von der Art, wie die Moleküle aufeinander prallen, bei der gegebenen Zahl von Stößen abhängig ist, so wird sie in jedem Zeitelemente in der gleichen Weise erzeugt; es muß sich daher die gesamte Bewegung in einem stationären Zustande befinden, in welchem die lebendigen Kräfte beider Bewegungen in einem bestimmten und für immer sich bleibenden Verhältnisse stehen.

§ 101.

Mittlere Wegelänge der Moleküle. Um über den durch diese Annahme gegebenen Gaszustand nähern Aufschluß zu erhalten, untersuchen wir zunächst die Wegestrecken, welche die einzelnen Gasmoleküle zwischen den Mitteln zurücklegen zwischen je zwei Stößen. So schwierig diese Aufgabe zu sein scheint, in so einfacher Weise ist dieselbe von Clausius durch Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelöst worden¹⁾.

Die Moleküle stoßen einander und ändern ihre Bewegungsrichtung, um sie sich bis zu einem gewissen Abstände genähert haben; diese Entfernung ist durch den Radius einer Kugelfläche gegeben, welche wir uns um den Schwerpunkt der Moleküle gelegt denken. Diesen Radius nennt Clausius den Radius der Wirkungssphäre, und den von jener Kugelfläche eingeschlossenen Raum die Wirkungssphäre. Diese soll demnach so bestimmt sein, daß, wenn der Schwerpunkt eines andern Moleküls in diese Kugelfläche eintritt, der Stoß zwischen beiden Molekülen selbst stattfindet. In welchem Verhältnisse der Radius der Wirkungssphäre zur Größe des Moleküles selbst steht, darüber läßt sich nur auf Grund von Hypothesen etwas sagen. Nimmt man z. B. an, die Moleküle haben Kugelform und die

¹⁾ Clausius hat diese Frage zuerst Poggend. Ann. Bd. CV, Abhandlungen über mechanische Wärmetheorie (Braunschweig bei Vieweg 1864—1867) Abt. II p. 272 behandelt. Später nochmals in etwas anderer Weise Sitzungsberichte der niederrheinischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1874. Poggend. Ann. Erg.-Bd. VII. Obige Ableitung schließt sich an die zweite.

Stoßwirkung trete wie bei elastischen Kugeln ein, wenn die Oberflächen sich berühren, so erkennt man, daß der Radius der Wirkungssphären dem Durchmesser der Moleküle ist, denn in dem Falle tritt der Stoß ein, wenn die Mittelpunkte der Moleküle, also deren Schwerpunkte um die Summe der beiden Radien von einander entfernt sind.

Um die zwischen zwei Stößen zurückgelegte Wegestrecke zu berechnen, denken wir uns zunächst einen irgendwie durch eine beliebigen regelmäßigen Oberfläche begrenzten Raum und in diesem einen beweglichen Punkt. Der Punkt befinde sich an einer beliebigen Stelle des Raumes, so daß für alle gleich großen Teile des Raumes die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt zu enthalten gleich groß sei. Der Punkt mache dann eine beliebig kleine Bewegung von der Länge dl nach irgend einer beliebigen Richtung, so daß alle möglichen Richtungen gleich wahrscheinlich sind. Wir untersuchen zuerst die Frage, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt bei dieser unendlich kleinen Bewegung die Oberfläche trifft.

Zu dem Zwecke suchen wir zunächst die Wahrscheinlichkeit an, daß der Punkt irgend ein Element ds der Oberfläche trifft. Man denkt sich den Punkt ruhend und statt dessen das betrachtete Flächenelement ds , welches der vorher angenommenen Bewegung des Punktes entgegengesetzt in der Richtung um die Strecke dl bewegt. Dadurch beschreibt das Flächenelement einen unendlich kleinen prismatischen Raum und die Wahrscheinlichkeit, daß der ruhend gedachte Punkt in diesem Raume liegt, ist ganz dieselbe wie diejenige, daß der bewegte Punkt das Flächenelement ds trifft.

Für alle diejenigen Fälle, in denen die gedachte Bewegung des Flächenelementes von dem begrenzten Raume nach außen geht (welche jenen Bewegungen des Punktes entsprechen, bei denen er sich von dem Flächenelement ds entfernt), so daß also der von dem Flächenelemente beschriebene Raum außerhalb des gegebenen Raumes liegt, ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt in dem kleinen Raume liegt, gleich Null. Für solche dagegen, in denen die gedachte Bewegung des Flächenelementes nach innen geht, so daß der von demselben beschriebene kleine Raum einen Teil des gegebenen Raumes bildet, wird die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt sich gerade in diesem Teile des gegebenen Raumes befindet, gleich dem Bruche, dessen Zähler dieser Teil des Raumes und dessen Nenner der ganze Raum ist.

Sei ϑ der Winkel, welchen die Bewegungsrichtung des Elementes ds auf dem Elemente nach innen gerichteten Normalen macht, so ist die Größe des kleinen Raumes dargestellt durch den Ausdruck

$$ds \cos \vartheta \cdot dl,$$

denn der Raum ist ein schiefes Prisma von der Länge dl , dessen senkrechter Querschnitt $ds \cdot \cos \vartheta$ ist. Der Raum ist positiv, wenn der kleine Raum im Innern des gegebenen, negativ, wenn er außerhalb liegt; denn im letztern Falle ist der Winkel ϑ ein stumpfer. Für negative Werte des Ausdruckes ist somit die gesuchte Wahrscheinlichkeit Null. Wenn man den ganzen gegebenen Raum U , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt bei der gedachten Bewegungsrichtung der Punkt sich in dem

summe befinde

$$\frac{ds \cos \vartheta dl}{U}.$$

Damit ist indes die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt sich in dem betrachteten Raume befinde, respektive die Wand treffe, nur gegeben, wenn die Bewegungsrichtung mit dem Element ds den Winkel ϑ bildet. Um die Wahrscheinlichkeit überhaupt zu finden, daß der Punkt in dem kleinen Raume sich befinde, müssen wir erst noch die Wahrscheinlichkeit aufsuchen, daß der Punkt sich in dieser Richtung, die wir die Richtung ϑ nennen wollen, bewege.

Zu dem Ende denken wir uns um den Punkt eine Kugel beschrieben mit dem Radius eins. Die möglichen Bewegungsrichtungen sind dann sämtliche Radien der Kugel. Denken wir uns jetzt durch den Punkt, also den Mittelpunkt der Kugel die Richtung der Normale zu dem Flächenelement gelegt, so liegen alle Richtungen ϑ auf einem Kegelmantel, der die Kugelfläche in einem Kreise schneidet, nicht in zwei Kreisen, da wir nur den Winkel ϑ mit der nach innen gezogenen Normalen des Elementes in Betracht zu ziehen haben. Der Radius des Kreises, in welchem der Kegel die Oberfläche schneidet, ist $\sin \vartheta$, somit der Umfang des Kreises $2\pi \sin \vartheta$. Multiplizieren wir den Umfang $2\pi \sin \vartheta$ mit dem Bogenelement $d\vartheta$, so erhalten wir eine kleine Zone auf der Kugelfläche, deren Flächeninhalt $2\pi \sin \vartheta d\vartheta$ ist. Die Wahrscheinlichkeit nun, daß der Punkt bei seiner Bewegung eine Richtung habe, die zwischen ϑ und dem davon unendlich wenig verschiedenen $\vartheta + d\vartheta$ liegt, ist dann gleich dem Quotienten aus dem Flächeninhalt dieser Kugelzone und dem Flächeninhalt der Kugel. Da die zwischen ϑ und $\vartheta + d\vartheta$ liegenden Richtungen schneiden die Kugelfläche sämtlich in dieser Zone, während die Durchschnittspunkte sämtlicher möglicher Richtungen mit der Kugelfläche die ganze Kugelfläche bedecken. Da der Radius der Kugel gleich eins angenommen wurde, ist die Oberfläche der Kugel 4π . Die Wahrscheinlichkeit somit, daß die Bewegungsrichtung mit der Innenseite der Normalen einen spitzen Winkel ϑ bildet, der zwischen ϑ und $d\vartheta$ liegt, ist

$$\frac{2\pi \sin \vartheta d\vartheta}{4\pi} = \frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt sich in der Richtung ϑ bewege und bei der Bewegung dann das betrachtete Oberflächenelement ds treffe, ist dann gleich dem Produkte aus den beiden berechneten Wahrscheinlichkeiten. Denn unter den Fällen $\frac{\sin \vartheta d\vartheta}{2}$, in denen sich der Punkt in der verlangten Richtung bewegt, sind es nur die Fälle $\frac{ds \cos \vartheta dl}{U}$, in denen er das Flächenelement ds trifft, die Wahrscheinlichkeit, daß beides zusammen eintritt, ist somit

$$\frac{ds \cos \vartheta dl \sin \vartheta d\vartheta}{2U}.$$

Da wir nun über die Lage des Oberflächenelementes gar keine nähere Voraussetzung gemacht haben, so gilt die gleiche Wahrscheinlichkeit für

jedes Element der Oberfläche; ist s ein Stück der Oberfläche, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses unter dem Winkel ϑ von dem nach beliebigen Richtung durch die Strecke dl bewegten Punkte getroffen wird, in dem Verhältnis größer als die eben berechnete Wahrscheinlichkeit, welchem s größer ist als ds . Um diese Wahrscheinlichkeit zu erhalten, haben wir somit die vorhin berechnete mit $\frac{s}{ds}$ zu multiplizieren,

$$\frac{s \cos \vartheta \, dl \sin \vartheta \, d\vartheta}{2 U}.$$

Um dann die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, daß die Oberfläche des Gefäßes überhaupt an irgend einer Stelle unter dem Winkel ϑ getroffen wird, haben wir nur s durch die ganze Oberfläche S zu ersetzen, wird also

$$\frac{S \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta}{2 U} \, dl.$$

Wir wollen jetzt annehmen, der Punkt bewege sich nicht nur die kleine Strecke dl , sondern habe eine gewisse Geschwindigkeit, mit der er sich fort bewegt, bis er die Oberfläche trifft und von dieser nach dem Elasticitätsgesetze abpralle, worauf er nach einer andern Richtung derselben Geschwindigkeit weiter geht. Dabei soll vorausgesetzt werden, daß die Wechselwirkung zwischen Oberfläche und Punkt nur in unmittelbarer Nähe stattfindet, so daß die Änderung der Bewegungsrichtung dem Stöße in unmerklich kleiner Zeit vor sich gehe, und demnach die Geschwindigkeit trotz der während der Stoßzeit stattfindenden Abweichung als konstant betrachtet werden dürfe. Dann ist die Zeit dt , in der der Punkt den Weg dl zurücklegt, immer dieselbe, und wir können setzen $dl = u \, dt$. Setzen wir das für dl ein, so erhalten wir für die Wahrscheinlichkeit, daß das Stück s der Oberfläche in der Zeit dt getroffen wird, daß der Winkel ϑ getroffen wird,

$$\frac{s \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta \cdot u}{2 U} \, dt;$$

für die ganze Oberfläche haben wir nur s mit S zu vertauschen.

Hieraus erhalten wir die Anzahl von Stößen, welche das Flächenstück s in der Zeit einer Sekunde unter dem Winkel ϑ erhält, durch Überlegung. Nennen wir den Faktor von dt für einen Augenblick x , so kann man ausdrücken, daß das Flächenstück s durchschnittlich ein Mal unter dem Winkel ϑ in einer solchen Zeit ndt bekommt, daß

$$nxdt = 1, \quad ndt = \frac{1}{x};$$

denn im Verlaufe dieser Zeit wird die Wahrscheinlichkeit des Stoßes eins. Wenn die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Falles gleich 1 ist, so bedeutet das, daß der Fall wirklich eintritt; die Wahrscheinlichkeit wird mathematisch durch den Quotienten aus der zutreffenden und der Zahl der möglichen Fälle definiert. Ist der Quotient gleich 1, so heißt das, die Zahl der zutreffenden Fälle ist gleich der Zahl der möglichen, oder die vermutete Erscheinung tritt ein.

Findet nun in der Zeit ndt ein Stoß statt, so ist die Zahl der Stöße in der Zeit einer Sekunde

$$\frac{1}{ndt} = x = \frac{su \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2U}.$$

Das ist also die Zahl der Stöße, die das Flächenstück s der Oberfläche unter dem Winkel ϑ erhält im Laufe einer Sekunde; ersetzen wir s durch S , so erhalten wir die Zahl der Stöße, welche die ganze Oberfläche in der Richtung ϑ während einer Sekunde erhält.

Um daraus die Zahl von Stößen zu berechnen, welche die Oberfläche in einer Sekunde überhaupt erhält, haben wir den zuletzt gefundenen Ausdruck für jeden zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Wert von ϑ zu bilden, da der Winkel ϑ nur ein spitzer sein darf, und dann die Summe aller dieser Ausdrücke zu bilden. Die Zahl Z der Stöße, welche die ganze Oberfläche in der Sekunde erhält, ist somit nach E IV, E 5 und E VIII

$$Z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Su}{2U} \cdot \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{Su}{2U} \cdot \frac{1}{2} (\cos^2 \frac{\pi}{2} - \cos^2 0) = \frac{Su}{4U},$$

wie sich nach oft ausgeführter Rechnung gemäß den Entwicklungen der Einleitung ergibt. Die Zahl der Stöße ist also gleich dem Produkte aus der Geschwindigkeit des Punktes und der Größe der Oberfläche dividiert durch den vierfachen Raum, in welchem sich der Punkt bewegt.

Aus der Zahl der Stöße in der Sekunde erhalten wir den zwischen zwei Stößen zurückgelegten Weg, indem wir die in der Sekunde zurückgelegte Strecke durch die Stoßzahl dividieren, sie wird

$$l = \frac{u \cdot 4U}{Su} = \frac{4U}{S}.$$

Der hier abgeleitete Satz über die Zahl der Stöße Z und über den zwischen zwei Stößen im Mittel zurückgelegten Weg führt uns nun unmittelbar zur Lösung unserer Aufgabe der Bestimmung der mittleren Wegelänge der Moleküle.

Der Raum W sei mit Gas gefüllt; er enthalte die sehr große Zahl N der Moleküle von der von uns vorhin angenommenen Beschaffenheit; der Radius der Wirkungssphären sei gleich ϱ . Um auch jetzt wieder vom einseitigen Fall auszugehen, denken wir uns zunächst, daß nur eines der Moleküle sich in der für die Gasmoleküle angenommenen Bewegung befinde, alle übrigen seien fest, das heißt sie ändern ihren Ort im Raume nicht. Die Anordnung dieser Moleküle sei eine ganz beliebige, jedoch so, daß immer in gleich großen meßbaren Stücken des betrachteten Raumes die gleiche Anzahl von Molekülen vorhanden sei. Der in unsern Entwicklungen genannte bewegliche Punkt repräsentiert uns dann den Schwerpunkt beweglichen Moleküls. Derselbe bewegt sich so lange fort, bis er in Wirkungssphäre eines festen Moleküles oder an der Wand des Raumes stößt, welche das Gas einschließt. Wir haben demnach, um die Zahl der Stöße, die das bewegliche Molekül in der Zeiteinheit erfährt, in dem nun für Z entwickelten Ausdrücke nur für S die Summe der Oberflächen

aller Wirkungssphären der im Raum vorhandenen Moleküle und den Begrenzungen des Gefäßes einzusetzen. Denn die Summe aller dieser Flächen ist die Begrenzung des Raumes, in welchem sich unser Punkt bewegen kann. Da wir bei unserer Entwicklung die Form der Begrenzung des betrachteten Raumes ausdrücklich als ganz beliebig angenommen haben, gilt unsere Entwicklung für den in dieser Weise begrenzten Raum unmittelbar.

Der Raum U , in welchem sich der Punkt bewegen kann, ist der gegebene Gasraum, aus dem der Punkt ausgeht, vermindert um den Raum, in welchem die Wirkungssphären der Moleküle ausfüllen, denn in die Wirkungssphären kann der Punkt nicht eindringen¹⁾.

Die Oberfläche der Wirkungssphäre eines einzelnen Moleküls ist $4\varrho^2\pi$. Die Summe der Oberflächen für N Moleküle somit $N \cdot 4\varrho^2\pi$. Setzt man Σ die Größe der Gefäßwand, welche das Gas einschließt, gleich Σ , so

$$S = N \cdot 4\varrho^2\pi + \Sigma.$$

Ist ferner V der von der gegebenen Gasmenge eingenommene Raum, so wird, da $\frac{4}{3}\varrho^3\pi$ der von der Wirkungssphäre jedes einzelnen Moleküls eingenommene Raum ist,

$$U = V - N \cdot \frac{4}{3}\varrho^3\pi.$$

Damit erhalten wir, wenn u die Geschwindigkeit des bewegten Moleküls ist,

$$Z_1 = \frac{N \cdot 4\varrho^2\pi + \Sigma}{4(V - N \cdot \frac{4}{3}\varrho^3\pi)} \cdot u,$$

und für die mittlere Wegelänge des Moleküls die zwischen je zwei im Mittel zurückgelegte Strecke

$$l_1 = 4 \frac{V - N \cdot \frac{4}{3}\varrho^3\pi}{N \cdot 4\varrho^2\pi + \Sigma}.$$

Bei der Bestimmung dieses Wertes l_1 ist noch die Voraussetzung zu machen, daß die Moleküle mit Ausnahme des einen betrachteten Moleküls in Ruhe seien. Nach unserer Gastheorie sind nun alle Moleküle in Bewegung. Die Geschwindigkeit der Bewegung ist im Mittel für alle dieselbe, wir setzen sie also für alle gleich u .

Zunächst sieht man, daß die Zahl der Stöße, welche das Molekül an der festen Wand erteilt, dadurch nicht geändert werden kann, da die Wand an der Bewegung der Moleküle nicht teilnimmt, die Verhältnisse der Moleküle der festen Wand gegenüber somit nicht geändert werden. Setzt man daher

$$Z_1 = \frac{N \cdot 4\varrho^2\pi \cdot u}{4(V - N \cdot \frac{4}{3}\varrho^3\pi)} + \frac{\Sigma \cdot u}{4(V - N \cdot \frac{4}{3}\varrho^3\pi)},$$

so kann nur das erste Glied des Ausdruckes für Z_1 geändert werden

¹⁾ Darauf, daß bei Berechnung der mittlern Wegelänge der Moleküle der Raum, in welchem die Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllt sind, in Betracht gezogen werden müsse, hat zuerst *Van der Waals* in seiner Abhandlung: „Over de Contingentie van den Gas- en Vloeistofftoestand. Academisch Proefschrift, Leiden, 1873“ hingewiesen.

Die Änderung desselben ergibt sich auf folgende Weise; die Zahl dieser Stöße ist bei ruhenden Molekülen der Geschwindigkeit u des bewegten proportional, denn sie ist, wenn wir den Faktor von u der Kürze halber mit a und das erste Glied des Ausdrucks für Z_1 mit Z'_1 bezeichnen,

$$Z'_1 = au.$$

Für die zwischen zwei Stößen im Mittel verstreichende Zeit τ erhalten wir dann

$$\frac{1}{Z'_1} = \frac{1}{au} = \tau.$$

Sind nun außer dem betrachteten auch alle übrigen Moleküle in Bewegung, so ist, wenn wir zunächst annehmen, daß während der Zeit τ die Bewegung aller Moleküle außer dem betrachteten dieselbe Richtung habe, die zwischen zwei Stößen stattfindende Zeit in dem Maße kleiner oder größer als τ , in welchem die Moleküle durch ihre Bewegung sich dem betrachteten genähert oder von demselben entfernt haben. Für die Berechnung dieser geänderten Stoßzeit τ' gelangen wir zu demselben Resultate, wenn wir auch jetzt noch uns alle Moleküle als ruhend denken, dagegen dem betrachteten Moleküle eine in dem Maße größere oder kleinere Geschwindigkeit beilegen, daß es den bei ruhenden Molekülen vorhandenen Abstand in derselben Zeit τ' zurücklegt, wie den durch die Bewegung der Moleküle verkleinerten Abstand mit der Geschwindigkeit u . Wir haben so einfach anstatt der Geschwindigkeit u die relative Geschwindigkeit des Moleküls gegenüber derjenigen der anderen Moleküle zu setzen. Bewegen sich z. B. alle Moleküle mit dem betrachteten in derselben Richtung mit der Geschwindigkeit v , so entfernt sich ein in der Bahn des Molekül liegendes anderes Molekül in der Zeit τ um die Strecke $v\tau$, das Molekül hat also außer dem frühern Wege noch den Weg $v\tau$ zurückzulegen, um an das folgende anzustößen. Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir dem betrachteten Molekül die Geschwindigkeit $(u - v)$ beilegen, während die anderen ruhen, auch dann hat es nach der Zeit τ noch den Weg $v\tau$ zurückzulegen, um zum Stoß zu gelangen. Ebenso wie bei gleichgerichteter Geschwindigkeit haben wir auch, wenn die Geschwindigkeit v eine andere Richtung hat, anstatt u die relative Geschwindigkeit des betrachteten Moleküls zu setzen, das heißt also jene Geschwindigkeit, mit welcher es sich zwischen den als ruhend gedachten andern Molekülen bewegen müßte, um gegen dieselben die gleiche Bewegung zu erhalten, welche durch die Bewegung aller Moleküle bewirkt wird. Bildet die Geschwindigkeit v mit derjenigen u den Winkel φ , so ist nach dem Satz von dem Parallelogramm der Bewegungen diese relative Geschwindigkeit

$$r = \sqrt{u^2 + v^2 - 2uv \cdot \cos \varphi},$$

oder wenn wir voraussetzen, daß die Geschwindigkeit aller Moleküle dieselbe u des betrachteten sei

$$r = u \sqrt{2 \sqrt{1 - \cos \varphi}}.$$

Haben die Moleküle nicht alle die gleiche Richtung der Bewegung, welche mit der des betrachteten Moleküles den Winkel φ bildet, sondern haben deren Bewegungen alle möglichen Richtungen, so daß für jedes

Molekül jede Richtung im Raume gleich wahrscheinlich ist, so ist die relative Geschwindigkeit des Moleküles gegen jedes der anderen Moleküle eine andere. Nehmen wir aber aus allen diesen relativen Geschwindigkeiten das arithmetische Mittel, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß dieses Molekül an ein anderes stößt, also auch im Mittel die zwischen zwei Stößen verstrichene Zeit, dieselbe als wenn das Molekül diese mittlere Geschwindigkeit besäße, alle übrigen aber in Ruhe wären.

Zur Berechnung dieser mittlern relativen Geschwindigkeit \bar{r} haben wir dieselbe Betrachtung anzustellen wie vorhin, als wir die Zahl der Moleküle berechneten, welche die Oberfläche unter dem Winkel ϑ treffen. Die Zahl der Moleküle, deren Bewegungsrichtung mit derjenigen des betrachteten Moleküls Winkel bilden, welche zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ liegt, hält sich zur Gesamtzahl der Moleküle wie die Zone $2\pi \sin \varphi d\varphi$ zur Oberfläche der Kugel 4π , sie ist somit, da wir die Anzahl der in dem betrachteten Volumen vorhandenen Moleküle N genannt haben,

$$N \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi.$$

Denn auch jetzt sind sämtliche Bewegungsrichtungen die Radien der Kugel, die zwischen φ und $\varphi + d\varphi$ gelegen sind, die zu der entsprechenden Zone gehörigen Radien. Nach dem Begriffe der mittlern Geschwindigkeit als der Summe aller Geschwindigkeiten dividiert durch die Anzahl der Moleküle, müssen wir zur Berechnung von \bar{r} die Summe aller möglichen relativen Geschwindigkeiten, und zwar jeder einzelnen so oft, als Molekül ihr begegnet sind, bilden, und dann die Gesamtsumme durch N dividieren. Die vorhin berechnete Geschwindigkeit r besitzt die Anzahl $N \frac{1}{2} \sin \varphi d\varphi$. Das Produkt

$$Nu \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi} \cdot d\varphi$$

gibt somit, wenn wir auch jetzt u als die mittlere absolute Geschwindigkeit aller Moleküle bezeichnen, den Anteil, den die mittlere Geschwindigkeit an der Gesamtsumme hat. Bilden wir nun den gleichen Ausdruck für die zwischen 0 und π liegenden Werte, so erhalten wir in der Summe dieser Ausdrücke dividiert durch N die gesuchte mittlere Geschwindigkeit \bar{r} . Dieselbe wird somit

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \int_0^\pi Nu \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \sin \varphi \sqrt{1 - \cos \varphi} \cdot d\varphi.$$

Da nun

$$\sqrt{1 - \cos \varphi} = \sqrt{2} \cdot \sin \frac{\varphi}{2}; \quad \sin \varphi = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2},$$

so wird, wenn wir gleichzeitig die konstanten Faktoren vor das Störzeichen setzen,

$$\bar{r} = 4u \int_0^\pi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{2}.$$

Nach den schon oft benutzten Sätzen der Einleitung ist

$$\int_0^\pi \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{2} = \frac{1}{3} \left(\sin^3 \frac{\pi}{2} - \sin^3 0 \right) = \frac{1}{3},$$

demnach wird

$$\bar{r} = \frac{1}{3} u.$$

Für die zwischen zwei Stößen innerhalb der Moleküle im Mittel verstrichene Zeit ergibt sich darnach

$$\tau' = \frac{1}{a\bar{r}} = \frac{1}{a\frac{1}{3}u},$$

somit für die Stofszahl

$$Z' = \frac{1}{\tau'} = \frac{1}{3} au = \frac{1}{3} \cdot \frac{N 4 \varrho^2 \pi u}{4(V - N \frac{4}{3} \varrho^2 \pi)},$$

oder für die Stofszahl Z , welche das Molekül im Mittel in der Sekunde innerhalb der Moleküle und an der Wand des Gefäßes erhält,

$$Z = \frac{\frac{1}{3} N 4 \varrho^2 \pi + \Sigma}{4(V - N \frac{4}{3} \varrho^2 \pi)} u,$$

und daraus für die von dem Molekül im Mittel zwischen zwei Stößen zurückgelegte Wegestrecke

$$l = 4 \cdot \frac{V - N \frac{4}{3} \varrho^2 \pi}{\frac{1}{3} N 4 \varrho^2 \pi + \Sigma}.$$

Da wir in den letzten Entwicklungen die mittlere Geschwindigkeit des nach beliebiger Richtung mit der Geschwindigkeit u zwischen der nach beliebigen Richtungen mit der gleichen Geschwindigkeit u sich bewegenden Molekülzahl N berechnet haben, gilt dieser unser Ausdruck für jedes der Moleküle, so daß also der gefundene Wert für l uns die mittlere Wegelänge irgend eines Moleküles in dem mit Gas gefüllten Raume V liefert. Die mittlere Wegelänge hängt demnach einigermaßen von der Ausdehnung der Wandflächen des Gefäßes ab, das heißt denken wir uns einen Kubikmeter Luft in der äußern Atmosphäre ohne Wandfläche, so ist die Wegelänge etwas größer, als wenn wir ihn durch eine feste Wand umgrenzen. Jedes, wenn auch die Wirkungssphäre eines Moleküles eine sehr kleine Oberfläche hat, so ist doch, wenn die Gase nicht sehr verdünnt sind, die Zahl der Moleküle eine so große, daß wir in dem Ausdrucke für l im Nenner Σ gegen das erste Glied vernachlässigen und schreiben dürfen

$$l = \frac{V - N \frac{4}{3} \varrho^2 \pi}{\frac{1}{3} N 4 \varrho^2 \pi},$$

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{V - N \frac{4}{3} \varrho^2 \pi}{N \frac{4}{3} \varrho^2 \pi}.$$

Das Verhältnis der mittleren Wegelänge zu dem Radius der Wirkungssphäre ist also gleich dem Verhältnisse des von den Wirkungssphären der Moleküle freien von dem Gase eingenommenen Raumes zu dem von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllten Raume. Dieses letztere Verhältnis können wir auch als den für jedes Molekül vorhandenen freien Raum bezeichnen, das heißt denken wir uns den gegebenen Raum in soviel Teile geteilt, als derselbe Moleküle enthält, so ist der Quotient aus der mittleren Wegelänge und dem Radius der Wirkungssphäre gleich dem Quotienten aus dem Rauminhalt eines solchen Würfels weniger dem Rauminhalt einer Wirkungssphäre und dem Rauminhalt der letztern. Nennen

wir also l die Seite eines solchen Würfels, so daß $Nl^3 = V$, so wird

$$\frac{l}{e} = \frac{l^3 - \frac{4}{3}e^3\pi}{\frac{4}{3}e^3\pi},$$

$$l = \left(\frac{l^3}{\frac{4}{3}e^3\pi} - 1 \right) e;$$

die mittlere Weglänge ist also gleich dem Quotienten aus dem Rauminhalte eines der Würfel dividiert durch den Rauminhalt einer Wirkungssphäre weniger eins multipliciert mit dem Radius der Wirkungssphäre. Dieselbe ist jedenfalls eine sehr kleine GröÙe, so daß wir erkennen, daß die Entwicklung unserer Auffassung über den Gaszustand dahin führt, daß die Bewegung der Gasmoleküle wesentlich eine oscillierende ist, wobei sie aber nicht bei jeder Oscillation denselben Weg hin und her zurücklegen, und wobei nicht die Oscillationsweiten immer dieselben sind.

Um das letztere zu erkennen, müssen wir noch einmal auf die Bedeutung der mittlern Weglänge zurückkommen. Dieselbe ist nicht etwa, daß jedes Molekül zwischen je zwei Stößen den Weg l zurücklegt. Die in Wirklichkeit zurückgelegten Wege sind sehr verschieden, sie sind aber bald größer bald kleiner als l , und im ganzen so, daß wenn wir die zwischen einer großen Zahl Stößen zurückgelegten Wege durch die Zahl der Stöße dividieren, diese Länge herauskommt. Oder auch, zählen wir die von sämtlichen Molekülen N , die den Raum V erfüllen, zwischen je zwei Stößen zurückgelegten Wege zusammen, so ist diese Summe dividiert durch die Zahl der Moleküle gleich der mittlern Weglänge, die von sämtlichen Molekülen zurückgelegten Wege sind also so groß, als wenn jedes den Weg zurückgelegt hätte.

Um den Gaszustand vollständig zu übersehen, wollen wir deshalb die Frage noch untersuchen, welche Wegstrecken die Moleküle wirklich zurücklegen; wir berechnen deshalb zunächst nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit die Anzahl Moleküle, welche einen Weg von x Weglängen zurücklegen, keinen größeren und keinen kleinere. Sei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül die mittlere Weglänge l zurücklegt, ohne schon vorher anzustoßen, gleich a , so ist die Wahrscheinlichkeit, daß es nochmals den Weg l zurücklegt ohne anzustoßen, gleich $a \cdot a = a^2$, die Wahrscheinlichkeit, daß es den Weg $3l$, ohne vorher anzustoßen, a^3 , also diejenige, daß es den Weg $x \cdot l$ zurücklegt, ohne vorher anzustoßen, a^x . Schreiben wir nun, da a ein echter Bruch ist, $a = e^{-\alpha}$, so können wir diese Wahrscheinlichkeit schreiben

$$W = e^{-\alpha x}.$$

Enthält unser Raum N Moleküle, so bedeutet der Satz, daß die Wahrscheinlichkeit, daß jedes Molekül den Weg $x \cdot l$ zurücklegt, gleich W ist nichts anderes, als daß von der ganzen Zahl N eine solche Zahl n den Weg zurücklegt, ohne schon vorher anzustoßen, daß

$$\frac{n}{N} = W$$

ist. Die Zahl n der den Weg $x \cdot l$, ohne vorher anzustoßen, zurückgelegten Moleküle ist somit

$$n = NW = Ne^{-\alpha x}.$$

Alle übrigen Moleküle werden schon nach Zurücklegung kleinerer Wege gestossen. Um nun aber die Zahl der Moleküle zu bestimmen, welche gerade den Weg $x \cdot l$ zurücklegen und keinen grössern, müssen wir ausrechnen, wie viele am Ende dieses Weges einen Stoss erhalten. Wir finden diese Anzahl, wenn wir von der eben gefundenen Zahl diejenige abziehen, welche ohne anzustossen den von x unendlich wenig verschiedenen Weg $(x + dx)l$ zurücklegen; denn die Differenz dieser Zahlen ist eben jene Anzahl von Molekülen, welche keinen grössern Weg als $(x + dx)l$, wofür bei der vorausgesetzten Kleinheit von dx auch $x \cdot l$ gesetzt werden darf, ohne Stoss zurücklegen kann. Diese Differenz ist

$$Ne^{-\alpha x} - Ne^{-\alpha(x+dx)} = Ne^{-\alpha x}(1 - e^{-\alpha dx}).$$

Bei der vorausgesetzten Kleinheit von dx können wir setzen

$$e^{-\alpha dx} = 1 - \alpha dx,$$

und erhalten somit für die Zahl der Moleküle, die gerade den Weg x ohne Stoss zurücklegen, keinen grössern und keinen kleinern

$$Ne^{-\alpha x} \cdot \alpha dx.$$

Hiermit sind wir imstande den Koeffizienten α zu bestimmen, indem wir die Summe aller von den Molekülen zwischen je zwei Stössen zurückgelegten Wege berechnen, die, wie wir sahen, gleich Nl ist.

Da die eben berechnete Molekülzahl gerade den Weg x zurückgelegt hat, so ist das Produkt

$$x \cdot Ne^{-\alpha x} \cdot \alpha dx$$

in Summe von diesen Molekülen zurückgelegte Weg. Den von allen Molekülen zurückgelegten Weg erhalten wir dann, wenn wir für jeden Wert von x zwischen Null und Unendlich den gleichen Ausdruck bilden und alle diese summieren, also in der Summe

$$\int_0^{\infty} x Ne^{-\alpha x} \alpha dx.$$

Für diese Summe gibt die Integralrechnung den Wert

$$\frac{N}{\alpha};$$

nun die Summe der von allen Molekülen zurückgelegten Wege gleich ist, so folgt

$$\frac{N}{\alpha} = N \cdot l; \quad \alpha = \frac{1}{l}.$$

Mit dem so bestimmten Werte von α ergibt sich somit die Wahrscheinlichkeit, daß ein Molekül den Weg xl zurücklegt, zu e^{-x} , und hiernach die Zahl der Moleküle, welche den Weg xl zurücklegt, zu Ne^{-x} . Die Zahl der Moleküle, welche also die mittlere Wegelänge ohne vorher angestossen zu sein zurücklegt, ist

$$Ne^{-1} = 0,3679 N,$$

oder nur etwa 37%; alle übrigen haben schon nach Zurücklegung eines kleineren Weges einen Stoss erhalten. Für den doppelten Weg findet man 13,5%, für den dreifachen 4,9%, für den zehnfachen 0,0045%, etc.

also von einer Million Moleküle im Durchschnitt nur 45 ungestört die 10fache mittlere Wegelänge zurücklegen.

§ 102.

Ableitung des Mariotteschen Gesetzes. Die Entwicklungen des letzten Paragraphen führen uns sofort zu der Beziehung, welche zwischen dem Druck eines Gases und dem von demselben eingenommenen Raum bestehen muß. Nach unserer Theorie kann der Druck, den das Gas auf die Wandungen des Gefäßes ausübt, in welches es eingeschlossen ist, nur herühren von den Stößen, welche die an die Wand prallenden Moleküle der Wand erteilen.

Wenn ein Raum von der GröÙe U ein mit der Geschwindigkeit u sich bewegendes Molekül enthält, so erhält das Flächenstück s der Wand im Durchschnitt pro Sekunde (p. 445)

$$\frac{su \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2 U}.$$

Stöße in der Richtung ϑ . Enthält der Raum N Moleküle, so ist für jedes dieser N Moleküle die Stoßzahl dieselbe, die in der Richtung ϑ von allen diesen Molekülen ausgeübten Stöße haben somit die Zahl

$$\frac{N s u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2 U}.$$

Das an die Wand anprallende Molekül wird nach den Gesetzen des elastischen Stofses von der Wand zurückgeworfen, das heißt also die gegen die Wand senkrechte Komponente der Geschwindigkeit wird in die entgegengesetzte verwandelt. Die zur Wand senkrechte Komponente der Geschwindigkeit für die in der Richtung ϑ gegen die Wand fliegenden Moleküle ist $u \cdot \cos \vartheta$; indem diese in die entgegengesetzte verwandelt wird, ist es dasselbe, als wenn dem Molekül in der von der Wand fortgewandten Richtung die Geschwindigkeit $2u \cos \vartheta$ erteilt würde. Nennen wir nun m die Masse des einzelnen Moleküls, so ist die dieser Geschwindigkeit entsprechende BewegungsgröÙe $m \cdot 2u \cos \vartheta$. Die gesamte BewegungsgröÙe, welche die in der Richtung ϑ gegen die Wand fliegenden Moleküle infolge ihres Anpralls an das Stück s der Wand in der Zeit einer Sekunde erhalten, ist demnach, da jedes in der Richtung ϑ gegen die Wand fliegende Molekül bei jedem Stöße dieselbe BewegungsgröÙe $2mu \cos \vartheta$ erhält,

$$2mu \cos \vartheta \cdot \frac{N s u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2 U} = \frac{s N m u^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{U}.$$

Hieraus erhalten wir in schon oft abgeleiteter Weise die BewegungsgröÙe, welche sämtliche in allen möglichen Richtungen gegen die Wand fliegenden Moleküle infolge ihres Anpralls an die Wand in einer Sekunde erhalten, in der Summe

$$\frac{s N m u^2}{U} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

denn die möglichen Richtungen entsprechen allen Werten von ϑ zwischen 0 entsprechend dem senkrechten Anprall, und $\frac{\pi}{2}$ entsprechend einer der Wand parallelen Bewegung. Diese Summe ist, da

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = -\frac{1}{3} (\cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos^3 0) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3} \frac{s N m u^2}{U}.$$

Denken wir uns jetzt die Wandfläche s vollkommen frei beweglich, so mufs, damit sie nicht durch die Stöße der Moleküle zurückgetrieben wird, an der andern Seite auf die Wand ein Druck ausgeübt werden, und zwar mufs wegen der grossen Zahl von Stößen, die in stetiger Folge stattfinden, dieser Druck ein stetiger sein. Die Gröfse dieses Druckes ist dadurch gegeben, dafs er, die Zeit einer Sekunde wirkend, der Masse der gegen die Wandfläche s prallenden Moleküle dieselbe Bewegungsgröfse erteilen mufs. Nennen wir diesen Druck für die Flächeneinheit p , so mufs nach dem § 11 geleiteten Satze, dafs der Antrieb einer Kraft in der Zeit t gleich der in dieser Zeit t erreichten Bewegungsgröfse sein mufs, und da die hier in Betracht gezogene Zeit die Zeit einer Sekunde ist,

$$ps = \frac{1}{3} \frac{s N m u^2}{U},$$

oder

$$p = \frac{1}{3} \frac{N m u^2}{U}, \quad p U = \frac{1}{3} N m u^2.$$

Wie wir im vorigen Paragraphen sahen, ist U der von den Wirkungssphären der Moleküle freie Raum des mit dem Gase gefüllten Gefäßes, so mufs wir also zu dem Satze gelangen, dafs das Produkt des Druckes, den ein Gas auf die Flächeneinheit ausübt in den von den Wirkungssphären eingenommenen Raum, den das Gas einnimmt, gleich einem Drittel der doppelten wirkenden Kraft der fortschreitenden Bewegung der in dem Raume wegen der Moleküle ist¹⁾. Für die Gröfse U erhielten wir im vorigen Paragraphen

$$U = V - N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi.$$

Bei den jedenfalls sehr kleinen Werten von ϱ können wir, wenn das Gas nicht eine sehr grofse Dichtigkeit hat, den von den Wirkungssphären eingenommenen Raum vernachlässigen, und erhalten dann

$$p V = \frac{1}{3} N m u^2.$$

Da für eine gegebene Gasmasse die Zahl der Moleküle konstant ist, also die Masse m jedes Moleküls und, wie wir schon hier hervorheben mollen, für eine konstante Temperatur, auch die Geschwindigkeit u , so ist die letzte Gleichung der Ausdruck des Mariotteschen Gesetzes, dafs das Produkt aus dem Drucke und dem Volumen bei einer gegebenen Gasmenge und gegebener Temperatur konstant ist.

Die Entwicklung läfst aber zugleich erkennen, dafs das Gesetz nur näherungsweise richtig sein kann, und dafs die Gase um so mehr davon abweichen müssen, je kleiner der von dem Gase eingenommene Raum ist, namentlich dann, wenn der von den Wirkungssphären eingenommene Raum

¹⁾ *Krönig*, Poggend. Ann. Bd. XCIX. Genauer abgeleitet zuerst von *Mayer*, Poggend. Ann. Bd. C.

nicht verschwindend klein ist. Setzen wir in die Gleichung den richtigen Wert für U ein, so wird:

$$p(V - N \frac{4}{3} \rho^{-3} \pi) = \frac{1}{3} N m u^2.$$

Da für eine gegebene Gasmasse der von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllte Raum eine konstante GröÙe ist, so können wir, wenn wir denselben mit b bezeichnen und die Konstante der rechten Seite mit R , diese Gleichung auch schreiben

$$p(V - b) = R; \quad pV = R + pb.$$

Wir erkennen demnach¹⁾, daß die dynamische Gastheorie anstatt zu dem Mariotteschen Gesetze, zu dem Satze gelangt, daß das Produkt aus dem Drucke und Volumen eines Gases nicht konstant ist, sondern daß es mit wachsendem Drucke wachsen muß und zwar um so mehr, je größer der Druck p ist, unter welchem das Gas steht. Weiter aber erkennt man, daß diese Beziehung nur so lange gültig sein kann, wie die Bewegungen die in der Theorie vorausgesetzten sein können. Das ist höchstens so lange möglich, als der Abstand der Schwerpunkte zweier Moleküle nicht kleiner als der doppelte Radius der Wirkungssphäre ist, denn nur dann könnte noch ein Molekül zwischen zwei andern hindurchgehen; es kann also diese Beziehung nicht mehr gelten, sobald der ganze von dem Gase angefüllte Raum nicht größer ist als der doppelte Raum, den die Wirkungssphären der Gase ausfüllen.

Von den von Regnault untersuchten Gasen entspricht indes nur der Wasserstoff dieser Beziehung, denn nur bei diesem wächst das Produkt pV mit wachsendem Drucke, bei allen übrigen Gasen dagegen nimmt mit wachsendem Drucke zunächst das Produkt pV ab, um dann, erst wenn der Druck auf 60—70 Atmosphären gewachsen ist, wieder zuzunehmen, wie sich übereinstimmend aus den Versuchen von Cailletet und Amagat ergab.

Wir müssen daraus schließen, daß unsere Theorie noch nicht ganz den wirklichen Verhältnissen entspricht; in der That haben wir bei Entwicklung derselben eine Voraussetzung gemacht, die nicht strenge richtig sein kann²⁾, die Voraussetzung nämlich, daß die zwischen den Molekülen thätigen Kräfte nur im Augenblicke des Stosses wirksam seien, und daß die Dauer dieser Wirkungen so klein sei, daß der Einfluss, den sie auf die Geschwindigkeit der Bewegung haben, vernachlässigt werden dürfe. Ist das nicht der Fall, wird die Geschwindigkeit durch den Stofs für eine gegen die Zeit der freien Bewegung erhebliche Zeit geändert, so muß die Geschwindigkeit u , die wir als mittlere der Moleküle für ein gegebenes Gas und gegebene Temperatur bezeichneten, einigermaßen von der Zahl der Stöße abhängen, somit da die Stofszahl von dem Volumen der gegebenen Gasmenge abhängt, mit dem Volumen des Gases sich etwas ändern.

Anstatt die Änderung der Geschwindigkeit zu berechnen, kann man, wie Van der Waals³⁾ gezeigt hat, den Einfluss der Molekularkräfte durch

¹⁾ Dieser Ausdruck ist zuerst von *Van der Waals* in der schon erwähnten Abhandlung *Over de continuïteit van den Gas- en Vloeïstofftoestand*, Leiden 1873. p. 48 abgeleitet.

²⁾ *Clausius*, Poggend. Ann. Bd. C; neue Folge Bd. IX.

³⁾ *Van der Waals*, a. a. O. p. 54 ff.

ine etwas andere Betrachtung in Rechnung ziehen. Wir erhielten für den Druck des Gases für die Flächeneinheit der Wandfläche

$$p = \frac{R}{(V-b)}.$$

Sind nun zwischen den Gasmolekülen anziehende Kräfte thätig, so muß dadurch die Geschwindigkeit, mit der die Moleküle gegen die Wand liegen und damit der Druck p kleiner werden. Der Effekt ist also derselbe, wie wenn die gegen die Wand fliegenden Moleküle eine gegen das Innere des Gases wirkende Anziehung erhalten, durch welche der Druck p nicht gleich dem berechneten, sondern kleiner, also

$$p = \frac{R}{(V-b)} - \alpha$$

in muß. Jedes auf die Wand drückende Molekül erfährt diese Druckminderung, dieselbe muß also zunächst proportional sein der in einem gegebenen Momente in der Wandschicht vorhandenen Moleküle. Diese ist der Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle, also der Dichtigkeit des Gases proportional. Außerdem muß die auf jedes einzelne Molekül wirkende, gegen das Innere des Gases gerichtete Anziehung, wie wir das bei allen ähnlichen Wirkungen finden, der Anzahl der auf das in der Grenzschrift befindliche wirkenden Moleküle proportional sein.

Denken wir uns nun um ein solches Molekül mit dem größten Abstände, bis auf welchen die Moleküle anziehend auf dasselbe wirken, eine Kugel gelegt, so wird jedes innerhalb der in das Gas fallenden Halbkugel wirkende Molekül auf das betrachtete anziehend wirken. Die Zahl der in dieser Halbkugel liegenden Moleküle ist wieder der Dichtigkeit des Gases proportional, so daß also die Größe α dem Quadrate der Dichtigkeit proportional ist. Da nun bei einer gegebenen Gasmenge die Dichtigkeit dem Volumen umgekehrt proportional ist, können wir schreiben

$$\alpha = \frac{a}{V^2}$$

1

$$p = \frac{R}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

1r auch

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = R.$$

In der Form

$$pV = R - \frac{a}{V} + pb + \frac{ab}{V^2}$$

1nimmt man, daß der Gang der Werte pV wesentlich von dem Verhältnisse a und b abhängig ist, daß, wenn der Wert von a hinreichend groß ist, der Wert von pV mit abnehmendem Volumen zuerst bis zu einem Minimum abnehmen kann und dann erst bei wachsendem Volumen zunimmt.

So lange das Volumen nicht zu klein ist, können wir in dem Gliede $\frac{ab}{V^2}$ den Druck p nach dem Mariotteschen Gesetze durch

$$p = \frac{R}{V}$$

ersetzen, und dann

$$pV = R - \frac{a - bR}{V} + \frac{ab}{V^2}$$

schreiben. In dieser Form erkennt man, daß die aus der Theorie sich ergebende Gleichung mit der empirischen Gleichung zusammenfällt, w. Regnault zur Darstellung seiner Beobachtungen gewählt hat. Die war (§ 98 Ia)

$$pV = 1 - A\left(\frac{1}{V} - 1\right) + B\left(\frac{1}{V} - 1\right)^2$$

$$pV = 1 + A + B - \frac{A + 2B}{V} + \frac{B}{V^2},$$

so daß

$$R = 1 + A + B, \quad a - bR = A + 2B, \quad ab = B.$$

Die Regnaultschen Beobachtungen zeigen somit, daß bis zu einem Drucke von 20 Meter Quecksilber das Verhalten der Gase ganz der entwickelten Theorie entspricht.

An den Messungen von Caillietet und Amagat läßt sich dann probieren, ob auch bei größern Drucken die Volumabnahme der Theorie entspricht. Ich habe zu diesem Zwecke die Versuche Amagats mit Stickstoff gewandelt. Amagat gibt die Produkte pV in Metern Quecksilber und den willkürlichen Volumeinheiten seines Apparates an. Um die Produkte in denselben Einheiten, wie sie Regnault zur Darstellung seiner Versuche zu Grunde gelegt hat, bei denen das Volumen des Gases bei dem Drucke von 1 Meter Quecksilber gleich 1 gesetzt wird, auszudrücken, habe ich zunächst nach den Regnaultschen Angaben (§ 98) das Volumen V für den kleinsten von Amagat angewandten Druck 20,740^m berechnet. Dasselbe ergibt sich zu 0,0477. Dann wurde aus den von Amagat gegebenen Werten für pV und p das demselben beobachtete Volumen berechnet. Das Volumen bei 20,740^m ergab sich so zu 2458 in den Amagatschen Einheiten. Durch Multiplikation mit $\frac{0,0477}{2458}$ wurden dann sämtliche Volumina auf die Regnaultsche Einheit reduciert. Es wurde dann aus den Regnaultschen Konstanten A und B

$$A = 0,000\,690\,1$$

$$B = 0,000\,007\,04$$

die Konstanten a , b , R der Gleichung bestimmt. Dieselben ergaben sich

$$R = 1,000\,697 \quad a = 0,003\,03 \quad b = 0,002\,325.$$

Schließlich wurden aus den Amagatschen Beobachtungen nach der Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = R$$

die Konstanten R berechnet, welche, wenn die Beobachtungen mit der Theorie stimmen, den oben angegebenen Wert von R liefern müssen. Die folgende Tabelle enthält einige Werte zur Vergleichung von Theorie und Beobachtung:

p	$\frac{a}{V^2}$	V	$V - b$	R
20,740	1,331	0,047 7	0,045 37	1,0012
47,176	6,936	0,020 9	0,018 57	1,0049
69,140	14,794	0,014 3	0,011 97	1,0049
96,441	28,105	0,010 38	0,008 06	1,0032
128,296	47,400	0,007 995	0,005 67	0,9963
158,563	68,745	0,006 64	0,004 315	0,9811
221,103	117,760	0,005 07	0,002 570	0,9319

Die bis zu einem Drucke von 128^m berechneten Werte entsprechen der Theorie so genau, es sich erwarten läßt, wenn man erwägt, daß die Konstanten a und b aus den Beobachtungen Regnaults abgeleitet sind, die bis zu einem Drucke von etwas über 20^m gehen. Eine Ableitung der Konstanten der theoretischen Gleichung aus Regnaults und Amagats Beobachtungen würde ohne Zweifel Werte geben, welche eine noch bessere Übereinstimmung zwischen der Beobachtung und der Theorie liefern würden. In beiden letzten Beobachtungen geben schon zu kleine Werte von R , daß wir schließen müssen, daß schon wenn V zwischen zwei und drei b liegt, die Bewegungen der Moleküle unsern Voraussetzungen nicht mehr entsprechen.

Wir werden auf die Vergleichung von Theorie und Beobachtung in der Wärmelehre bei Gelegenheit der Besprechung der von Andrews entdeckten kritischen Temperatur nochmals zurückkommen und dann auch den Einfluß der Temperatur auf die von der Theorie gelieferten Konstanten kennen lernen.

Für die drei andern von Regnault ausführlicher untersuchten Gase ergeben sich aus den § 98 angeführten Konstanten folgende Werte von a und b :

Luft	$a = 0,005\ 01$	$b = 0,003\ 87$
Wasserstoff	$a = 0,002\ 65$	$b = 0,003\ 17$
Kohlensäure	$a = 0,009\ 33$	$b = 0,000\ 78$

Schließlich wollen wir noch hervorheben, daß durch die Bestimmung des Wertes b sich auch in Zahlen das Verhältnis zwischen der mittlern Weglänge und dem Radius der Wirkungssphäre der Moleküle angeben läßt. Die mittlere Weglänge hatten wir

$$l = \frac{V - N \frac{4}{3} \pi r^3}{N \frac{4}{3} \pi r^3} \cdot \varrho = \frac{V - b}{b} \varrho.$$

Bei der Berechnung der Konstanten der Regnaultschen Gleichungen ist damit auch der aus denselben abgeleiteten Werte von a und b ist das Volumen des Gases unter dem Drucke 1 Meter Quecksilber als 1 gesetzt. Die Werte b geben also etwa in Litern den Raum an, den die Wirkungsphären der Moleküle ausfüllen, welche sich unter dem Drucke von 1 Meter Quecksilber in einem Liter befinden. Für diese erhalten wir dann den Koeffizienten von ϱ , indem wir $V = 1$ setzen, also

$$l = \left(\frac{1}{b} - 1 \right) \varrho.$$

Darnach werden für

Stickstoff	$l = 429\ \varrho$	Wasserstoff	$l = 314\ \varrho$
Luft . . .	$l = 259\ \varrho$	Kohlensäure	$l = 1281\ \varrho$

Es bedarf demnach nur noch der Bestimmung der absoluten ¹⁾ von l , um auch die GröÙe der Wirkungssphäre der Moleküle zu berechnen.

§ 103.

Bestimmung der Geschwindigkeit u der Moleküle. Die im vi. Paragraphen erhaltene Gleichung für den Druck, den ein im Volumen V dem Drucke p befindliches Gas auf die Wandungen des Gefäßes ausübt, gestattet uns auch die Geschwindigkeit u der Moleküle zu berechnen¹⁾. Konstante R unserer Gleichung hat darnach die Bedeutung

$$R = \frac{1}{3} Nm u^2,$$

somit wird

$$u = \sqrt{\frac{3R}{Nm}},$$

wofür wir auch, da besonders bei kleinen Drucken R nur sehr wenig von pV abweicht, setzen dürfen

$$u = \sqrt{\frac{3pV}{Nm}}.$$

Hierin bedeutet Nm die Masse des den Raum V unter dem Drucke p ausfüllenden Gases. Drücken wir dieselbe durch das Gewicht des Gases aus, so müssen wir auch den Druck durch Gewicht ausdrücken. Drücken wir uns, um den Wert von u in Metern zu bestimmen, ein Kubikmeter Luft unter dem Druck einer Atmosphäre, so ist p der Druck einer Atmosphäre auf das Quadratmeter 10333 Kilo. Ein Kubikmeter Luft wenn die Temperatur diejenige des schmelzenden Eises ist, 1,293 somit ist

$$Nm = \frac{1,293}{g}$$

$$u = \sqrt{\frac{3 \cdot 10333 \cdot 9,81}{1,293}} = 485 \text{ M.}$$

Die Luftmoleküle bewegen sich somit bei der Temperatur des schmelzenden Eises mit einer Geschwindigkeit von 485^m. Für ein anderes Gas tritt in diesen Ausdruck an Stelle des Gewichtes der Luft dasjenige des betreffenden Gases. Nennen wir das spezifische Gewicht des Gases, bezogen auf Luft, δ , so daß also das Gewicht von 1 Kubikmeter des Gases dem Druck einer Atmosphäre gleich $1,293 \cdot \delta$ ist, so wird der Wert für dieses Gas

$$u = 485 \sqrt{\frac{1}{\delta}}.$$

Die Geschwindigkeit der Gasmoleküle ist also der Quadratwurzel der Dichtigkeit des Gases umgekehrt proportional. In der Wärmelehre werden wir nachweisen, daß bei steigender Temperatur die Dichtigkeit der Gase, und zwar für alle sehr nahe gleichmäßig, abnimmt, so daß wir einer nach der Centesimal-skala genommenen Temperatur das Gewicht 1 Kubikmeter Gas schreiben können

$$\frac{1,293 \cdot \delta}{1 + 0,00367 t}.$$

¹⁾ *Clausius*, Poggend. Ann. Bd. C.

Deshalb wird bei der Temperatur t die Geschwindigkeit

$$u = 485 \sqrt{\frac{1 + 0,00367 t}{\delta}},$$

ein für Luft $\delta = 1$ zu setzen ist.

Für einige Gase werden hiernach die Werte von u für die Temperatur $= 0$ des schmelzenden Eises

Sauerstoff	$\delta = 1,10566$	$u = 461^m$
Stickstoff	$\delta = 0,9713$	$u = 492^m$
Wasserstoff	$\delta = 0,0692$	$u = 1844^m$
Kohlensäure	$\delta = 1,5290$	$u = 392^m$

Hierbei ist jedoch zu beachten, daß die so berechneten Werte von u nicht die arithmetischen Mittel der Geschwindigkeit der Moleküle sind; es sind vielmehr jene Werte der Geschwindigkeit, welche alle Moleküle haben müßten, damit der Druck dem wirklichen gleich ist; u bedeutet also die Quadratwurzel aus dem mittlern Quadrate der Geschwindigkeit, welches letzteres nicht mit dem Quadrate der mittlern Geschwindigkeit zusammenfällt. Um die mittlere Geschwindigkeit zu bestimmen, bedarf es erst einer Untersuchung, wie die verschiedenen Geschwindigkeiten auf die Moleküle verteilt sind, eine Untersuchung, welche Maxwell¹⁾ durchgeführt hat, auf welche wir einzugehen hier zu weit führen würde. Wir begnügen uns mit Angabe des Resultates, daß hiernach die mittlere Geschwindigkeit etwas kleiner ist als der Clausius'sche Wert, und zwar daß

$$u_1 = u \sqrt{\frac{8}{3\pi}}.$$

Bei den Molekülen kommen alle Geschwindigkeiten vor von sehr kleinen bis zu sehr großen; etwa 1,5 Procent der Moleküle hat eine Geschwindigkeit, die weniger als ein Viertel der mittlern, etwa 0,5 Procent eine solche, die mehr als das Doppelte der mittlern beträgt.

§ 104.

Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe. Barometrische Höhenmessungen. Nachdem wir in den letzten Paragraphen die Bedeutung des Mariott'schen Gesetzes für unsere Kenntniss der Natur des Gaszustandes kennen gelernt haben, gehen wir zunächst dazu über, das Mariott'sche Gesetz zur Ableitung einiger aus demselben sich ergebenden Erscheinungen zu benutzen. Wir beginnen mit Ableitung des Gesetzes, nach welchem der Luftdruck abnehmen muß, wenn wir uns in der Atmosphäre emporheben. Da weil die Dichtigkeit der Gase mit dem Druck sich ändert, muß das Gesetz der Druckabnahme bei vertikaler Erhebung in der Atmosphäre ein anderes sein, als wenn wir uns in einer tropfbaren Flüssigkeit emporheben.

Um das Gesetz abzuleiten, nehmen wir an, die Luft habe überall die gleiche Temperatur und sei im Gleichgewicht. Sei dann der durch den

¹⁾ Maxwell, Phil. mag. IV. Series vol. XIX und XXXV. Boltzmann, Wiener Berichte LVIII, LXIII, LXVI, LXXII. Man sehe auch O. E. Meyer: Kinetische Theorie, Breslau 1877. p. 31 ff. und p. 259 ff.

Barometerstand gemessene Luftdruck in irgend einer Höhe h über dem Meeresniveau gleich b , wir suchen denselben in irgend einer andern Höhe.

Steigen wir von der Höhe h um eine so kleine Höhe dh auf, daß die Dichtigkeit der Luft in dieser überall als gleich und zwar gleich derjenigen s setzen dürfen, welche dem Drucke b entspricht, so muß das Barometer um eine solche Höhe db sinken, daß das Gewicht der Quecksilbersäule vom Querschnitt 1 und der Höhe db gleich ist dem Gewichte der Luftsäule von gleichem Querschnitt und der Höhe dh . Ist das spezifische Gewicht des Quecksilbers gleich σ , so muß demnach

$$s dh = - \sigma db,$$

wenn wir rechts das negative Vorzeichen schreiben, um auszudrücken, daß das Barometer um db sinkt. Setzen wir die Dichtigkeit der Luft auf dem Normaldruck $B = 760^{\text{mm}}$ gleich s_0 , so ist

$$s_0 : s = B : b$$

$$s = \frac{s_0 b}{B}$$

und demnach

$$- \frac{db}{b} = \frac{s_0}{\sigma B} dh.$$

Dieser Ausdruck enthält schon das zu suchende Gesetz, denn es ist, daß das Barometer jedesmal um denselben Bruchteil des an der unteren Grenze der Schicht dh vorhandenen Barometerstandes sinkt, wenn wir irgend einer Stelle aus um die Höhe dh emporsteigen; denn für einen denselben Wert dh ist die rechte Seite unserer Gleichung eine konstante GröÙe. An der obern Grenze der Schicht wird der Barometerstand

$$b_1 = b - db = b \left(1 - \frac{s_0}{\sigma B} dh \right),$$

oder der Quotient aus den Barometerständen b_1 und b an Stellen, die Höhendifferenz dh besitzen, ist immer derselbe, wo wir auch die Höhendifferenz nehmen, das heißt, von welcher Höhe h wir auch ausgehen. Daraus folgt, daß wenn wir von irgend einer Höhe h eine Anzahl Mal die Höhendifferenzen dh aufsteigen, die Barometerstände einer geometrischen Reihe angehören. Zunächst sagt obige Gleichung das nur aus, wenn die Differenzen dh verschwindend klein sind, indes was von diesen verschwindend kleinen Höhenunterschieden gilt, das gilt auch von beliebigen Höhen. Steigen wir nämlich um eine so große Anzahl Mal die verschwindend kleine Höhe dh auf, daß $m dh$ einen endlichen Wert hat, so werden die Barometerstände in Orten, die $m dh$, $2m dh$... höher liegen,

$$b_m = b \left(1 - \frac{s_0}{\sigma B} dh \right)^m, \quad b_{2m} = b \left(1 - \frac{s_0}{\sigma B} dh \right)^{2m} \dots$$

Wir gelangen also allgemein zu dem Satze, daß an Orten, deren Höhen in einer arithmetischen Reihe stehen, die Barometerstände eine geometrische Reihe bilden, deren Quotient abhängig ist von der Differenz der arithmetischen Reihe.

Wir gelangen zu demselben Satze, wenn wir direkt aus der Gleichung σdb den Barometerstand in der Höhe H berechnen; sei derselbe b_n , so halten wir ihn, wenn wir die Summen bilden

$$-\int_b^{b_n} \frac{db}{b} = \int_h^H \frac{s_0}{\sigma B} dh.$$

Diese Summen sind nach E VIII, E 2 und E 1

$$-\{\log b_n - \log b\} = \log b - \log b_n = \frac{s_0}{\sigma B} (H - h),$$

in die Logarithmen natürliche sein müssen. Wollen wir briggische Logarithmen nehmen, so müssen wir die rechte Seite mit der zur Veränderung von natürlichen in briggische Logarithmen nötigen Zahl M , gleich dem briggischen Logarithmus der Zahl e , multiplicieren.

Die Gleichung zeigt, daß jedesmal, wenn wir in der Atmosphäre um dieselbe Höhe $H - h$ emporsteigen, die Differenz der Logarithmen der Barometerstände an der untern und obern Grenze dieser Höhe denselben Wert hat, oder daß der Quotient aus den Barometerständen derselbe ist.

Dieses Gesetz gestattet unmittelbar aus den an einer untern und obern Station beobachteten Barometerständen die Höhendifferenz der beiden Orte bestimmen, wir haben nur die Gleichung nach $H - h$ aufzulösen und erhalten

$$H - h = \frac{\sigma B}{s_0 M} (\log b - \log b_n),$$

welcher Gleichung dann nur noch der Koeffizient der rechten Seite auszuwerten ist. In demselben ist B , wenn wir die Höhendifferenz in Metern berechnen wollen, in Metern gleich 0,76 zu setzen, σ die Dichtigkeit des Quecksilbers ist, wie schon früher erwähnt wurde, gleich 13,595 93; die Zahl M ist gleich 0,434 29.

Für s_0 ist die Dichtigkeit der Luft bei dem Barometerstande 0,76 zu setzen. Ist die Temperatur der Luftschicht $H - h$ gleich der Temperatur des schmelzenden Eises, so bedeutet s_0 die Dichtigkeit der Luft unter dem normalen Barometerstande bei dieser Temperatur, ist die Temperatur eine andere, etwa t der Centesimalskala, so müssen wir für s_0 die der Temperatur t und dem normalen Barometerstande entsprechende Dichtigkeit setzen. Wie wir in der Wärmelehre nachweisen werden, ist diese

$$s_0 = \frac{0,001\,292\,673}{1 + 0,003\,67\,t}.$$

Setzen wir diese Werte ein, so wird

$$H - h = 18405 (1 + 0,003\,67\,t) (\log b - \log b_n).$$

Zur genauern Berechnung der Höhendifferenz nach dieser Gleichung sind in derselben noch einige Korrekturen anzubringen.

Zunächst ist der Zahlenkoeffizient etwas anders zu setzen, weil mit zunehmender Höhe die Schwerkraft kleiner wird. Die Abnahme des Luftdruckes ist infolge der Abnahme der Schwerkraft eine kleinere, als wir sie ohne Rücksicht auf diese fanden, und deshalb ist die Höhendifferenz in der

That eine etwas größere, als sie obige Gleichung aus den Barometerständen gibt. Nach den vorliegenden Erfahrungen trägt man diesem Umstande hinreichend Rechnung, wenn man den Zahlenkoeffizienten in 18482 verwandelt.

Ferner, da die Schwerkraft mit der geographischen Breite sich ändert, so ändert sich mit derselben auch die Dichtigkeit der Luft unter dem Drucke von 0,76^m Quecksilber, und zwar ist sie, da der von einer Quecksilbersäule von 0,76^m Höhe ausgeübte Druck der an dem betreffenden Orte vorhandenen Schwerkraft proportional ist, dieser letztern proportional. Da oben für s_0 angegebene Wert gilt für die Breite von 45°. Setzen wir die Größe der Schwerkraft für diese Breite gleich 1, so erhält man für die Dichte der Luft bei dem normalen Barometerstande unter der Breite φ den § 40 mitgeteilten Ausdruck für g^* leicht

$$s_0 = s_{45} (1 - 0,000\,259 \cos 2\varphi),$$

wenn wir jetzt den oben angegebenen Wert mit s_{45} bezeichnen. Daraus folgt, daß wir den Ausdruck für $H - h$ mit diesem Koeffizienten dividieren oder was hinreichend genau ist, mit dem Koeffizienten $(1 + 0,000\,259 \cdot \cos 2\varphi)$ multiplizieren müssen.

Der für s_0 angegebene Wert setzt weiter voraus, daß die Luft getrocknet ist, und in der ganzen Höhe von h bis H dieselbe Temperatur habe. Beides ist nicht der Fall. Feuchte Luft ist leichter als trockene, und da die Feuchtigkeit in der Luft mit steigender Temperatur zunimmt, wird die Dichtigkeit der Luft mit steigender Temperatur etwas kleiner, als sie es nur durch die Ausdehnung würde. Da die Temperatur der Luft bei Höhenmessungen in der Regel höher ist als 0°, so genügt es, zur Berücksichtigung des Einflusses der Luftfeuchtigkeit den Koeffizienten 0,0036 durch den Wert 0,004 zu ersetzen.

Für die Temperatur t müßte man die mittlere Temperatur der Luftschicht $H - h$ einsetzen. Da man indes nicht angeben kann, wie die Temperatur in der Luftschicht verteilt ist, um so weniger, da man wohl niemals zwei genau vertikal über einander befindliche Orte zur Beobachtung hat, so begnügt man sich in Ermangelung eines Bessern die mittlere der an beiden Orten beobachteten Temperaturen t_0 und t_n , also $\frac{1}{2}(t_0 + t_n)$ einzusetzen.

Schließlich ist darauf zu achten, daß die Barometerstände b und b_n nach § 94 auf die Temperatur 0° reduciert werden müssen; ist t die Temperatur des Quecksilbers im Barometer an der untern, t_n an der obern Station, so wird die Gleichung für $H - h$ mit allen diesen Korrekturen¹⁾

$$H - h = 18482(1 + 0,000\,259 \cos 2\varphi) \left(1 + 0,004 \frac{t_0 + t_n}{2}\right) \left(\log \frac{b}{1 + 0,000\,187 t} - \log \frac{b_n}{1 + 0,000\,187 t_n}\right)$$

¹⁾ Ausführlichere Behandlung der Gleichung für barometrische Höhenmessungen gibt *La Place*, *Mécanique céleste* Livre X chap. IV. *Poisson*, *Traité de Mécanique* Tome II, livre IV, chap. 5. Eine gute Zusammenstellung aller barometrischen Höhenmessungen zu beachtenden Umstände gibt *Brandes*, *Gehlers physik. Wörterbuch*, Artikel Höhenmessung, Bd. V, Teil 1. Ferner *Rühlmann*, *Die barometrischen Höhenmessungen*, Leipzig 1870. Man sehe auch *Baeyer*, *Poggend. Ann.* Bd. XCVIII.

derbei liegt nun noch die Voraussetzung zu Grunde, daß die Atmosphäre im Gleichgewicht sei, was nach den Bemerkungen des § 96 nicht der Fall ist. Um die dort erwähnten Variationen des Luftdruckes zu bemessen, muß man entweder den mittlern Barometerstand an beiden Stationen anwenden, oder wenn das, wie es meist der Fall ist, an der obern Station auf der Spitze eines Berges nicht möglich ist, muß man eine Zeit annehmen, in welcher die Atmosphäre möglichst ruhig ist, damit sie möglichst im Zustande des Gleichgewichtes ist, den unsere Rechnung voraussetzt. Man muß dann ferner gleichzeitige Beobachtungen an beiden Stationen anstellen. Da die Änderungen des Luftdruckes meist nicht so lokal sind, daß derselbe in nahe liegenden Orten sehr verschieden ist, so kann man ziemlich sicher sein, korrespondierende Barometerstände zu erhalten.

Unsere Formel ergibt dann die Höhe der zweiten Station mit dem Barometerstande b_2 über der ersten bis auf einige Meter genau.

Wenn man die Höhe eines Ortes über der Meeresfläche und zugleich den Barometerstand b an demselben, so kann man mit Hilfe dieser Formel den Barometerstand B erhalten, welcher in dem Niveau des Meeres unter der Höhe und Länge des Ortes stattfinden würde. Auf diese Weise werden die an den verschiedenen Orten beobachteten mittlern Barometerstände auf das Niveau des Meeres reducirt.

§ 105.

Anwendung des Mariotteschen Gesetzes auf Manometer. Die Manometer, welche wir bisher kennen gelernt haben, beruhen auf dem Mariotteschen Grundgesetze, daß in kommunizierenden Röhren

nur dann Gleichgewicht ist, wenn der Druck auf der Querschnittsfläche der beiden Flüssigkeiten von beiden Seiten gleich groß ist. Bei diesen wird also der Druck gemessen, die Expansivkraft desselben, durch eine Flüssigkeit gemessen, welche in der einen der beiden kommunizierenden Röhren über dem Niveau der Flüssigkeit in der andern erhoben ist. Bei hohen Drucken müssen diese Röhren eine bedeutende Länge haben, wie z. B. die von Laplace und Dulong oder Regnault eine Länge von 36^m haben. Man hat deshalb auf das Mariottesche Gesetz eine andere Art von Manometern gegründet, welche den Druck eines Gases durch die Kompression eines abgemessenen Luftvolumen bestimmen. Da die Luft fast dem Mariotteschen Gesetze folgt, so erhalten wir durch die Anwendung des Gesetzes nur wenig von der Wahrheit abweichende Resultate.

Die gewöhnlichste Form der Manometer ist die folgende. Ein geschlossenes mit trockner Luft gefüllte Glasröhrchen (Fig. 159) taucht in ein Gefäß, welches zum Teil mit Wasser über gefüllt ist. Das Gefäß steht in einem festen Gehäuse von Eisen, durch dessen Deckel die geschlossene Glasröhre luftdicht hindurchgeführt ist. Die Röhre ist in dem Deckel fest eingespannt und der Deckel luftdicht und fest auf den Cylinder aufgeschraubt,

Fig. 159.



Durch eine mit einem Hahn verschließbare Röhre kann das Gefäß mit Raume in Verbindung gesetzt werden, in welchem das Gas eingeschlo ist, dessen Druck gemessen werden soll.

Bei dem äußern Druck der Atmosphäre steht das Quecksilber in Röhre und dem Gefäße gleich hoch; tritt durch den Hahn das zusammengedrückte Gas in das Gefäß und drückt auf die äußere Quecksilberfl so dringt das Quecksilber in die verschlossene Röhre ein und das Volu des abgesperrten Gases gibt die Größe des Druckes an.

Man graduirt den Apparat auf folgende Weise.

Ist der Radius der Röhre gleich r und ihre Länge gleich h , so ist dem anfänglichen Drucke von 760^{mm} das Volumen des abgesperrten Gas

$$v = r^2 \pi \cdot h.$$

Wenn nun der äußere Druck bis zu $n \cdot 760^{\text{mm}}$ wächst, so steigt Quecksilber um x in der Röhre in die Höhe und der dann von der eingenommene Raum ist

$$v' = r^2 \pi (h - x).$$

Während das Quecksilber in der Röhre um x steigt, sinkt es in Gefäße um y . Nennen wir den Radius des ebenfalls als cylindrisch v gesetzten Gefäßes R , so haben wir

$$\pi r^2 x = \pi R^2 y,$$

da das in der Röhre aufgestiegene Quecksilber vorhin in dem Gefäße Raum $\pi R^2 y$ einnahm.

Die Spannung oder der Druck der eingeschlossenen Luft auf die Fläche des Quecksilbers ist gleich dem äußern Drucke $n \cdot 760^{\text{mm}}$, je vermindert um die Höhe der gehobenen Quecksilbersäule, also

$$p' = n \cdot 760 - x - y$$

$$p' = n \cdot 760 - x \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right).$$

Und da die Volumina v und v' sich verhalten umgekehrt wie Drucke, so haben wir

$$\pi r^2 h : \pi r^2 (h - x) = n \cdot 760 - x \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) : 760,$$

und setzen wir

$$\frac{1}{760} \left(1 + \frac{r^2}{R^2} \right) = k,$$

so ist

$$h : h - x = n - kx : 1$$

$$\frac{h}{h - x} = n - kx.$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst gibt

$$x = \frac{1}{2k} \left\{ n + kh \pm \sqrt{(n + kh)^2 - 4kh(n - 1)} \right\},$$

wo wir zur Berechnung von x dem Wurzel Ausdruck das negative Vorzei geben müssen.

enn für $n = 1$ ist $x = 0$, unser Ausdruck gibt

$$x = \frac{1}{2k} \left\{ 1 + kh \pm \sqrt{(1 + kh)^2} \right\},$$

nehmen wir den Wurzelausdruck negativ

$$x = 0.$$

ur Graduierung eines solchen Manometers bedarf es also nur einer Messung der Radien r und R ; daraus wird die GröÙe k und mit dann x berechnet für $n = 1, 2, 3 \dots$. Die so gefundenen Höhen x , von dem Niveau des Quecksilbers im GefäÙe aus, neben der Röhre tragen und mit $1, 2, 3 \dots$ bezeichnet. Die Quecksilberstände geben unmittelbar die GröÙe des Druckes in Atmosphären an.

ist die Röhre sehr enge, das GefäÙ, in welches sie taucht, aber sehr groß, so kann man die Niveauänderung im GefäÙe vernachlässigen. In dieser Formel ist dann $R = \infty$, $\frac{r^2}{R^2} = 0$, $k = \frac{1}{760}$, und wir erhalten

$$x = \frac{760}{2} \left\{ n + \frac{h}{760} - \sqrt{\left(n + \frac{h}{760} \right)^2 - 4 \frac{h}{760} (n - 1)} \right\}.$$

ft gibt man diesen Manometern eine U-förmige Gestalt (Fig. 160). Der obere Arm erhält den Druck, der gemessen werden soll, und der untere Arm enthält in dem Raume NA über dem Quecksilber trockne Luft. Unter dem Drucke der Atmosphäre steht das Quecksilber in beiden Röhren gleich hoch. Steigt der Druck auf $n \cdot 760^{\text{mm}}$, so sinkt das Quecksilber in dem linken Schenkel bis N' und steigt in dem geschlossenen rechten Arm um ebensoviel bis N'' . Um den Apparat zu graduieren, dient unsere obige Formel, indem wir x und somit

$$k = \frac{2}{760}$$

wodurch wir erhalten

$$x = \frac{760}{2} \left\{ n + \frac{2h}{760} - \sqrt{\left(n + \frac{2h}{760} \right)^2 - 8 \frac{h}{760} (n - 1)} \right\}.$$

Es ist übrigens zu bemerken, daß bei dieser Art der Graduierung vorausgesetzt wird, daß die Röhren cylindrisch sind, also r überall denselben Wert

Es wird das nur selten mit aller Strenge sein, und deshalb ist es im allgemeinen besser, die Röhren durch Versuch zu graduieren. Man bringt sie dann mit einem Quecksilbermanometer in Verbindung, wie es zum Beweise des Mariotteschen Gesetzes geschehen wurde, und vergleicht die Volumina der abgesperrten Luft mit diesen Drucken.

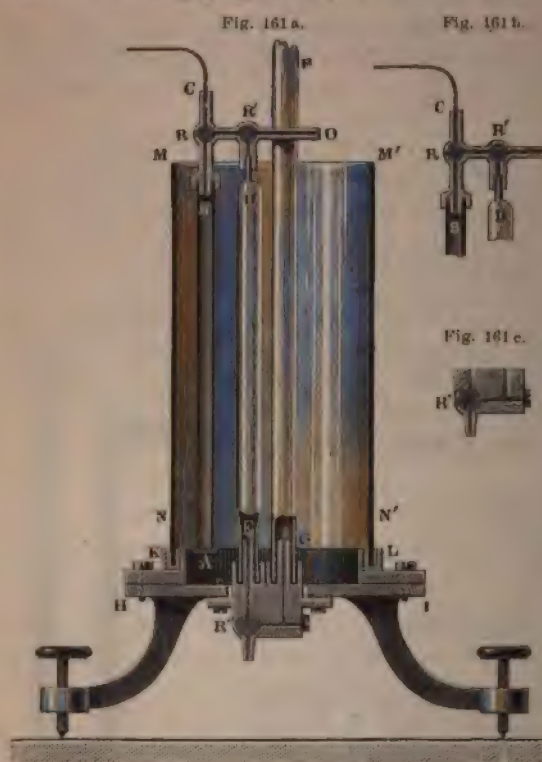
um den Druck zu messen, welchen ein Gas in einem abgeschlossenen Reservoir ausübt, hat Regnault¹⁾ vor kurzem

Fig. 160.



¹⁾ *Regnault, Mémoires de l'Acad. T. XXVI. p. 580. Poggend. Ann. Bd. CXLIII. 1848, Physik I. 4. Aufl.*

ein Manometer angegeben, welches bis zu Drucken von etwa 30 Atmosphären die Bequemlichkeit der zuletzt beschriebenen Manometer mit der Genauigkeit des einfachen Quecksilbermanometers verbindet. Die Einwirkung dieses Manometers zeigt Fig. 161a. Es besteht aus einem dicken Messingrohr AB , welches durch den T-förmig durchbohrten Hahn R die Röhrenleitung C mit dem Reservoir in Verbindung gesetzt werden welches das komprimierte Gas enthält. Neben der Röhre AB befindet sich das aus den kommunizierenden Röhren DE und FG bestehende Quecksilbermanometer. Diese beiden Röhren kommunizieren durch einem in der Bodenplatte des Apparates eingesetzten Eisenstücke, welches ebenfalls T-förmig durchbohrten Hahn R' , welcher bei umgedrehter Stellung (Fig. 161c) den innern Raum des Rohres DE mit



untern Ausflussschloß in Verbindung setzt. Die beiden Röhren DE und FG sind möglichst zylindrisch und bei einer Millimeter versehen. Das obere ausgezogene Rohr in den vertikal abwärts den Teil des in der Hahne R kommunizierenden Rohres RO kittet. Unmittelbar der Röhre CD befindet sich der rechtwinklig durchbohrte Hahn R' , durch den das Innere des Rohres ED entweder mit der äußern Luft in Verbindung gesetzt (Fig. 161b) oder durch Drehen um 90° (Fig. 161c) mit der Hahne R in Kommunikation gebracht werden kann. Die Drücke sind von einem in der Fassung der Bodenplatte eingekitteten Glas

der MM umgeben, welcher mit Wasser gefüllt wird, um den Druck während des Gebrauches auf konstanter Temperatur zu halten.

Zum Gebrauche des Apparates wird zunächst das Rohr AB mit Gas gefüllten Reservoir in Verbindung gesetzt, durch Stellung des Hahnes R wie in Fig. 161a und dann durch Einfüllen von Quecksilber durch das Rohr FG das Rohr ED soweit mit Quecksilber gefüllt, bis aus der Öffnung O hervortritt. Darauf wird der Hahn R in die Stellung Fig. 161b gedreht und dann der Hahn R' langsam so gestellt, daß der innere Raum von AB mit der Röhre DE in Verbindung steht (Fig.

Die in AB komprimierte Luft tritt dann zum Teil in DE über. Man stellt gleichzeitig den untern Hahn R'' so, daß sowohl aus der Röhre DE als aus GF das Quecksilber ausfließen kann, und läßt so lange unten Quecksilber ausfließen, bis in den beiden letzteren Röhren die Quecksilberniveaus eine bequem zu messende Höhendifferenz h zeigen.

Der gesuchte Druck x der in dem Reservoir vorhandenen Luft ergibt sich folgendermaßen. Durch die Verbindung des Rohres AB mit dem betreffenden Reservoir hat sich das Volumen V dieses Rohres mit Gas unter dem Drucke x gefüllt. Nach Herstellung der Verbindung der beiden Röhren AB und DE hat sich dann dieses Gasvolumen ausgedehnt, und zwar, wenn wir mit W das Volumen im Rohre DE bezeichnen, welches nach Herstellung der Niveaudifferenz h von dem Gase mit angefüllt ist, auf das Volumen $V + W$. Ist H der Barometerstand zur Zeit, als das Volumen $V + W$ hergestellt war, so steht dieses Gas jetzt unter dem Drucke $H + h$. Nach dem Mariotteschen Gesetze ist deshalb

$$x \cdot V = (V + W) (H + h),$$

$$x = \frac{V + W}{V} (H + h).$$

Zur Bestimmung von x ist deshalb außer der Kenntnis von H und h noch jene der Volumina V und W erforderlich. Zur Bestimmung von W füllt man zunächst ED wieder mit Quecksilber vollständig, bis es also bei O auszufließen beginnt, stellt dann den Hahn R' in die Stellung Fig. 161b und den Hahn R so, daß der Raum von ED durch die beiden Hähne R' und R und die Röhre C , welche jetzt in die freie Luft mündet, mit der äußern Luft kommuniziert. Man stellt dann den Hahn R'' in die Stellung Fig. 161c und läßt aus dem Rohre RD das Quecksilber ausfließen. Das ausgeflossene Quecksilber sammelt man in eine Flasche und wägt dasselbe. Man bestimmt so direkt durch das Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers den Rauminhalt der Röhre bis zu den verschiedenen Teilstrichen, und hat dann zur Bestimmung des Volumens W jedesmal nur nötig den Teilstrich zu beobachten, bis zu welchem das Quecksilber in der Röhre ED herabgedrückt ist.

Um schließlich V zu bestimmen wird AB mit Luft unter dem Druck der Atmosphäre gefüllt und das Manometer gerade wie zur Bestimmung des Druckes x hergerichtet. Verfährt man nun gerade so wie zur Untersuchung des Druckes x , so wird auch jetzt Luft in DE übertreten, wenn man aus R'' Quecksilber austreten läßt, es wird aber in GF das Quecksilber jetzt rascher sinken als in DE . Ist in DE ein Volumen W' eingetreten, und in GF das Quecksilber um h' tiefer gesunken, so ist jetzt, wenn wieder H die Höhe des Barometers ist,

$$H \cdot V = (V + W') (H - h')$$

$$V = W' \frac{H - h'}{h'}.$$

Indem man so die Luft aus AB bis zu verschiedenen Volumina $V + W'$ sich ausdehnen läßt, erhält man eine Reihe von Werten V , die sich gegenseitig kontrollieren.

Weitere Werte von V kann man erhalten, indem man zunächst das Rohr AB und das Rohr DE bis zu einem Volumen v' mit Luft füllt, und dann durch Einfüllen von Quecksilber in GF diese Luft komprimiert. Hat man sie so weit komprimiert, daß in DE noch ein Volumen W_1 mit Luft gefüllt ist, und steht infolge dessen das Quecksilber in FG um h_1 höher, so ist

$$(V + v')H = (V + W_1)(H + h_1)$$

$$V = \frac{v'H - W_1(H + h_1)}{h_1}.$$

Regnault gab bei seinem Manometer den Röhren AB und DE die Länge von 1 Meter und ersterer einen Durchmesser von 5^{mm} , letzterer von 20^{mm} , so daß also der Querschnitt des letztern Rohres 16 mal so groß war als der von AB . Wurde also AB mit Gas unter einem Drucke von 32 Atmosphären gefüllt, so konnte man $V + W$ leicht so herstellen, daß es gleich $16 V$ war, es wurde dann die Niveaudifferenz h gleich dem Barometerstande.

Man sieht leicht, wie man durch Verkleinerung von V und Vergrößerung von W auch stärkere Drucke mit nicht größeren Niveaudifferenzen messen kann; es ist dann nur auf die Bestimmung von V und W die größte Sorgfalt zu verwenden, da je kleiner V ist, ein kleiner bei der Bestimmung dieses Volumens begangener Fehler von sehr großem Einfluß ist.

Zur Messung sehr großer Drucke ist das § 64 beschriebene Manometer von Desgoffe wohl das genaueste.

§ 106.

Volumenometer. Eine andere Anwendung des Mariotteschen Gesetzes ist die Messung der Volumina von Körpern und so die Bestimmung ihrer Dichtigkeit, ohne einer Wägung in Wasser zu bedürfen. Der erste Apparat der Art wurde von Say¹⁾ unter dem Namen Stereometer und etwas später von Leslie²⁾ beschrieben. Regnault³⁾ gab demselben folgende Form (Fig. 162 und 163). Eine Glaskugel A von 300 Kubikcentimeter Rauminhalt ist mittels einer Metallfassung auf ihrem Hals durch vier Schrauben und Zwischenlegung von eingefettetem Leder luftdicht mit dem manometrischen Apparat $abcd$ verbunden. Das Manometer besteht aus zwei 14^{mm} weiten Glasröhren b und c , welche in ein eisernes mit einem T-förmig durchbohrten Hahn r versehenes Röhrenstück eingekittet sind. Fig. 164 und 165 zeigen einen Durchschnitt des Röhrenstückes mit zwei verschiedenen Stellungen des Hahnes. In Fig. 164 kommunizieren die beiden Manometerröhren mit einander, in Fig. 165 b mit der äußern Luft, c ist geschlossen. In einer andern Stellung würde c ohne b und in einer vierten beide mit der äußern Luft in Verbindung stehen. Die Röhre cd ist gerade und oben offen; die Röhre b , welche oben mit der Kugel durch das ange-

¹⁾ Say, Annales de chimie par Guyton, Lavoisier etc. T. XXIII. 1797. Auch Gilbert, Annalen. Band II.

²⁾ Leslie, Ann. of Philosoph. No. LXIV.

³⁾ Regnault, Ann. de chim. et de phys. III. Sér. T. XIV. Auch Poggend., Bd. LXVI.

der aA in Verbindung steht, hat nahe unter der Krümmung a eine Kugel B und zwei Marken mn und pq , die eine über, die andere unter B . Nach einem Hahn s kann man auch die Röhre ab oben mit der freien Luft in Verbindung setzen.

Man muß das Volumen der einzelnen Teile der Röhre ab , von da wo sie in die Kugel A tritt bis zur Marke mn , und des zwischen den Marken enthaltenen Teiles genau kennen, ebenso das Volumen der Kugel A . Um den zwischen den Marken enthaltenen Raum zu erhalten, schließt man den Hahn s , stellt r so, daß ab und cd kommunizieren (Fig. 164) und füllt in cd Quecksilber ein, bis es an mn steht. Darauf dreht man den Hahn r in die Stellung (Fig. 165) und läßt soviel Quecksilber in ein vorgestelltes Gefäß abfließen, daß die Quecksilbersäule in ab gerade pq steht.

Fig. 162.



Fig. 163.

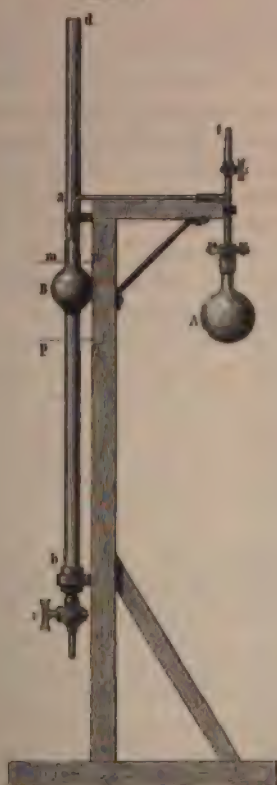


Fig. 164.

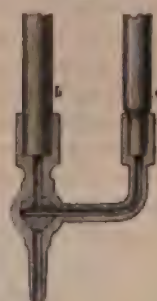
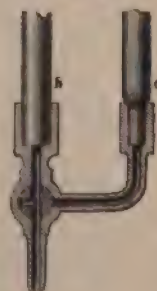


Fig. 165.



Man schließt den Hahn, so daß die Röhren nicht mehr mit der äußern Luft in Verbindung stehen und erhält aus dem Gewicht des ausgeflossenen Quecksilbers das zwischen pq und mn enthaltene Volumen. Dies Volumen v . Die beiden andern Volumina, das der Kugel und der Verbindungsröhre, bestimmt man zusammen, da man nur die Summe der Volumina zu kennen braucht. Diese sei V . Man füllt dazu bei geöffnetem Hahn s und

bei Stellung des Hahnes r wie in Fig. 164, beide Röhren bis zur Marke pq . Darauf schließt man s , und füllt in cd soviel Quecksilber nach, bis das Quecksilber in ab bis mn steht. Das Quecksilber steht dann in cd um eine Länge h , die man mit dem Kathetometer mißt, höher als in ab . Die Luft in der Röhre ab über dem Quecksilber und in der Kugel A ist nun komprimiert durch die Quecksilbersäule h . Unter dem atmosphärischen Druck bei geöffnetem Hahn s füllte sie den Raum $V + v$ aus; unter dem verstärkten Drucke nur mehr den Raum V . Nennen wir den Barometerstand H , so haben wir nach dem Mariotteschen Gesetze

$$V + v : V = H + h : H$$

$$V(H + h) = (V + v)H$$

$$V = v \cdot \frac{H}{h}.$$

Somit kennt man den Rauminhalt der einzelnen Teile des Apparates, dessen man bedarf, um das Volumen x eines Körpers zu bestimmen.

Man legt den Körper, dessen Volumen x gefunden werden soll, in die Kugel. Derselbe verdrängt dadurch eine ihm an Volumen gleiche Luftmenge. Wenn man nun bei geöffnetem Hahn s wieder Quecksilber bis zur Marke pq einfüllt und dann den Hahn s schließt, so ist jetzt das Volumen der abgesperrten Luft nicht mehr $V + v$, sondern $V + v - x$. Füllt man dann in cd wieder Quecksilber nach, bis es in ab bei mn steht, so wird jetzt das Volumen $V + v - x$ auf das Volumen $V - x$ komprimiert und man beobachtet in cd eine Quecksilbersäule h' , welche diese Kompression bewirkt. Nennen wir wieder H den Barometerstand, so ist

$$V + v - x : V - x = H + h' : H$$

$$H(V + v - x) = (H + h')(V - x)$$

$$x = \frac{Vh' - vH}{h'}.$$

Eine zweite Bestimmung von x erhält man auf dem umgekehrten Wege. Man füllt bei geöffnetem Hahn s soviel Quecksilber in das Manometer, daß es in ab bis zur Marke mn steht. Bei geschlossenem Hahn ist dann das Luftvolumen $V - x$ abgesperrt. Darauf stellt man den Hahn r so, daß beide Röhren mit einander und mit der äußern Luft in Verbindung stehen und läßt soviel Quecksilber abfließen, daß es in ab bis zur Marke pq steht. Das Luftvolumen $V - x$ hat sich dann auf das Volumen $V + v - x$ ausgedehnt, und zugleich beobachtet man, daß das Quecksilber in der Röhre cd um eine Strecke h'' tiefer steht als in ab . Nach dem Mariotteschen Gesetze ist dann wieder

$$V + v - x : V - x = H : H - h''$$

$$H(V - x) = (H - h'')(V + v - x)$$

$$x = V - \frac{v(H - h'')}{h''}.$$

man combinirt man beide Methoden, so kann man sogar die Beobachtung des Volumenometers unterlassen. Die erste Gleichung für x gibt

$$H = \frac{(V - x)h'}{v},$$

die

$$H = \frac{(V - x)h''}{v} + h'' = \frac{(V + v - x)h''}{v},$$

beiden

$$\frac{V + v - x}{V - x} = \frac{h'}{h''}$$

$$x = V - v \cdot \frac{h'}{h' - h''}.$$

Kopp¹⁾ hat schon früher ein anderes Volumenometer konstruirt, welches Regnaultschen den Vorzug der größern Einfachheit hat, so daß es sich leicht selbst herstellen kann, Fig. 166 stellt dasselbe dar. In dem mit Quecksilber gefüllten Cylinder K bewegt sich ein quecksilberdicht schließender Kolben mit schwacher Reibung.

Der Cylinder ist unten mit einer Korkschraube abgeschlossen, und ein gekrümmtes Rohr führt ihn mit einem unten und oben gegen den Cylinder ii kommunizierenden. Der letztere Cylinder ist von zwei durchbohrt cd und q .

Die Röhre cd ist gerade, an ihren beiden Enden, und gegen eine willkürliche Theilung des Cylinders einen Nullpunkt etwas über dem Cylinder ii , gekrümmt, wie die Figur zeigt durch den Boden in ein cylindrisches Gefäß r ein. Von dem Deckel des Cylinders ii gehen mehrere Platinspitzen von verschiedener Größe a, b in den Cylinder hinab. Das Gefäß r kann ein anderes Gefäß sein, welches den zu untersuchenden Gas enthält. Eine Scheibe m von mattgegrünem Glase wird durch die Schraube t in zwischengelegten elastischen Körper n abgeschliffenen obern Rand des Cylinders ii gelegt und verschließt ihn luftdicht. Die Röhren K und ii sind bis zu einer gewissen Höhe mit Quecksilber gefüllt.

Man zieht zunächst den Kolben in K herauf, daß die Luft frei durch cd in den Cylinder ii kommen kann. Sei bei dem Barometerstande H das Volumen der Luft in ii , q und r abgesperrt ist, wenn das Quecksilber gerade bei c der Röhre cd verschließt, gleich V .

Man zieht nun den Kolben herab, so steigt das Quecksilber in ii , und man kann es leicht dahin bringen, daß es gerade die Spitze a berührt.

Fig. 166.



Dabei wird das Quecksilber in der Röhre cd um eine Höhe h steigen, die Höhe h misst jetzt den Druck, unter welchem die komprimierte Luft steht. Diese Höhe wird bei verschiedenem Barometerstand verschieden, da mit H die Dichtigkeit der anfänglich abgesperrten Luft sich ändert.

Sei V' das Volumen der abgesperrten Luft, wenn das Quecksilber steht, so haben wir

$$\begin{aligned} V : V' &= H + h : H \\ V : V - V' &= H + h : h \\ V - V' &= \frac{h}{H + h} \cdot V. \end{aligned}$$

Um nun das Volumen V zu bestimmen, bedarf es noch einer zweiten Beobachtung; man legt dazu in das Gefäß r einen Körper von bekanntem Volumen v , und verfährt gerade wie vorhin. Man erhält dann das Volumen auf folgende Weise. Das Volumen der anfänglich abgesperrten Luft ist $V - v$, beim Hinaufdrücken des Quecksilbers bis a ist es $V' - v$; in der Röhre cd ist das Quecksilber dann bis zu einer Höhe h' gestiegen. Man erhält demnach

$$V - v : V' - v = H + h' : H,$$

und wenn wir wieder gerade wie vorhin verfahren

$$V - v : V - V' = H + h' : h',$$

und setzen wir für $V - V'$ den soeben erhaltenen Ausdruck ein, bringen die passenden Transformationen an:

$$V = \frac{h'}{H} \cdot \frac{H + h}{h' - h} \cdot v.$$

Ist V so ein für allemal bestimmt, so erhält man aus einem vorigen ganz gleichen Versuch das Volumen x eines zu untersuchenden Körpers. Man legt den Körper in den Cylinder r , und komprimiert die Luft, bis das Quecksilber die Spitze a berührt. In der Röhre cd steigt das Quecksilber bis zu einer Höhe h'' , und es ist

$$V = \frac{h''}{H} \cdot \frac{H + h}{h'' - h} \cdot x,$$

und daraus, wenn wir die Gleichung nach x auflösen,

$$x = \frac{H}{h''} \cdot \frac{h'' - h}{H + h} \cdot V.$$

Der Apparat ist mit mehreren Platinspitzen versehen, um zu mehreren Werten für x erhalten zu können, welche sich gegenseitig kontrollieren, und aus denen man das Mittel nimmt, wenn die einzelnen Versuche kleine Abweichungen zeigen.

Man kann diese Apparate sehr gut anwenden, um das spezifische Gewicht von Körpern zu bestimmen, bei denen man die gewöhnliche Methode des Eintauchens in eine Flüssigkeit nicht anwenden kann. Man bestimmt das Gewicht des Körpers in Gramm und das Volumen mittels des Apparates in Kubikcentimetern. Der Quotient beider gibt das spezifische Gewicht.

man sich von der Genauigkeit der Methode zu überzeugen, bestimmte zunächst das spezifische Gewicht von Blei, Zinn und einigen Salzen, nmt, wie folgende Zahlen zeigen, sehr genau mit den von andern Chemikern gefundenen spezifischen Gewichten dieser Substanzen überein.

Es ist das spezifische Gewicht von

Wasser	nach Kopp	11,404,	nach gewöhnlicher Methode	11,373
Zinn	" "	7,363,	" "	7,358
Wollastin	" "	1,50,	" Wollaston	1,45.

Für eine Reihe anderer Substanzen hat Kopp dann folgende Zahlen erhalten:

Substanzen	Sp. Gew.	Substanzen	Sp. Gew.
Wasser (gepulvert) . . .	2,15	Korkrinde	0,33
Wasser von Buchenholz . .	2,85	Faser von Lindenholz . .	1,13
Wasser (weiss. gepulvert) .	1,58	" " Tannenholz . .	1,16
Wasser salz (gepulvert) . .	2,15	" " Nufsbaumholz . .	1,17
Wasser mehl	1,49	" " Apfelbaum . .	1,20
Wasser mehl	1,56	" " Zwetschenbaum . .	1,22
Wasser faser	1,45	" " Birnbaum . .	1,23
Wasser (Coconfaden) . . .	1,56	" " Eichenholz . .	1,27
Wasser wolle	1,27	" " Buchenholz . .	1,29
Wasser wolle (verarbeitet) .	1,29		

§ 107.

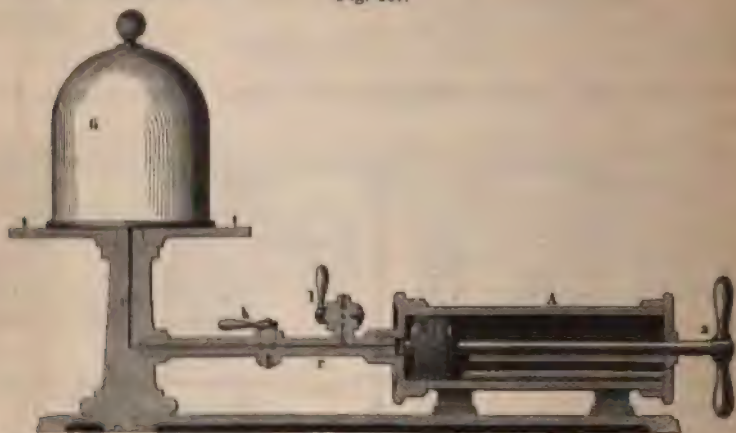
Die Luftpumpe. Auf der zweiten Fundamentealeigenschaft der Gase, zu streben, jeden ihnen dargebotenen Raum auszufüllen, beruht einer der wichtigsten Apparate, die Luftpumpe, durch welche hergestellt ist, aus einem Raume die Luft herauszuschaffen.

Der einfachste Apparat dieser Art ist die Hahnluftpumpe, wie sie der berühmte Physiker Otto von Guericke, Bürgermeister von Magdeburg, konstruierte. (*Experimenta nova Magdeburgica de spatio vacuo*. Amstellod. fol.). In einem hohlen, gut gearbeiteten Cylinder *A* kann ein luftdicht schließender Kolben *k* hin und hergeführt werden. Der Boden des Cylinders ist durchbohrt und eine Röhre *rr*, welche in der Mitte eines Cylinders mündet, setzt den durch die Glocke *G* umgebenen Raum mit dem Raume des Cylinders in Verbindung.

In der Röhre *rr* sind überdies zwei einfach quer durchbohrte Hähne *h* und *l*. Wenn man die beiden Hähne so stellt, daß der Raum des Cylinders weder mit der Glocke *G*, noch mit der äußeren Luft in Verbindung steht, und nun den Kolben gegen *a* hin bewegt, so verdrängt er im Cylinder ein luftverdünntes Gas, da sich die vorher in einem Teile des Cylinders befindliche Luft jetzt in dem ganzen Cylinder verteilt. Dreht man den Hahn *h*, so wie die Zeichnung es zeigt, so steht die Glocke mit dem Cylinder *A* in Verbindung, so strömt die Luft aus der Glocke durch die Röhre *rr* in den luftverdünnten Raum.

Raum des Cylinders, und die Luft unter der Glocke ist dünner wie vorher. Schließt man dann durch *h* die Glocke wieder vom Cylinder ab, so kann man durch Zurückschieben des Kolbens bei geöffnetem Hahn *l* die Luft aus dem Cylinder herausdrücken. Durch mehrfache Wiederholung dieser Operationen kann man dann allmählich die Luft unter der Glocke bis auf einen gewissen Grad verdünnen.

Fig. 167.



Diese Luftpumpe ist nun zwar die einfachste, aber auch die unbequemste, da man bei jeder Verdünnung drei Operationen vornehmen muß, das Herausziehen und Hineinschieben des Kolbens und die Stellung zweier Hähne. Die nächste Verbesserung, welche an den Maschinen angebracht wurde, war die, daß man statt zweier Hähne nur einen doppelt durchbohrten Hahn (Fig. 168) anwandte. Die eine Durchbohrung geht wie bei den einfachen Hähnen quer durch denselben, und verbindet in der entsprechenden Stellung die Glocke mit dem Cylinder. Die zweite bildet einen rechtwinkelig gekrümmten Kanal *ab*, sie setzt das Innere des Cylinders mit der äußern Luft in Verbindung, sie dient also dazu, die Luft beim Zurückführen des Kolbens aus dem Cylinder zu entlassen.

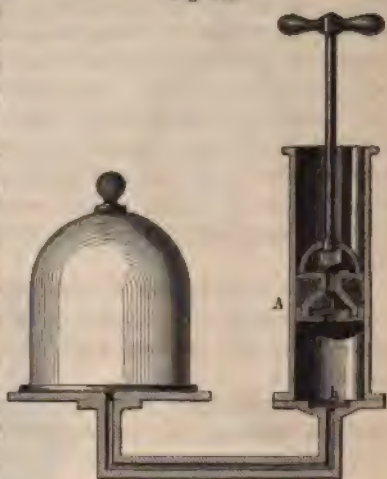
Fig. 168.



Um der Stellung der Hähne ganz überhoben zu sein, hat man später dieselben durch Ventile ersetzt (Fig. 169). Der in dem Cylinder *A* bewegliche Kolben *K* ist durch ein centrales Loch durchbohrt, welches durch eine von unten nach oben sich öffnende Klappe verschlossen werden kann. Eine ähnliche Klappe ist am Boden des Cylinders vorhanden, die ebenfalls von unten nach oben sich öffnet. Wenn man nun den Kolben *K* in die Höhe zieht, schließt sich das Kolbenventil *l*; durch den stärkeren Druck der Luft in der Glocke öffnet sich dann aber das Ventil *h* und die Luft dringt aus der Glocke in den Cylinder. Wird der Kolben hinabgedrückt, so schließt sich das Ventil *h*, da dann die in *K* enthaltene Luft, welche sich vorher mit der Luft der Glocke ins Gleichgewicht gesetzt hatte, stärker von oben nach unten drückt. Bald öffnet sich das Ventil *l* des Kolbens und die im Cylinder *A* enthaltene Luft strömt durch die Kolbenöffnung aus, bis der Kolben wieder auf dem Boden des Cylinders ansteht.

Indes würde bei dieser einfachsten Ventilluftpumpe die Verdünnung der Luft unter der Glocke bald ihre Grenze erreichen, da die Luft nur dann aus der Glocke in den Cylinder *K* strömen kann, wenn sie das Ventil *h* hebt. Die Luft wird also aufhören, in den Cylinder einzuströmen, sobald der Druck der Luft in der Glocke so klein geworden ist, daß er nicht mehr imstande ist, das Ventil zu heben. Deshalb hat man an der Maschine weitere Veränderungen angebracht, und bewirkt, daß der aufsteigende Kolben das Ventil *h* öffnet, der niedergehende es schließt.

Fig. 169.



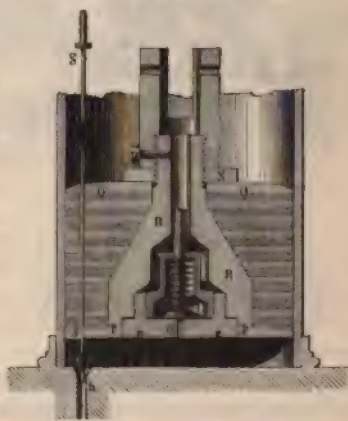
Der Kolben, wie er an den verschiedenen Maschinen angewandt wird, ist folgende Einrichtung (Fig. 170).

Der Kolben enthält im Innern einen metallischen Kern, der aus einer dicken nach unten sich erweiternden Röhre *RR* besteht. Um diese Röhre und auf der Platte *PP* sind Lederscheiben gelegt, welche vollständig mit Öl getränkt sind. Diese Lederscheiben sind durch die Deckplatte *QQ*, welche mit der Schraube *S* gegen gedrückt wird, zusammengepresst. Die Umfänge dieser Lederscheiben sind so begrenzt, daß dieselben einen Cylinder bilden, der ganz genau in den Cylinder der Pumpe hineinpaßt und nur mit schwacher Reibung darin auf und ab bewegt werden kann.

Cylinder bilden, der ganz genau und nur mit schwacher Reibung

Es ist nicht schwierig, den Kolben einzupassen, denn jedesmal, wenn man die Schraube *S* anzieht, wird der Durchmesser des Kolbens größer, da dann die zusammengepressten Scheiben nach der Seite sich ausdehnen. Man kann auf diese Weise den Kolben ganz genau luftdicht einpassen, ohne daß die Reibung zu stark zu machen, und so den Gang der Pumpe zu erschweren.

Fig. 170.



Im Innern der Röhre *R* befindet sich das Ventil *L*. Dasselbe ist eine kleine scheibförmige Platte, welche abgeschliffen ist, und die Öffnung *O* in der Bodenplatte vollständig bedeckt. Sie wird durch eine Feder, welche an einem kleinen in

der weitem Stelle der Röhre befestigten Gestelle befestigt ist, gegen die Bodenplatte angedrückt. Die Feder ist andererseits an einen von der Platte *L* aufsteigenden Stiel befestigt. Die Feder ist nur sehr schwach, da sonst der Druck der Luft im Innern des Cylinders bald nicht mehr ausreichen würde, um das Ventil zu heben.

Anstatt der einfachen Klappe, welche die zur Glocke führende verschleißt, hat man folgende Einrichtung angebracht. Der Kolben einer Durchbohrung versehen, durch welche ein Messingstab *ss* hin geht, der luftdicht eingepaßt ist. An dem Stabe ist eine nach unten abgedrehte Verdickung angebracht, welche in die konische Öffnung Boden des Cylinders *h* eingeschliffen ist und dieselbe luftdicht abschließt. Wird der Kolben herabgedrückt, so nimmt er den Messingstab mit bis die kegelförmige Verdickung die Bodenöffnung abschließt. Der Verschluss dauert so lange, wie der Kolben niedergeht. Wenn der Kolben aufgezogen wird, hebt er zunächst den Stab *ss*, öffnet die Bodenöffnung und stellt auf diese Weise die Kommunikation der Glocke mit dem Pumpentiefel her. Damit aber der Stab nicht zu hoch gehoben wird, stößt der Stab, gleich nachdem er gehoben ist, gegen den Boden des Pumpencylinders, und der Kolben gleitet an der Messingstange nach unten.

Diese Einrichtung bewirkt also, daß man beim Pumpen selbst die Kommunikation des Recipienten mit dem Pumpentiefel herstellt und bricht, daß also die Luft aus der Glocke ohne Hindernis in die Pumpe treten kann.

Zweistiefelige Pumpen. Bei den einstiefeligen Pumpen ist leider jedesmal ein toter Gang, indem beim Herabdrücken des

Fig. 171.



nur die Luft aus der Pumpe freie Luft, nicht aber aus dem Recipienten in die Pumpe geschafft. Außerdem haben sie noch eine Unbequemlichkeit. Wenn nämlich die Luft fast vollständig ausgepumpt ist, so muß man bei Hebung des Kolbens nicht nur die Reibung des Kolbens an den Wänden des Stiefels überwinden, sondern auch den Druck der Luft, welcher auf dem Kolben lastet, und welcher kein Gegendruck das Gleichgewicht macht. Dieser Druck ist bei einiger Höhe des Kolbens sehr bedeutend, es beträgt 100 Kilogramm, wenn der Querschnitt des Kolbens einem Quadratdecimeter gleich wird. Dieser Druck, der bei dem Anfang der Operation gleich 0 ist, wächst sehr rasch, so daß das Auspumpen von Luft bald sehr schwierig, wenn nicht unmöglich wird. Um diesen beiden Übelständen zu begegnen, hat man zweistiefelige Pumpen (Fig. 171) konstruiert, bei denen man zwei solcher Pumpen mittelbar neben einander stellt und mit demselben Recipienten in Verbindung bringt. Die Kolben sind an Zahnstangen befestigt, deren Zähne in die eines gezähnten Rades eingreifen. Das Zahnrad sitzt auf einer metallischen Achse, an der zugleich ein zweiarthiger Hebel befestigt ist, an dem an seinen beiden Enden angebrachten Handgriffen der Hebel an den an seinen beiden Enden angebrachten Handgriffen

steigt und senkt die Kolben durch Drehung des Rades. Man sieht, wie immer der eine Kolben steigt, wenn der andere herabhängt, und wie beide vorhin bemerkte Übelstände abgestellt sind. Denn hemmt jetzt Luftdruck den aufsteigenden Kolben, so befördert er in ganz gleichem Maße den niedergehenden; der äußere Luftdruck ist also kein Hemmnis der Operation, sie geht am Ende bei fast leerer Glocke ebenso leicht als am Anfang. Überdies ist aber auch der tote Gang vermieden, denn geht der eine Kolben nieder, um die Luft aus dem Körper der Pumpe fortzunehmen, so steigt der andere Kolben auf und pumpt Luft aus dem Recipienten.

Verbindung der Pumpen mit dem Recipienten. Um mit den verschiedensten Apparaten in Verbindung setzen zu können, die auf einem festen Tische befestigt (Fig. 172). Die Kanäle, welche die Pumpentiefeln mit dem Recipienten in Verbindung setzen, vereinigen

sich gleich hinter den Recipienten in einen einzigen Kanal, der dann horizontal über dem Tische verläuft, in einiger Entfernung vertikal aufsteigt und in der Mitte eines Tellers von mattirtem Glase endet. Das hervorstehende Ende des Kanals ist mit einem Schraubengewinde versehen, auf welchem die Apparate aufgeschraubt werden kann, in welchen man einen luftleeren Raum herstellen will. Diese sind zu dem Zwecke einer Schraubenvorrichtung versehen, welche das Gewinde paßt. Diese sind bei einer Luftpumpe stets

Fig. 172.



einige Glocken mit abgeschliffenem Rand, welche auf den Teller gesetzt ausgepumpt werden können. Um den Verschluss einer solchen Glocke vollkommen luftdicht zu machen, bestreicht man den Rand derselben dann mit einer dünnen Schicht Fett.

Manometer. Um zu bestimmen, wie weit die Verdünnung der Luft in Apparaten vorgeschritten ist, besitzen alle Luftpumpen ein Barometer (Fig. 173). Dasselbe ist von einer Glasglocke umgeben, welche in Messingfassung eingekittet ist, die durch eine Röhrenleitung mit dem Recipienten zu den Pumpen führenden Kanal in Verbindung steht. So zugleich aus dem Recipienten und dieser Glocke die Luft ausgepumpt. Nicht daher, wie bei jedem Kolbenhub das Quecksilber in dem einen Arm des Barometer fällt, so lange bis die Verdünnung der Luft ihren

höchsten Grad erreicht hat, und das Niveau des Quecksilbers im Barometerrohr nur wenig mehr über das in dem offenen Schenkel erhoben ist. Druck der noch im Recipienten vorhandenen Luft und somit ihre Dichte wird in jedem Moment durch den Unterschied der Quecksilberniveaus angegeben.

Fig. 173.



Gewöhnlich wendet man anstatt eines ganz abgekürzten Barometers an von 30 bis 40 Centimeter. Das Quecksilber in dem geschlossenen Schenkel beginnt nicht eher zu fallen, als bis der Druck der Luft auf die reducirt und somit die Luft zur Hälfte ausgepumpt ist. Man verbindet man die Verdünnung schon früher, ja überhaupt genau so verbindet man mit der Pumpe ein einfaches U-förmiges Quecksilbermanometer, dessen einer Schenkel durch Kautschukpfropf geschlossen ist, der von einer zur Luft geführten Glasröhre durchbohrt ist. Der andere Schenkel ist offen; die Röhren sind zur Hälfte mit Quecksilber gefüllt. Wird nun die Luft in dem mit dem Recipienten der Luft in Verbindung gesetzten Schenkel verdünnt, so steigt das Quecksilber in demselben, sinkt in dem andern und die Niveaudifferenz gibt den Überschuss des äußern Luftdruckes über den der Luft im Recipienten. Zieht man demnach den Unterschied vom Barometerstande ab, so erhält man den Druck der Luft im Recipienten.

Der Niveauunterschied wird mit dem Kathetometer gemessen.

Grad der Verdünnung. Wenn man die Verdünnung der Luft im Recipienten durch fortgesetztes Pumpen möglich treibt, so wird man doch niemals in dem abgekürzten Barometer das Quecksilberniveau in beiden Schenkeln gleich finden. Oder im U-förmigen Manometer die Niveaudifferenz dem Barometer gleich finden. Man erhält daher niemals in dem Recipienten einen leeren Raum, und es fragt sich, wie weit kann man die Verdünnung treiben. Es hängt das wesentlich ab von der guten Konstruktion der Pumpe. Auch theoretisch betrachtet kann man niemals einen vollkommen leeren Raum erhalten, wie sich leicht nachweisen läßt.

Sei A die Kapazität des Recipienten, B die des Pumpencylinders. Nehmen wir an, wir hätten eine einstiefelige Pumpe und der Kolben auf dem Boden des Pumpencylinders. Sei ferner die dann im Recipienten abgesperrte Luftmenge gleich der Einheit.

Wird nun der Kolben ganz in die Höhe gezogen, so verbreitert sich die Luft aus dem Recipienten in den Cylinder und die vorhin den Recipienten einnehmende Luft nimmt jetzt den Raum $A + B$ ein. Die Dichtigkeit der Luft ist demnach jetzt in dem Raume des Recipienten sowohl als des Cylinders

$$\frac{A}{A + B}.$$

Wird jetzt durch Hinabdrücken des Kolbens die Luft aus dem Cylinder getrieben, so ist, wenn der Kolben den Boden wieder berührt, anstatt der Luftmenge 1 in dem Recipienten, dessen Kapazität gleich A ist, das

Volum Luft wie vorher abgesperrt, dieses hat aber nur die Dichtigkeit $\frac{A}{A+B}$. Nach dem zweiten Kolbenhube breitet sich nun die Luft von dieser Dichtigkeit aus dem Raume A wieder in den Raum $A+B$ aus, die Dichtigkeit nimmt demnach wieder im Verhältniß $\frac{A}{A+B}$ ab, oder sie ist jetzt

$$\frac{A^2}{(A+B^2)}.$$

Beim Niedergang des Kolbens wird wieder das Volumen B dieser Luft ausgestoßen, berührt der Kolben den Boden, so ist im Raum A die Luftmenge $\frac{A^2}{(A+B^2)}$ enthalten.

Nach dem dritten, vierten etc. Auf- und Niedergänge des Kolbens erhält man in gleicher Weise als im Recipienten zurückbleibende Luftmengen

$$\frac{A^3}{(A+B)^3}, \frac{A^4}{(A+B)^4}, \dots, \frac{A^n}{(A+B)^n}.$$

Nun ist

$$\frac{A^n}{(A+B)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{B}{A}\right)^n}$$

und man sieht, daß dieser Ausdruck nur dann gleich 0 wird, wenn n unendlich groß wird, wenn man also unendlich viele Kolbenhübe vornähme.

Man kann daher mit keiner Luftpumpe einen absolut leeren Raum erhalten, sondern unter den obigen Voraussetzungen sich dem vollständig leeren Raum nur durch andauerndes Pumpen annähern. Aber selbst dieses, eine fortgesetzte Annäherung an den luftleeren Raum ist in der Praxis nicht zu erreichen; selbst bei den besten Pumpen ist es nur eine gewisse Grenze der Verdünnung, der man sich bei fortgesetztem Pumpen immer mehr nähert. Selbst die besten Maschinen reichen nicht weiter als bis zu einer Verdünnung von etwa 1^{mm} Quecksilberdruck. Der Gründe dafür sind mancherlei.

Wie gut auch die Maschine gearbeitet ist, so können doch niemals die Verbindungen zwischen den einzelnen Theilen vollkommen luftdicht sein. So schließt der Kolben nicht absolut luftdicht an den Cylinder, die Stange der Ventile nicht im Kolben, ebenso nicht das Boden- und Kolbenventil. Ferner ist durch die mancherlei Verbindungen am Apparat das Innere desselben nicht ganz vollkommen von der äußern Luft abgeschlossen. Wenn deshalb die Verdünnung einen hohen Grad erreicht hat, sickert die Luft durch diese verschiedenen sehr feinen Räume in die Pumpe hinein und alles weitere Pumpen ist vergeblich; die Luftmenge, welche wir durch das Pumpen fortnehmen, wird durch die nachsickernde Luft wieder ersetzt.

Noch ein anderer wesentlicherer Umstand ist vorhanden, der es unmöglich macht, die theoretisch mögliche Verdünnung in der Praxis zu erreichen, es ist der schädliche Raum zwischen dem Kolben und dem Boden des Pumpencylinders. Der Kolben steht nämlich auch in seiner tiefsten Stellung niemals ganz dicht auf dem Boden der Pumpe, sondern immer ist wenn auch, bei sehr gut gearbeiteten Pumpen, noch so kleiner Raum zwischen beiden. Daraus folgt, daß nicht, wie wir bei unserer Berechnung

annahmen, bei jedem Niedergange das Luftvolumen B fortgeschafft, sondern da von dem Raume B unter dem Kolben noch ein Raum b bleibt, nur das Volumen $B - b$. Bei weit vorgeschrittener Verdünnung wird deshalb ein Punkt eintreten, wo die Luft in dem Pumpenstiefel nicht mehr durch den Kolben austritt; wo sie nicht mehr imstande ist, das Ventil zu heben, sondern nur in dem Raume b komprimiert wird. In weiteren Auf- und Niedergängen des Kolbens tritt daher keine Luft aus dem Recipienten in den Pumpencylinder und aus diesem durch den Kolben in die äußere Luft, sondern es wird nur die in dem Raume b haltene Luft abwechselnd ausgedehnt und komprimiert.

Babinets Hahn. Um diesen störenden Umstand auf ein Minimum zurückzuführen, hat Babinet zur Luftpumpe einen besonders nach benannten Hahn hinzugefügt. Derselbe befindet sich in der Axe der Luftpumpe, welche die von beiden Pumpenstiefeln kommenden Kanäle verbindet, und ist mittelbar unter denselben. Dieser Hahn hat zunächst eine T-förmige

Fig. 174 a.

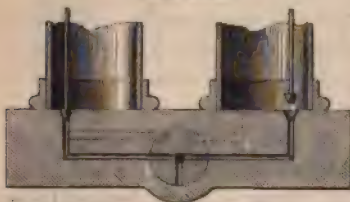
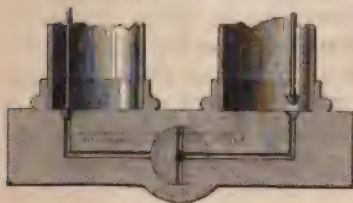


Fig. 174 b.



Durchbohrung, so daß die Querdurchbohrung der beiden Pumpenstiefel in der Axe des Hahnes gefügt ist, und da die Fortsetzung des zur Glocke führenden Kanals ist, mit diesem in Verbindung steht. In der Stellung Fig. 174 a, ist der Hahn gewöhnlich mit 2 bezeichnet, also die Verbindung der innern Theile der Maschine die bisher von uns angenommen wurde. Anders aber, wenn man den Hahn um 90° dreht, ihn in die Stellung Fig. 174 b bringt. Die Durchbohrung des Hahnes ist so, daß der eine Pumpenstiefel nicht mit der Glocke in Verbindung steht, sondern der andere jedoch nicht mehr. Dafür steht durch eine andere Durchbohrung der Hahn, die in der Figur durch die punktierten Linien angedeutet ist, dieser Stiefel

mit dem ersten Stiefel in Verbindung. Geht nun der Kolben in dem ersten Stiefel in die Höhe, so tritt die Luft aus dem Recipienten in ihn, und geht er herab und der Kolben des zweiten Stiefels in die Höhe, so tritt der letztere nicht Luft aus dem Recipienten, sondern die Luft aus dem ersten Stiefel in diesen. Dadurch wird also die Luft aus dem schließlichen Raume des mit dem Recipienten in Verbindung stehenden Stiefels gepumpt, und man kann die Verdünnung viel weiter treiben als vorher, so weit, daß die zurückbleibende Luft nur weniger als 1^{mm} Druck auszuhalten imstande ist.

Hahn zum Wiedereinlassen der Luft. Ist unter der Glocke eine Luftpumpe der verdünnte Raum hergestellt, so wird dieselbe durch den Druck der äußern Luft so festgehalten, daß es nicht möglich ist, sie zu heben. Es ist deshalb nötig, eine Vorrichtung anzubringen, um die Luft wieder einlassen zu können. Dazu dient der unter dem Namen (12) angebrachte Hahn. Derselbe hat ebenfalls mehrfache

Bohrungen, um den Teller der Luftpumpe vollständig absperrern zu können, zugleich aber in die Pumpe Luft einlassen zu können.

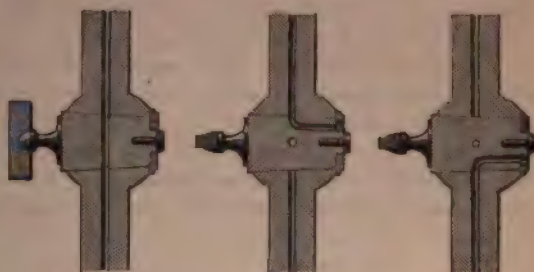
Zunächst ist er quer durchbohrt und setzt in der Stellung (Fig. 175) die Glocke mit der Pumpe in Verbindung. Außer dieser Durchbohrung

hat er noch eine zweite (Fig. 176), welche im Innern des Kanales rechtwinklig umbiegt, und wie in einem zu dem in Fig. 175 gezeichneten senkrechten Durchschnitt liegt. Dieser Kanal mündet in der äußern Luft und kann durch einen Hahn luftdicht geschlossen werden, damit in der Stellung Fig. 175 keine

Fig. 175.

Fig. 176.

Fig. 177.



Luft durch diesen Kanal eintreten kann. In der Stellung Fig. 176 setzt der Hahn die Glocke der Luftpumpe mit der äußern Luft in Verbindung; er dient also zum Einlassen der Luft in die Glocke. In der Stellung Fig. 177, welcher der Hahn gegen Fig. 176 um 180° gedreht ist, ist die Glocke, der Recipient, sowohl von der äußern Luft als von der Pumpe abgesperrt, gegen kommuniziert jetzt die Pumpe mit der äußern Luft.

Auf dem Griffe des Hahnes sind die Stellungen gezeichnet, auf der einen Seite steht *R* und auf der andern *F*. In Fig. 176 ist der Buchstabe *R* (entrée) oben, die Luft kann in die Glocke zurücktreten; in Fig. 177 ist *F* (entrée) oben, die Glocke ist abgesperrt.

Anstatt der zweistiefeligen Ventilluftpumpen werden auch vielfach zweifelige Hahnluftpumpen angewandt, besonders ausgezeichnet sind die der Berliner Mechaniker Schulze und Kleiner. Die Verbindung des Tellers mit den Pumpenstiefeln ist dieselbe wie bei den Ventilluftpumpen, die wir bisher beschrieben haben; die Kolben in diesen Pumpen sind ganz massiv, der wesentlichste Unterschied zwischen diesen und den Ventilpumpen steht in der Einrichtung des Hahnes, der an der Stelle des Babinetschen Hahnes angebracht ist, um beim Aufsteigen des Kolbens den Pumpenstiefel mit dem Recipienten, beim Niedergange aber mit der äußern Luft in Verbindung zu setzen, des nach seinem Erfinder benannten Grassmannschen Hahnes.

Die Einrichtung dieses Hahnes und seine Verbindung mit der Pumpe zeigen Fig. 178 und 179. Von dem Boden der beiden Stiefel *L* und *R* tritt, gerade wie bei der Ventilpumpe, eine Durchbohrung zu dem mittlern Kanal, der den Hahn in sich aufnimmt.

An der Stelle, wo das von dem Teller der Pumpe herkommende Rohr den Kanal mündet, ist der Hahn quer ganz durchbohrt, bei *h*; von der Seite dieser Querdurchbohrung geht durch den Hahn schräg hindurch ein Kanal *hi*, der in der Lage Fig. 178 dort aus dem Hahn hervortritt, wo von dem Stiefel *L* herkommende Durchbohrung mündet. Eine zweite schräge Durchbohrung des Hahnes *kl*, welche in dem Griffe des Hahnes

in die äußere Luft mündet, verbindet dann den von dem Stiefel *R* herkommenden Kanal mit der äußern Luft.

Zieht man den Kolben *L* in die Höhe, wobei gleichzeitig der Kolben *R* hinabgedrückt wird, so tritt in *L* die Luft aus dem Recipienten, während aus *R* durch *kl* die Luft herausgedrückt wird. Dreht man jetzt den Hahn um 180° in die Lage (Fig. 179), so ist durch den Kanal *hi* die Verbindung des Stiefels *R* mit dem Recipienten, durch *kl* die des Stiefels *L* mit der äußern Luft hergestellt.

Um schließlich den Hahn auch als Babinetschen zum Auspumpen des einen Stiefels durch den andern gebrauchen zu können, hat man den Hahn nur aus den oben angedeuteten Stellungen um 90° zu drehen, die dritte Durchbohrung *m*, welche einfach quer durch den Hahn geht, verbindet dann die beiden Stiefel mit einander, während weder eine Verbindung mit dem Recipienten noch mit der äußern Luft vorhanden ist.

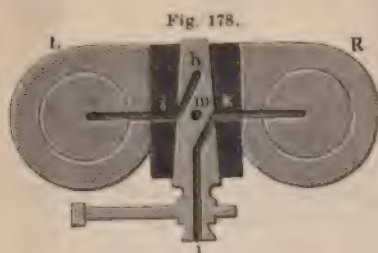


Fig. 178.

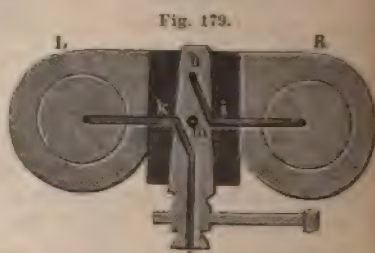


Fig. 179.

Bei den Hahnluftpumpen muß man allerdings nach jedem Kolbenhub den Hahn umlegen, also eine Operation mehr vornehmen als bei der Ventillpumpe, da man indes jetzt Stiefel von bedeutender Größe nimmt, ist dieser Übelstand nicht sehr groß. Die Hahnluftpumpen haben dagegen den Vorzug der einfacheren Konstruktion und gestatten deswegen im allgemeinen die Verdünnung weiter zu treiben als die Ventillpumpen.

Schließlich sei noch erwähnt, daß man statt der zweistiefeligen auch doppelwirkende einstiefelige sowohl Hahn- als Ventillpumpen konstruiert hat, bei welchen der Stiefel beim Aufsteigen des Kolbens unten, beim Niedergange oben mit dem Recipienten in Verbindung steht. Bei diesen Pumpen wird gleichzeitig das Auf- und Niedergehen des Kolbens durch die kontinuierliche Rotation eines Rades erzeugt, durch einen Mechanismus, der demjenigen ganz ähnlich ist, den wir später bei dem Nattererschen Apparat beschreiben werden. Vortreffliche Pumpen dieser Art konstruieren Staudinger in Gießen, Schultze in Berlin und Bianchi in Paris.

Eine eigentümliche doppelwirkende einstiefelige Ventilluftpumpe hat vor kurzem Deleuil konstruiert¹⁾, welche sich von den eben erwähnten dadurch unterscheidet, daß der Kolben nicht dicht an dem Stiefel anliegt, sondern daß zwischen ihm und der Stiefelwandung ein Zwischenraum von etwa $\frac{1}{20}$ mm ist, es sind die sogenannten Pumpen à piston libre. In dem kapillaren Zwischenraum zwischen Kolben und Stiefel zirkuliert die Luft

¹⁾ Deleuil, Comptes Rendus. T. LX. p. 571. Repertorium für physikalische Technik von Carl. Bd. I.

langsam; indem man nun den Kolben recht lang nimmt, gleich dem Durchmesser des Stiefels, und da auf dem größten Teile des Kolben der Kolben zurücklegt, die Luft an beiden Seiten desselben wenig verschiedene Dichtigkeit hat, kann man trotz des nicht Anliegens des Kolbens verdünnte Räume herstellen, in denen die etwa mehr 10^{mm} Quecksilberdruck hat. Die Maschine geht, da sie nicht reibt, leichter wie die andern Pumpen, sie hat zugleich daf, daß der Kolben nicht gefettet wird.

§ 108.

Fall der Körper im luftleeren Raum. In § 89 erwähnten wir, daß wegen des Daseins der Luft nicht alle Körper gleich schnell fallen; wir aber die im ersten Kapitel des ersten Abschnittes die Proportionalität von Gewicht und Anziehungskraft. Ist nun der Satz, daß alle Körper gleich schnell fallen, die spezifisch leichtesten Körper mit der Luftpumpe an könnten. Zu dem Ende wendet man eine Röhre an, die an der einen Seite in eine Metallfassung eingekittet ist, die mit einem Hahn versehene Röhre übergeht, welche auf das Schraubengewinde der Luftpumpe passende Mutter endigt. Das andere Ende der Röhre ist durch eine Metallfassung luftdicht geschlossen.

Fig. 180.



Diese Röhre bringt man ein Schrotkorn und eine Flaumfeder ein Stückchen Platin und ein Stückchen Papier, sie auf die Luftpumpe und macht sie so luftleer als möglich. Darauf schließt man den Hahn, schraubt die Röhre um und kehrt sie um. Die in der Röhre enthaltenen Körper fallen dann herab, und man sieht, daß die Flaumfeder eben Augenblicke unten ankommt wie das Schrotkorn, das Stück Papier ebenso rasch fällt als das Stück

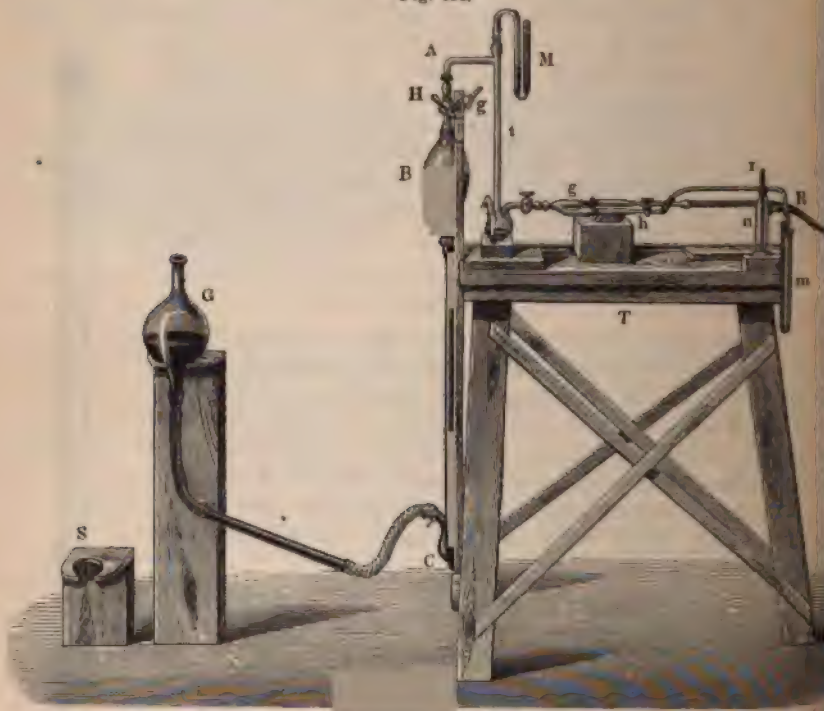
Man kann dann durch teilweises Öffnen des Hahnes allmählich wieder Luft in die Röhre eintreten, so sieht man, wie die leichteren Körper immer mehr zurückbleiben, die Luft wird; ein Beweis, daß die ungleiche Geschwindigkeit des Falles dieser Körper nur Folge des störenden Daseins der Luft ist.

Reihe von Versuchen, welche gewöhnlich mit der Luftpumpe angestellt werden, um die Existenz des Luftdruckes zu beweisen, als das Zersprengen einer über einen Cylinder gehaltene Blase, das feste Aneinanderhaften der sogenannten Magdeburger Halbkugeln u. s. f., genüge es, hier erwähnt zu haben, daß sie haben viel von ihrem Interesse verloren, welches sie darbieten, als sie dazu dienen, den großen Druck der Luft zu beweisen, und beizutragen, das Phantom des Horror vacui zu zerstören.

§ 109.

Quecksilberluftpumpen. Eine von den bisher besprochenen durch verschiedene Form der Luftpumpen ist die zuerst von Dr. Geissler in Bonn konstruierte Quecksilberluftpumpe¹⁾. Bei dieser wird die Pumpe ersetzt durch eine barometerartige Vorrichtung, in welcher durch Heben und Senken von Quecksilber die Toricellische Leere hergestellt wird, mit der dann diejenigen Apparate verbunden werden, aus welchen die Luft entfernt werden soll. Die Einrichtung dieser Pumpe, mit einem sehr bequemen Gestell, zeigt Fig. 181. An einem festen an den Tisch *T* angeschraubte Brette ist die bei *B* mit einer etwa 1,5 Liter enthaltenden birnförmigen Erweiterung versehene oben und unten offene Glasröhre *AC* befestigt.

Fig. 181.



Unten bei *C* ist die Röhre umgebogen und auf die Umbiegung ein dickes Kautschukschlauch gezogen, der die Röhre *AC* mit dem Gefäße *G* in Verbindung setzt. In die Röhre *AC* ist bei *H* ein Glashahn eingesetzt, der ganz ähnlicher Weise wie der § 107 Fig. 176 beschriebene Hahn zu Einlassen der Luft in die Pumpe durchbohrt ist. Die eine nach auf

¹⁾ *Poggendorf* weist zwar nach (*Poggend. Ann.* Bd. CXXV), daß die Idee der Quecksilberpumpe sehr alt, ja fast ebenso alt als die der gewöhnlichen Luftpumpe ist; man wird aber trotzdem *Geissler* als den Erfinder dieser Luftpumpen bezeichnen müssen, da er der Erste war, der (1857) eine praktische Pumpe konstruierte.

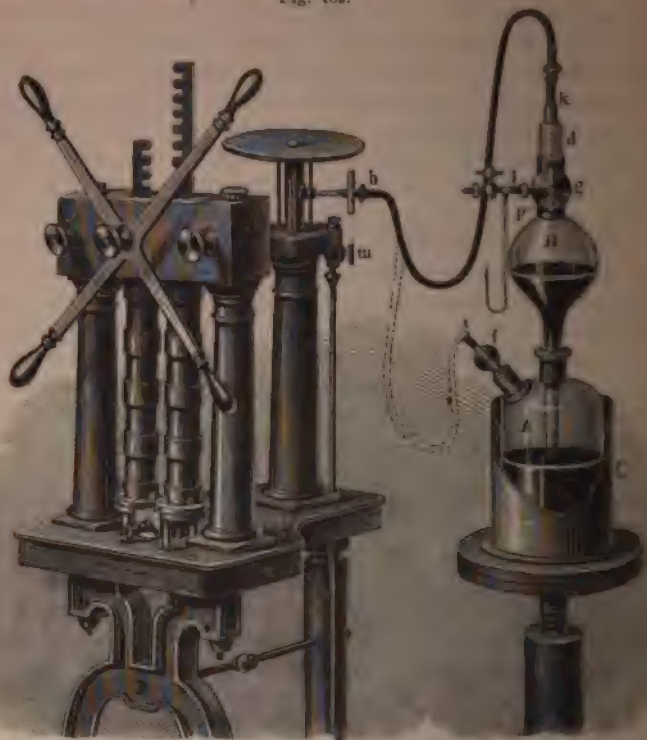
Die Durchbohrung mündet in das kleine an den Hahn angeschmolzene Gefäß *g*, die andere Durchbohrung geht quer durch den Hahn. Die Röhre *AC* ist oben konisch ausgeschliffen, und in dieses Ende ist das Ende des T-förmigen Rohres *t* luftdicht eingeschliffen. Dieses T-förmige Rohr ist einerseits das Manometer *M*, welches luftdicht in das obere Ende des Rohres *t* eingeschliffen ist, andererseits mündet das Rohr *t* in ein kleines wasserfreies Phosphorsäure halb gefülltes Gefäß, von dem aus das birnförmige Glasrohr *g* einerseits zu den Apparaten führt, welche luftleer gemacht werden sollen, andererseits durch das U-förmig gebogene Rohr *m* die doppelhalsige Flasche *n* in die freie Luft führt. Letztere Verbindung dient dazu, nach dem Auspumpen wieder Luft einzulassen, und zu diesem Ende ist in dieselbe ein einfach durchbohrter Glashahn *h* eingesetzt, so lange die Pumpe luftleer sein soll, geschlossen bleibt. Die Röhre *m* in die Flasche *n* sollen die in die Pumpe eintretende Luft vollkommen trocknen. Die Flasche *n* ist zu dem Ende einige Centimeter hoch mit concentrirter Schwefelsäure gefüllt, so daß das in den Hals der Flasche leicht eingesetzte an beiden Enden offene Rohr *r*, durch welches die Luft in den Apparat eindringen kann, unter der Schwefelsäure mündet. Alle in den Apparat eintretende Luft muß deshalb zunächst durch diese Schwefelsäure, dann durch das mit Chlorcalcium oder mit in Schwefelsäure getauchten Bimsteinstücken gefüllte Rohr *m*, und wird so aller Feuchtigkeit beraubt.

Um die Pumpe zu gebrauchen, wird das Gefäß *G*, dessen Inhalt etwas weniger ist als derjenige des Rohres *AC*, mit Quecksilber gefüllt. Wird der Hahn *H* dann so gestellt, daß das Rohr *BC* durch denselben mit der äußeren Luft kommuniziert, so steigt das Quecksilber im Rohr *BC* zunächst auf die Höhe des Niveaus im Gefäße *G*. Man hebt dann das Gefäß *G* so hoch, daß das Niveau des in ihm vorhandenen Quecksilbers etwas höher als das des Hahns *H*, das Quecksilber steigt dann in *BC* bis zur selben Höhe, vertreibt alle Luft aus demselben und dringt schließlich in kleinen Mengen durch den Hahn in die Kugel *g*. Man dreht dann den Hahn *H* in einen kleinen Winkel und senkt *G* bis zu dem Schemel *S*, auf dem man dasselbe aufsetzt. Da der Schemel *S* um mehr als 760^{mm} höher steht als die birnförmige Erweiterung *B*, so sinkt das Quecksilber in dieselbe hinab, und stellt in demselben ebenso einen vollkommen leeren Raum her, wie ein solcher im Barometer über dem Quecksilber sich bildet. Dreht man dann den Hahn *H* so, daß der Raum des Rohres *t* mit der Verbindung gesetzt werden, so tritt aus jenen die Luft in diesen hinein, so wie sie aus dem Recipienten in den ausgepumpten Stiefel hineintritt. Dreht man dann den Hahn wieder zurück, so daß *BC* mit der äußeren Luft kommuniziert, und wiederholt die Operationen in der angegebenen Weise. Wegen des großen Gewichtes des zu hebenden Quecksilbers kann eine solche Luftpumpe immer nur in kleinen Dimensionen ausgeführt werden, nicht in größern, als sie vorhin angegeben wurden; deshalb ist die Pumpe nicht geeignet, um kleinere Apparate auszupumpen. Bei diesen gestattet sie es, da in der Pumpe kein schädlicher Raum ist, und da die Glasverbindungen weit dichter hergestellt werden können, ein weit vollkommneres Resultat herzustellen als die gewöhnlichen Luftpumpen. Wir werden die

Wirksamkeit der Pumpe näher kennen lernen, wenn wir in der Elektrolyse die Herstellung der Geisslerschen Röhren besprechen¹⁾.

Um das immerhin lästige Heben und Senken des Gefäßes *G* bequem zu machen, hat Jolly²⁾ eine Pumpe konstruiert, bei welcher das Gefäß

Fig. 182.



auf einem Tische steht, welcher durch eine Kurbel und ein Zahnrad gehoben und gesenkt werden kann. Außerdem hat Jolly die Glashähne der Hähne von Gußstahl ersetzt, welche ebenso dicht halten als Glashähnen. Poggendorff³⁾ hat die Geisslersche Pumpe mit der gewöhnlichen Pumpe

¹⁾ Eine von der Geisslerschen abweichende Pumpe, indem sie alle Theile entbehrt, hat *Töppler* konstruiert; dieselbe ist beschrieben von *A. Wiedemann* in *Wiedemanns Annalen* Bd. X. *Töppler* erreicht das dadurch, daß oberhalb des Gefäßes *B* statt des Hahnes eine später vertikal abwärts gerichtete Röhre, deren abwärts gebogener Schenkel 800^{mm} lang ist, ansetzt, welche das Quecksilber mündet. Die Röhren, welche zu dem auszupumpenden Gefäß führen, werden unterhalb *B* angesetzt, und dann erst etwa 900^{mm} vertikal nach oben geführt. Man hebt dann das Gefäß *G*, bis das Quecksilber durch die obere Stelle des Hahnes angebrachte Röhre abfließt, und abfließend alle Luft aus dem Gefäß, in dem sie mündet, austreibt. Senkt man dann *G*, so wird das Quecksilber in dieser Röhre bis zu einer durch die erreichte Verdünnung bedingten Höhe stehen. Das Quecksilber dieser Röhre bildet somit ein Ventil, das die Luft aus der Pumpe heraus, aber nicht zurück treten läßt.

²⁾ *Jolly*, Repertorium für physikalische Technik von Dr. Ph. Carl. München 1866.

³⁾ *Poggendorff*, Poggend. Ann. Bd. CXXV.

verbunden, um das Heben des Quecksilbers ganz überhoben zu sein. Die Poggendorfsche Einrichtung zeigt Fig. 182. In den obern Hals der doppelt labiierten großen mit Quecksilber gefüllten Flasche *A*, welche in dem Hohlgefäße *C* steht, ist der lange untere Hals des eiförmigen Gefäßes *B*, welcher bis fast auf den Boden von *A* reicht, luftdicht eingeschliffen. Der weite Tubulus der Flasche *A* kann durch einen einfach durchbohrten Hahn *f* entweder luftdicht geschlossen, oder mittels eines auf die Dille *i* aufgesetzten festen Schlauches mit der Luftpumpe verbunden werden.

Der obere kurze Hals des Gefäßes *B* ist mit einer Fassung versehen, von durch den Hahn *g* verschließbare Durchbohrung zu dem luftdicht in eine Fassung gekitteten Gläschen *d* führt, welches auf seinem Halse die aufgekittete eiserne Dille *k* trägt. Der Hahn *g* ist doppelt durchbohrt; steht der Griff, wie in der Zeichnung, vertikal, so setzt er einfach das Gläschen *d* mit dem Gefäße *B* in Verbindung; wird er um 45° gedreht, so sperrt er *B* von *g* ab, wird er um 90° gedreht, so daß der Griff horizontal ist, so verbindet er das Gefäß *B* mit dem Seitenkanal *l*, an dem die Gegenstände festigt werden, welche mit der Pumpe evakuiert werden sollen.

Um mit dieser Pumpe zu arbeiten, wird zunächst das Ende *k* mit der Luftpumpe verbunden, der Hahn *f* geöffnet und *g* so gestellt, daß *d* mit *B* in communiciert; durch einige Kolbenhübe der Luftpumpe steigt dann das Quecksilber bis in das Fläschchen *d*. Dann wird der Hahn *g* geschlossen, und anstatt der Dille *k* die mit *i* bezeichnete mit der Luftpumpe verbundene Dille durch einige Kolbenzüge die Luft in *A* so weit verdünnt, daß das Quecksilber bis in den Hals des Gefäßes *B* hinabsinkt. Auf diese Weise entsteht in *B* ebenso die Barometerleere, wie in der Pumpe von Geissler nach dem Sinken des Quecksilbergeäßes. Verbindet man dann durch Drehung des Hahnes *g* die zu evakuierenden Gegenstände mit *B*, so strömt auch denselben die Luft in den leeren Raum. Das weitere Auspumpen geschieht dann durch Wiederholung derselben Operationen.

Die Poggendorfsche Vorrichtung unterscheidet sich, wie man sieht, von der Geisslerschen Pumpe durchaus nicht, und auch die Quecksilberpumpe, welche zu derselben gebraucht wird, ist bei gleicher Kapazität des Gefäßes *B* ganz dieselbe, sie vermeidet nur das Heben und Senken des Quecksilbers durch Anwendung der Luftpumpe.

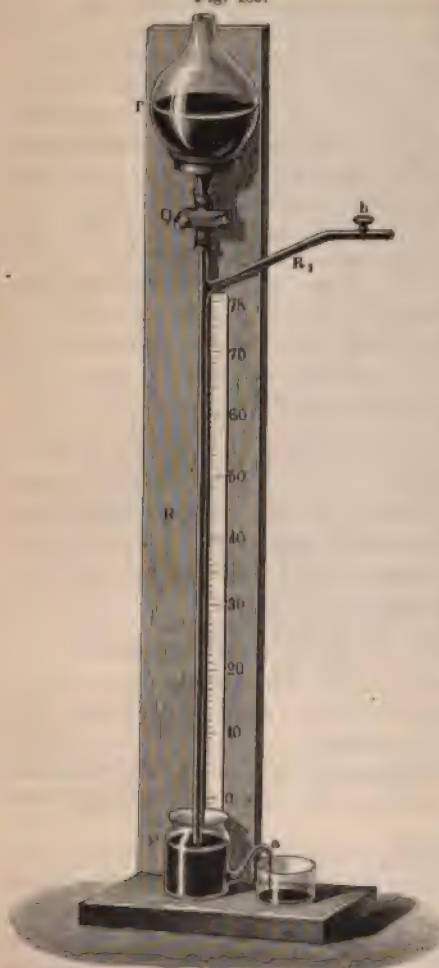
Eine auf einem ganz andern Princip beruhende Quecksilberluftpumpe (die von Sprengel angegebene¹⁾); dieselbe beruht auf den § 84 abgeleiteten Gesetzen über den hydraulischen Druck.

An ein trichter- oder flaschenförmiges Gefäß *T* (Fig. 183) ist unten an einem Kautschukschlauch eine etwa 800^{mm} lange dickwandige Glasröhre von überall gleichem etwa 2^{mm} großem Durchmesser angehängt, deren unteres offenes Ende in ein kleines mit seitlichem Ausflußrohr *a* versehenes Gefäß *F* mündet. An das Rohr *R* ist etwa 30^{mm} unterhalb des Kautschukschlauches eine seitliche Röhre *R*₁ angeschmolzen, in welche man passend einen Glashahn einsetzt. Diese Röhre führt zu den Apparaten, welche mittels der Pumpe luftleer gemacht werden sollen. Über dem Kautschukschlauch ist ein Quetschhahn gelegt, durch welchen man den

^{1) Sprengel, Journal of Chemical Society II. Ser. vol. III. Poggend. Ann. CXXIX. p. 564.}

Schlauch schließen kann. Um die Pumpe wirken zu lassen, füllt man den Trichter mit Quecksilber, öffnet durch einen Druck auf den Quetschtrichter den Kautschukschlauch und läßt das Quecksilber in einem stetigen Ausfließen. Die durch die Röhre R_1 mit dem Apparat verbundenen Röhren werden dann allmählich leer gepumpt, indem die Luft durch das vorbeifließende Quecksilber mitgerissen und unten aus dem Rohre R

Fig. 183.



getrieben wird. Hat der Apparat die angeführten Dimensionen, kann man ziemlich vollständig Barometerleere durch fortgesetztes Ausfließen erhalten. Es läßt sich das unmittelbar aus der unten Gleichung des § 84. ableiten, wenn h die Tiefe des Ansatzrohres unter dem Niveau des Quecksilbers in T , H den Abstand der Ausflußöffnung von dem Niveau, p_0 den Druck der Atmosphäre, der auf dem oberen Ende des Quecksilbers lastet und p den Druck in der Ausflußöffnung wirkt, der bei R_1 vorhandene hydrostatische Druck

$$p = p_0 - s(H - h)$$

Ist nun $H - h$, die Länge der Quecksilbersäule unterhalb der Ausflußöffnung, gleich der Höhe des Barometers, so ist $p = 0$, es wird also die Luft in der Röhre R mit R_1 verbundenen Röhren in die Röhre R die Luft hineingezogen wie in den Raum des Barometers, und so halb jeder mit R_1 verbundenen Röhre durch fortgesetztes Pumpen ebenso weit entleert wie man durch die Quecksilberluftpumpe

Man kann natürlich die Verbindung des Fallrohrs mit dem Gefäße T anstatt durch den Kautschukschlauch auch durch ein Glasrohr herstellen, daß man mit Zwei-

setzung eines Glashahns dasselbe direkt an das Gefäß anschmilzt. Ist diese Befestigung nicht ratsam, da bei häufigem Gebrauche der Apparat durch die Erschütterung infolge der Stöße des fallenden Quecksilbers das Fallrohr Sprünge bekommt und erneuert werden muß.

Auf ganz demselben Princip wie die Sprengelsehe Pumpe beruht die Sprengelsehe Wasserluftpumpe, in welcher nur das Quecksilber durch Wasser ersetzt ist; bei dieser muß natürlich das Fallrohr der geringern Dichte wegen

heit des Wassers entsprechend länger sein; gibt man dem Fallrohr eine Länge von etwa 8 Meter, so kann man mit der Bunsenschen Pumpe in den auszupumpenden Räumen den Druck bis auf etwa 0,25 Atmosphären vermindern.

§ 110.

Die Kompressionsmaschine. Die Kompressionsmaschinen haben eine derjenigen der Luftpumpe entgegengesetzte Aufgabe, sie dienen dazu, um in irgend einem Raume die Luft zu verdichten. Die Fig. 167 dargestellte Hahnluftpumpe kann ohne jede konstruktive Veränderung unmittelbar auch als Kompressionspumpe benutzt werden. Bei der Benutzung muß nur das Spiel der Hähne umgekehrt werden. Öffnen wir den Hahn *l*, wenn der Kolben zurückgezogen wird, so tritt von außen her gerade so Luft in den Cylinder, wie bei der frühern Benutzung aus dem Recipienten, schließt man beim Rückgange des Kolbens den Hahn *l* und öffnet *h*, so wird die Luft in den Recipienten geprefst. Es ist klar, daß in diesem Falle der Recipient auf dem Teller der Pumpe befestigt werden muß, da die im Innern desselben verdichtete Luft sonst denselben aufhebt. Ebenso wie die einstiefelige kann auch die zweistiefelige Hahnluftpumpe mit dem Grassmannschen Hahne unmittelbar als Kompressionspumpe gebraucht werden, indem man einfach den Hahn bei dem Pumpen umkehrt legt.

Die Ventilluftpumpen können nicht so unmittelbar als Kompressionsmaschinen verwandt werden, bei ihnen müssen die Ventile sich in entgegengesetzter Richtung, also anstatt von unten nach oben, von oben nach unten öffnen. Wird dann (Fig. 169) der Kolben aufgezogen, so öffnet sich durch den Druck der äußern Luft das Ventil *l* des Kolbens, dagegen verschließt sich durch den Druck der Luft im Recipienten das Ventil *h*, während vorher umgekehrt *l* durch den Druck der äußern Luft sich schloß und *h* durch den der im Recipienten enthaltenen Luft sich öffnete. Wird dann der Kolben herabgedrückt, so schließt sich das Ventil *l*, weil jetzt der Druck im Cylinder *A* größer wird als der der äußern Luft. Ist die Luft im Cylinder dann bei weiterm Niedergang des Kolbens stärker komprimiert als die Luft des Recipienten, so öffnet sich das Ventil *h* und die Luft wird aus dem Cylinder in den Recipienten geprefst. Durch Wiederholung der Operation kann man die Luft im Recipienten sehr weit verdichten; man gelangt aber auch hier zu einer Grenze, welche man mit einer gegebenen Pumpe nicht überschreiten kann.

Wegen der nicht vollkommenen Dichtigkeit des Apparates wird von einem gewissen Augenblicke an aus demselben ebensoviel Luft entweichen, als beim Aufziehen des Kolbens geschöpft wird. Wegen des Vorhandenseins des schädlichen Raumes wird man ferner bei sehr großer Verdichtung der Luft im Recipienten dahin gelangen, daß selbst in der tiefsten Stellung des Kolbens die Luft im Cylinder nicht dichter ist als die im Recipienten gesammelte Luft, dann wird sich das Ventil *h* nicht mehr öffnen können, dann der von innen aus auf dasselbe ausgeübte Druck gleich ist dem im Cylinder her wirkenden. Ferner mit der Dichtigkeit der abgesperrten Luft nimmt der von unten her auf den Kolben wirkende Druck sehr rasch zu, und bald wird man dahin gelangen, daß, wenn nicht der Querschnitt des Kolbens sehr klein ist, man denselben nicht mehr ganz herabdrücken kann.

Man hat auch Kompressionspumpen mit zwei Stiefeln konstruirt, welche äußerlich gerade so eingerichtet sind, als die bisher beschriebenen zweistiefeligen Luftpumpen, jedoch mit dem Unterschiede, daß die Ventile sich alle in entgegengesetzter Richtung öffnen und schließen. Indes! sich dieselben nicht bewährt und man findet sie daher äußerst selten geführt.

Die am häufigsten zur Anwendung kommenden Kompressionspumpen sind einfache Röhren von starkem Eisen oder Messing, in denen ein massiver Kolben auf- und abgeht. Dieselben werden an das mit dem entsprechenden Verschlusse versehene Gefäß, welches die verdichtete Luft aufzunehmen

Fig. 184.

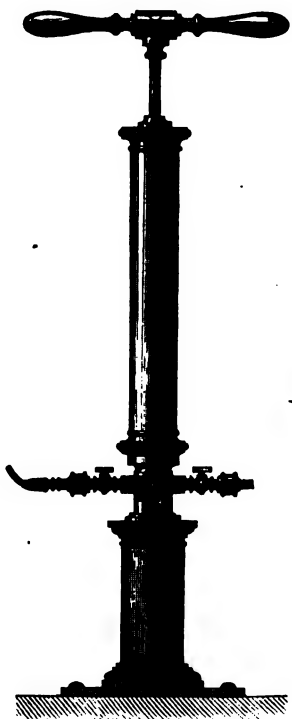
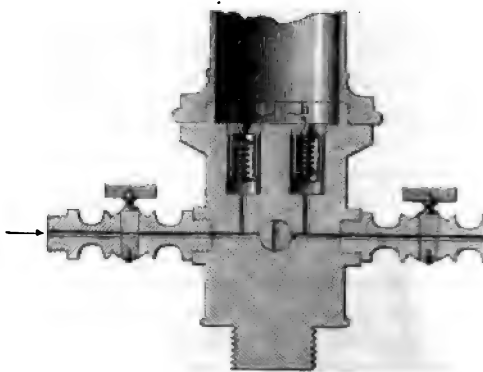


Fig. 185.



angeschraubt. Zum Schöpfen der Luft dient dann ein Loch in der Röhre, welches nahe an dem andern Ende der Röhre sich befindet, so daß der Kolben in seiner äußersten Stellung sich über demselben befindet, und also frei in den innern Raum des Cylinders unter dem Kolben eintreten kann. Derart sind z. B. die kleinen Kompressionspumpen, deren man sich bedient, um die Luft in dem Kolben der Windbüchse zu komprimiren.

Eine etwas andere Einrichtung der Kompressionspumpe zeigt Fig. 185. Sie dient zugleich, um andere Gase als atmosphärisch in einem Raume zu verdichten.

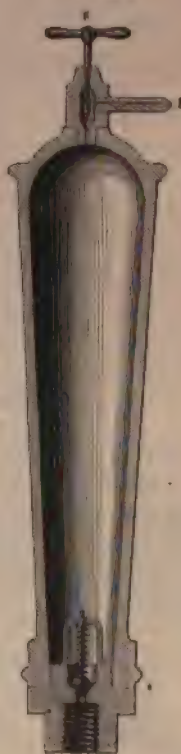
Diese Pumpe ist einstiefelig, sie wird auf den Boden fest aufgeschraubt, und der ganz massive Kolben befindet sich oben in einem Hantel

man mit beiden Händen faßt, und an dem man den Kolben ab- und auf und nieder bewegt. In dem Boden der Pumpe sind zwei Ventile *a* und *b*, deren eines sich von unten nach oben öffnet und den Ventstiefel mit der freien Luft oder mit dem Gefäße in Verbindung bringt, in welchem das zu verdichtende Gas angesammelt ist; es öffnet sich,

Fig. 186.



Fig. 187.



man den Kolben in die Höhe zieht. Das andere Ventil *b* öffnet sich in entgegengesetzter Richtung, wenn der Kolben niedergeht. Dieses setzt den Zylinder der Pumpe durch die Röhrenleitung *bd* mit dem Raume in Verbindung, in welchem das Gas komprimiert werden soll.

Man sieht, daß dieser Apparat zugleich als Luftpumpe und auch als Pressionspumpe dienen kann. Bringt man die mit dem Ventil *a* in Verbindung stehende Röhre mit einem Recipienten in Verbindung und läßt

die Röhrenleitung *bd* mit der äußern Luft communicieren, so dient der Apparat als Luftpumpe, macht man die Verbindungen umgekehrt, als Kompressionsmaschine.

Eine Kompressionspumpe, welche sehr starke Verdichtungen hervorbringen imstande ist, bietet der Apparat von Natterer. Er dient vorzugsweise dazu, um Gase in den flüssigen Zustand zu versetzen.

Der Natterersche Apparat (Fig. 186) besteht im wesentlichen aus einem dickwandigen Rohr *l* von sehr kleinem innern Durchmesser, in welchem sich ein massiver Kolben auf und ab bewegt. Zur Sicherung der vertikalen Bewegung des Kolbens ist derselbe durch einen Ring geführt. Unterhalb desselben ist mit dem Kolben durch ein Scharnier die Schubstange *s* in Verbindung, die ihre auf und nieder gehende Bewegung durch das Schwungrad *f* bekommt, an dessen Axe sie mittels einer Kurbel excentrisch befestigt ist.

Der Pumpencylinder ist durch eine Röhrenleitung *L* mit einem Gasometer in Verbindung, aus welchem beim Niedergange des Kolbens das Gas in den Pumpencylinder eingesaugt wird.

Auf den Pumpencylinder ist eine starke Flasche von Schmiedeeisen (Fig. 187) befestigt, in welche das Gas hineingepreßt wird. Dieselbe ist vorher auf ihre Festigkeit geprüft, indem man mittels Wasser auf der Innenfläche derselben einen Druck von 150 Atmosphären ausübt. Das Gas nach dem Innern der Flasche zu öffnende Ventil *l* (Fig. 187) läßt das Gas eintreten. Um das verdichtete Gas oder das flüssig gewordene austreten zu lassen, ist an dem obern Ende der Flasche eine kleine Öffnung, welche in dem Röhren *r* mündet, angebracht. Dieselbe wird verschlossen durch den mit einem Schraubengewinde versehenen Stift *s*, der konisch in den engen Hals der Flasche eingeschliffen ist. Will man das flüssige Gas austreten lassen, so schraubt man die Flasche ab, kehrt sie um, so, daß die Öffnung *r* unten ist, und öffnet dieselbe durch Drehen der Schraube *s*. Der Druck des über dem flüssigen stark verdichteten Gases treibt dann die Flüssigkeit heraus. Außer diesen Kompressionspumpen kann man auch den Örstedschen Apparat zur Kompression der Gase benutzen, wie Despretz that (§ 98).

Vielfach dient auch folgendes Verfahren dazu, um ganz ohne mechanische Mittel ein Gas zu komprimieren. Man schließt in eine heberförmig

Fig. 188.



gebogene Röhre von starkem Glase die Substanzen, durch deren Einwirkung auf einander das Gas entwickelt wird. Durch die Entwicklung des Gases in diesem geschlossenen Raume und die Ansammlung desselben wird der Druck des Gases in der Röhre ganz enormer und es bedarf großer Vorsicht

damit der Apparat nicht springt. Einen nach diesem Principe konstruierten Apparat wandte Thilorier an, um flüssige Kohlensäure in großen Mengen herzustellen¹⁾.

§ 111.

Flüssigmachen der Gase. Im § 99 haben wir das Verhalten der sogenannten permanenten Gase, Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Kohlen-

¹⁾ Thilorier, Annales de chim. et de phys. T. LX. 1835.

und unter hohen mit der Kompressionsmaschine herstellbaren Drucken betrachtet, und gesehen, daß dieselben von gewissen schon ziemlich starken Drücken an sehr viel weniger zusammengedrückt werden, als es das Mariottesche Gesetz verlangt, wenn man die Kompression bei gewöhnlicher Temperatur oder auch bei derjenigen des schmelzenden Eises vornimmt.

Unter denselben Umständen verhalten sich die übrigen Gase ganz anders; bei diesen zeigt sich vielmehr, daß mit steigendem Drucke die Kompressibilität stetig wächst bis zu einem gewissen für die verschiedenen Gase verschiedenen Drucke. Ist dieser Druck erreicht, so kann man das Volumen des Gases beliebig, bis zu einer bestimmten Grenze, weiter vermindern, so daß die Spannung des Gases zunimmt, ohne daß man also den äußeren Druck vermehren muß. Bei diesem Drucke ändert nämlich das Gas seinen Aggregatzustand, es hört auf Gas zu sein, es wird tropfbar flüssig, jede Volumenverminderung, welche nach Erreichung jenes Grenzdruckes dem Gase zu teil wird, führt die dem verminderten Volumen entsprechende Gasmenge in die flüssige Form über.

Diese Zustandsänderung geht plötzlich vor sich, sie bereitet sich aber nicht stetiges Wachsen der Kompressibilität vor. Daraus ergibt sich schon, daß man die vier genannten permanenten Gase durch Vermehrung des Druckes nicht flüssig machen kann. Es würde, nach der schon § 98 geachten Bemerkung über den Einfluß der Temperatur auf die Kompressibilität der Gase, indes voreilig sein, daraus zu schließen, daß dies ein in der Natur der Gase begründeter wesentlicher Unterschied zwischen den permanenten und nicht permanenten Gasen wäre. Es hängt die Fähigkeit sich zu werden wesentlich von der Temperatur ab, bei der man das Gas comprimiert.

Eben wegen des Einflusses, den der Wärmezustand des Gases auf die Verhältnisse hat, wollen wir die Frage nach der Kondensation der Gase der Wärmelehre verweisen. Wir beschränken uns hier darauf, anzugeben, welche Gase man bei gewöhnlicher Temperatur flüssig machen kann, welche Wärme dazu erfordert werden¹⁾, und welche spezifischen Gewichte einige flüssigen Gase bei der Temperatur des schmelzenden Eises haben²⁾.

Bei nicht viel von der des schmelzenden Eises verschiedenen Temperaturen werden flüssig:

Name der Gase	Druck, unter welchem sie flüssig werden	Spezifische Gewichte bei 0°
Schwefelige Säure	1,5 Atmosphären	1,4333
Cyan	2,4 " 	0,866 ³⁾
Ammoniak	4,4 " 	0,6362
Arsenwasserstoff	8,6 " 	
Schwefelwasserstoff	9,9 " 	
Chlorwasserstoff	25,3 " 	
Stickstoffoxydul	31,1 " 	0,9369
Kohlensäure	37,2 " 	0,94695
Ölbildendes Gas	42,5 " 	

¹⁾ Faraday, Philos. Transactions of London. R. S. for the year 1845; auch *Land. Ann. Ergänzungsband II.*

²⁾ Andreeff, Liebigs Annalen Bd. CX.

³⁾ Faraday, a. a. O.

Alle diese Flüssigkeiten besitzen sehr merkwürdige Eigenschaften, welche wir in der Wärmelehre weiter betrachten werden. Es sind im gemeinen sehr flüssige, ungefärbte Flüssigkeiten, welche sich in Wasser nicht, in Alkohol und Äther aber sehr gut lösen.

§ 112.

Molekularwirkungen zwischen festen und gasförmigen Körpern.

Wenn man in einen mit Gas erfüllten Raum einen festen Körper bringt, zieht derselbe die ihn zunächst umgebenden Gasmoleküle an, und die Folge davon ist eine Verdichtung des Gases an der Oberfläche des festen Körpers. Je größer die Oberfläche des festen Körpers ist, an um so mehr Punkten ist er mit dem Gase in Berührung, um so mehr Punkte desselben ziehen daher Gasteile an sich, um so mehr Gas wird an der Oberfläche des Körpers verdichtet werden. Man kann diese Thatsache leicht durch einen Versuch beweisen. Füllt man eine oben geschlossene und mit ihrem einen Ende in Quecksilber tauchende Glasröhre mit Kohlensäure, und taucht dann über das Quecksilber in die Glasröhre eine frisch in Quecksilber gelöschte Kohle von Buchsbaumholz, so sieht man, wie sich sofort das Volumen des Gases vermindert, indem das Quecksilber in die Glasröhre steigt. So wie die Kohle Kohlensäure, so absorbiert sie sowohl als andere Körper andere Gase.

Die ausgedehntesten Versuche über die Absorption der Gase an festen Körpern rühren von Theodor von Saussure her¹⁾.

Zunächst wies derselbe nach, daß nur geglähtte und frisch abgeglühte Körper zu den Absorptionsversuchen brauchbar sind. Der Grund liegt darin, daß Körper, die längere Zeit an der Luft gelegen haben, bereits atmosphärische Luft und Wasserdampf an ihrer Oberfläche verdichtet haben. Die ausgeglühten Körper brachte Saussure unter eine Glocke, welcher über Quecksilber ein gemessenes Gasvolum aufgefangen war, und maß die eintretende Volumänderung. Er fand dann, daß ein und derselbe Körper verschiedene Gase und verschiedene Körper dasselbe Gas in verschiedener Menge absorbierten. So erhielt er z. B. für Buchsbaum und Meerschäum von Valecas folgende Zahlen, welche angeben, wieviel ihr eigenes Volum Gas unter dem darunter angeführten Drucke die Gase absorbieren.

	Kohle	Meerschäum
Ammoniak	90	15
Chlorwasserstoff	85	—
Schwefelige Säure	65	—
Schwefelwasserstoff	55	11,7
Stickstoffoxydul	40	3,75
Kohlensäure	35	5,26
Elaöl	35	3,7
Kohlenoxyd	9,42	1,17
Sauerstoff	9,25	1,49
Stickstoff	7,5	1,60
Wasserstoff	1,75	0,44
Druck $p = 724^{\text{mm}}$		730 ^{mm}

Dauer des Versuches war 24—36 Stunden, nach denen keine des Volumens mehr eintrat; nur bei dem Sauerstoff dauert die mehrere Jahre.

sieht, daß im allgemeinen die absorbierten Gasmengen bei den Körpern in derselben Reihe folgen, und daß die Gase, welche h. Druck flüssig machen kann, in weit höherem Maße absorbiert als die permanenten Gase. Das spricht auf das entschiedenste für eine, daß wir es hier nur mit einer Molekularanziehung der festen Körper auf die ihn zunächst berührende Gasschicht zu thun haben. Dabei ist es jedoch möglich, wie aus der nicht vollständigen Annäherung der beiden Reihen zu schließen ist, daß auch chemische Kräfte mit wirksam sind.

Feuchte Kohle absorbiert weniger Gas als trockne; so fand Saussure bei baumkohle

	trocken	feucht
Kohlensäure	33	17
Stickstoff	7,5	6,5
Sauerstoff	9,25	3,25.

über die Gasmenge, welche von den festen Körpern unter verschiedenen Drucken absorbiert wird, hat Saussure Versuche angestellt, indes dieselben nichts Gesetzmäßiges ergeben. Bei gemindertem Drucke nimmt sich das Volum des absorbierten Gases.

Wie Kohle zeigen alle Körper, wenn sie nur eine hinreichende Poren besitzen, die Fähigkeit, große Mengen Gas zu verdichten, so z. B. Körper, Platinschwamm etc.

Bei der großen Verdichtung des Sauerstoffes der Luft in Platin beruht die Wirkung der Döbereinerschen Zündmaschine und die Fähigkeit des Platins, Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser zu verbrennen. Bei der Verdichtung der Gase tritt nämlich, wie bei jeder Gasverdichtung, Wärmeentwicklung ein. Wird nun Platin in ein Gemisch aus Sauerstoff und Wasserstoff gebracht, oder auf Platinschwamm, der mit dem Sauerstoff erfüllt ist, Wasserstoffgas geleitet, so ist die entwickelte Wärmemenge groß genug, um das Knallgas zu entzünden.

Wir werden später bei Betrachtung des Siedens nochmals Gelegenheit finden, auf die Verdichtung des Gases an der Oberfläche fester Körper zurückzukommen.

Wie schon oben bemerkt, leitet aus einer Reihe von Erscheinungen, welche verschiedene solchen Atmosphären verdichteten Gases erfüllte Körper in manchen Beziehungen zeigen, die uns größtenteils im weiteren Verlaufe unserer Reise begegnen werden, den Satz her, daß die Menge des absorbierten Gases nicht nur mit der Größe der Oberfläche, sondern auch mit der Dichte des kondensierenden Körpers zunimmt; ein Satz, der allerdings aus mehreren Gründen viel Wahrscheinlichkeit für sich hat.

§ 113.

Moser'sche Bilder. Moser²⁾ hat zuerst beobachtet, daß, wenn man ein Holzstäbchen über eine glatte Fläche, sei es Metall oder Glas

¹⁾ Lincke, Poggend. Ann. Bd. CVIII.

²⁾ Moser, Poggend. Ann. Bd. LVI und LVII.

oder irgend eine andere Substanz, hinführt und dann die Stelle behaucht, daß dann durch eine Verschiedenheit in dem Beschlagen der Fläche die Züge auf der Fläche deutlich hervortreten. Noch deutlicher zeigen sie sich, wenn man die Fläche Quecksilberdämpfen aussetzt, indem sich die Quecksilberdämpfe entweder vorzugsweise an den berührten Stellen niederschlagen oder an den nicht berührten.

Ebenso zeigte Moser, daß, wenn man auf eine beliebige Platte einen geschnittenen Stein, einen gravierten Metallstempel oder irgend einen andern Körper legt, nach einiger Zeit, wenn man die Platte behaucht oder sie dem Einflusse von Quecksilberdämpfen aussetzt, ein Bild des Steines oder Stempels auf der Platte sichtbar wird, indem die Dämpfe sich an den berührten Stellen mehr oder weniger niederschlagen, oder doch ein anderes Aussehen bieten, als an den nicht berührten Stellen. Selbst wenn der Stempel die Metallplatte nicht berührte, sondern durch zwei an der Seite untergelegte Glimmerblättchen in einem geringen Abstände davon gehalten wurde, trat nach dem Behauchen das Bild desselben auf der Platte hervor.

Waidele¹⁾ hat diese Bilder auf das vollständigste aus der Gasatmosphäre erklärt, welche, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, an der Oberfläche der Körper verdichtet ist, und seine Erklärung durch eine große Reihe von Versuchen bestätigt.

Durch das Hinüberführen eines Holzstäbchens oder das Aufsetzen eines Stempels, selbst wenn er die Platte nicht unmittelbar berührt, wird eine Änderung in der Gasatmosphäre bewirkt, und diese Änderung bewirkt an den verschiedenen Stellen eine verschiedene Kondensation der Dämpfe.

Um dieses nachzuweisen, versah Waidele Platte oder Stempel mit einer Gasatmosphäre, oder nahm sie ihnen und zeigte, daß er dadurch imstande war, die Bilder willkürlich zu ändern.

Daß eine Änderung der Gasatmosphäre eine verschiedene Kondensation der Dämpfe bewirkt, wies Waidele zunächst durch folgenden Versuch nach.

Wenn man auf eine mit einer Gasatmosphäre versehene Platte einen Körper von sehr großer Oberfläche bringt, dem durch Glühen seine Gasatmosphäre genommen ist, so muß nach dem Vorigen der Platte ihre Gasatmosphäre genommen werden. Wenn man daher eine Daguerresche Platte, eine mit Silber plattierte Kupferplatte, mit frisch geglühtem und dann unter Abschlufs der Luft erkaltetem Trippel oder Kohlenpulver belegt, und das Kohlenpulver mit reiner Baumwolle abkehrt, so ist der Platte ihre Gasatmosphäre genommen. Beim Behauchen zeigt diese Platte eine bräunliche Färbung, während eine an freier Luft gelegene Platte beim Behauchen eine bräunliche Färbung zeigt.

Bringt man die Platte aber mit einem Körper in Berührung, der an seiner großen Oberfläche eine dichte Gasatmosphäre besitzt, so wird die Platte an ihrer Oberfläche von dem Körper Gas aufnehmen und verdichten.

Waidele nahm nun eine Daguerresche Platte und belegte die eine Hälfte derselben mit frisch geglühtem und unter Abschlufs der Luft in einem Platintiegel erkaltetem, die andere Hälfte mit frisch geglühtem, welches in einem Strome von Kohlensäure erkaltetem Kohlenpulver und wie

¹⁾ Waidele, Poggend. Ann. Bd. LIX.

Platte mit reiner Baumwolle ab. Beim Behauchen zeigte die eine bläuliche, die andere eine bräunliche Färbung.

Die Platte in Quecksilberdampf gebracht, so kondensierte sich darauf der nicht mit Gas bedeckten Hälfte, die andere Hälfte blieb frei. Sieht man eine Platte mit einer Atmosphäre von Kohlensäure, in die mit Kohlenpulver bedeckt, welches in der angegebenen Weise war, und legt dann eine kleine flache Scheibe frisch geglühter Kohle auf dieselbe, so wird an der Stelle in sehr kurzer Zeit die Atmosphäre fortgenommen; behaucht man die Platte nach Entfernung der Kohle, so zeigt sie an der Stelle, wo diese lag, eine bläuliche, im übrigen eine bräunliche Färbung.

Setzt man einen Stempel, putzt ihn mit einer durch Alkohol befeuchteten Platte, so kann man ihn von seiner Gasatmosphäre befreien. Setzt man so frisch gereinigt auf eine mit Kohlensäure überzogene Platte, so wird das Gas von derselben fort. Wird die Platte nach Abheben vom Quecksilberdämpfen ausgesetzt, verdichten sich letztere vorzugsweise an den vom Stempel berührten Stellen.

Setzt man den Stempel in kohlenensäurehaltiges Kohlenpulver und setzt ihn auf eine von ihrer Gasatmosphäre befreite Platte, so nimmt die Platte nach Abheben des Stempels Kohlensäure auf. Wird die Platte nach Fortnahme des Stempels behaucht oder Quecksilberdämpfen ausgesetzt, so zeigt sich das Bild des Stempels, indem vorzugsweise an den Stellen sich der Dampf verdichtet, welche mit dem Stempel nicht in Berührung waren.

Setzt man dagegen einen frisch gereinigten Stempel auf eine frisch gereinigte Platte, so zeigt sich so gut wie kein Bild, die Dämpfe werden sich nicht kondensiert. Dasselbe ist der Fall, wenn man einen mit Kohlenpulver behauchten Stempel auf eine mit Kohlensäure bedeckte Platte legt.

Man stellte ferner einen mit Kohlensäure bedeckten Stempel nach und nach auf sechs verschiedene frisch gereinigte Silberplatten. Auf der ersten Platte blieb er ihn 30 Minuten, es zeigte sich beim Behandeln mit Quecksilberdampf ein deutliches Bild, auf die dritte und vierte Platte ließ er ihn eine Stunde, die dritte zeigte ein Bild, wenn auch schwach, auf der fünften Platte blieb er ihn nur die Spur eines Bildes. Auf der fünften und sechsten Platte ließ er den Stempel zwei Stunden stehen; sie zeigten gar kein Bild.

Der Versuch beweist auf das allerentschiedenste die Richtigkeit der Moserschen Erklärung, daß es eine Änderung der Gasatmosphäre auf der Platte sei, welche die Moserschen Bilder erzeugt. Denn bei den Versuchen war der Stempel mit der dichten Atmosphäre versehen, er wurde in kurzer Zeit von 30 Minuten kondensierte die Platte rings umher mit Luft an ihrer Oberfläche, die Bilder wurden deutlich und scharf; aber die Gasatmosphäre am Stempel abnahm und die Verdichtung auf der übrigen Platte größer wurde, um so undeutlicher wurde das Bild.

Somit sind also berechtigt, die Moserschen Bilder als eine Folge der an den Stellen geänderten Gasatmosphäre anzusehen; denn im allgemeinen werden die Gasatmosphären an den verschiedenen Körpern immer verschieden dicht sein, eine Berührung zweier Körper also auch an der Berührungstelle eine Änderung der Dichtigkeit hervorbringen.

Das wird selbst dann der Fall sein, wenn sich die Körper nicht unmittelbar berühren, da die Gasatmosphären eine gewisse Dicke haben müssen, und selbst wenn sie nicht so dick sind, daß sie in einander übergehen, doch ein Austausch zwischen denselben stattfinden muß¹⁾.

§ 114.

Molekularwirkungen zwischen Gasen und Flüssigkeiten. In gleicher Weise, wie die festen Körper die Gase anziehen und absorbieren, thun es auch die Flüssigkeiten.

Füllt man z. B. eine oben geschlossene Glasröhre, welche in Quecksilber taucht, mit Ammoniakgas, und bringt dann über das Quecksilber in die Röhre ein wenig Wasser, so steigt das Quecksilber sofort in der Röhre in die Höhe; ein Beweis, daß das Gas vom Wasser verschluckt ist.

Ein und dieselbe Flüssigkeit verschluckt von verschiedenen Gasen bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur verschiedene Mengen; verschiedene Flüssigkeiten von demselben Gase, unter sonst gleichen Umständen, ebenfalls verschiedene Mengen, so daß die Menge des absorbierten Gases bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur von der Natur des Gases sowohl, als auch der absorbierenden Flüssigkeit abhängt.

Seit Priestley, der zuerst die Absorption der Gase untersuchte, indem er nachwies, daß unter gewöhnlichem Barometerdrucke ein gegebenes Volumen Wasser ein gleiches Volumen Kohlensäure absorbiere, haben sich viele Physiker und Chemiker mit den Absorptionsercheinungen beschäftigt, und zu bestimmen gesucht, welche Gasmengen verschiedene Flüssigkeiten aufzunehmen imstande sind, und wie die aufgenommene Menge desselben Gases bei gleicher Flüssigkeit sich mit dem äußern Drucke, unter welchem das Gas steht, ändert.

Was die letztere Frage betrifft, so haben die Versuche von Henry²⁾ ergeben, daß das Volumen des von einer Flüssigkeit aufgenommenen Gases stets dasselbe ist, welches auch der äußere Druck ist, unter welchem sich das Gas über dem Wasser befindet. So absorbiert ein gegebenes Wasservolumen bei gewöhnlicher Temperatur (15°C.) ein nahezu gleiches Volumen Kohlensäure, ob nun die Kohlensäure in dem Raume, in welchem die Absorption vor sich geht, unter dem Drucke von einer oder mehreren Atmosphären steht. Da nach dem Mariotteschen Gesetze die Dichtigkeit eines Gases sich direkt verhält, wie der äußere Druck, so folgt daraus, daß die Gewichtsmengen des absorbierten Gases sich direkt verhalten, wie die äußeren Drucke, unter denen das Gas steht.

Kennt man darnach die Gasmenge, welche unter einem bestimmten Drucke absorbiert wird, so kann man daraus leicht für alle anderen Drucke die absorbierten Gasmengen berechnen.

Bunsen³⁾ nennt deshalb das auf 0° und den Druck von 760^{mm} reduzierte Gasvolumen, welches die Volumeinheit der Flüssigkeit unter

¹⁾ ncke, Poggend. Ann. Bd. CVIII.

²⁾ ry, Philos. Transact. for 1803. Part. I. p. 29. Gilbert, Ann. XI

³⁾ sen, Gasometrische Methoden. Braunschweig 1857. Liebig's Ann

menge von 760^{mm} absorbiert, den Absorptionskoeffizienten des Gases für die Flüssigkeit.

Diese Zahl gibt dann sogleich das Volumen an, welches unter irgend einem Drucke P absorbiert wird, und wir erhalten für die Gasmenge, welche diesem Volumen entspricht,

$$g = \frac{\alpha \cdot P}{760},$$

man wir mit α den Absorptionskoeffizienten bezeichnen und als Gasmenge das Volumen, welches eine gegebene Gasmenge unter dem Barometerdruck 1 760^{mm} einnimmt. Für die von dem Wasservolum h absorbierte Gasmenge erhalten wir dann

$$g = \frac{\alpha \cdot h \cdot P}{760}.$$

Kennt man in einem dem Eingangs erwähnten ähnlichen Versuche das Volumen des in der Röhre enthaltenen Gases V und den Druck P , unter dem es steht, die Differenz zwischen der Barometerhöhe und dem Niveauschied des Quecksilbers in und außer der Röhre, läßt man dann ein Flüssigkeitsvolumen h in die Röhre eintreten und bestimmt das Volum V' bei dem Druck P' des nach der Absorption übrigbleibenden Gasvolumens, kann man den Absorptionskoeffizienten leicht erhalten.

Die vor dem Versuche in dem Rohre enthaltene Gasmenge ist

$$\frac{V \cdot P}{760},$$

nach dem Versuche noch vorhandene $\frac{V' \cdot P'}{760}$, die absorbierte also

$$\frac{VP}{760} - \frac{V'P'}{760}.$$

Da der endliche Druck P' ist, so ist die Flüssigkeit unter diesem Drucke gesättigt. Nach dem Henryschen Gesetze verhalten sich die absorbierten Gasmengen wie die Drucke; unter dem Drucke 760^{mm} würde nach die absorbierte Gasmenge

$$\left(\frac{VP}{760} - \frac{V'P'}{760} \right) \frac{760}{P'} = \left(V \frac{P}{P'} - V' \right)$$

gesehen sein.

Diese Gasmenge würde beim Drucke 760 von der Flüssigkeitsmenge h absorbiert sein, das Flüssigkeitsvolumen 1 hätte demnach die Menge

$$\alpha = \frac{1}{h} \left(V \frac{P}{P'} - V' \right)$$

absorbiert. Diese Größe α ist es, welche wir den Absorptionskoeffizienten nennen.

Zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten der verschiedensten Gase mehrere Flüssigkeiten wandte Bunsen das Absorptiometer an, welchem folgende Einrichtung gab (Fig. 189). Ein seiner ganzen Länge nach in Wasser geteiltes kalibriertes Rohr c , welches oben geschlossen ist, ist in einem untern offenen Ende in eine Schraubenhülse b (Fig. 190) eingesetzt, welche der Schraubenmutter des kleinen Stuhles aa entspricht.

Die Bodenplatte des Stuhles *a* ist mit Kautschuk überzogen, so daß Hinabschrauben des Rohres *c* dessen unterer abgeschliffener Rand den Kautschuk drückt, und damit das Rohr geschlossen wird. 11

Fig. 189.

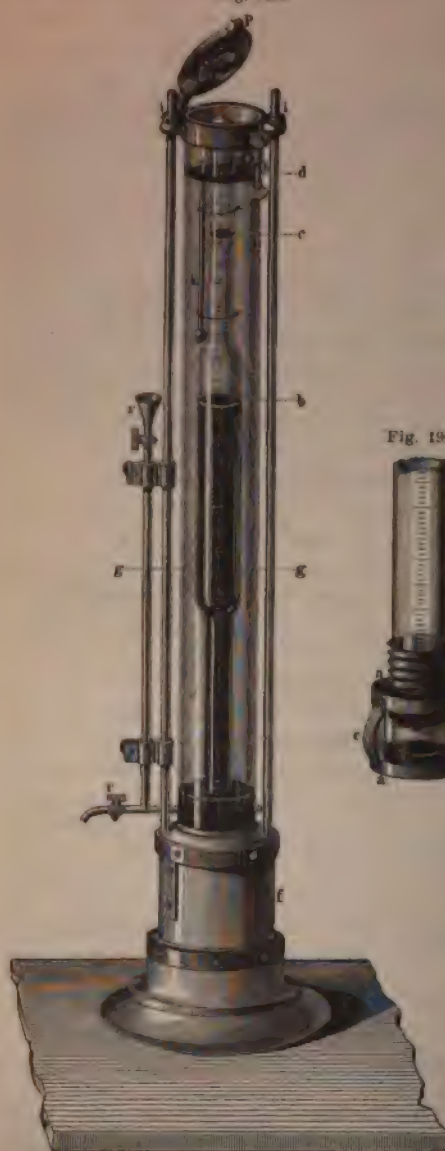
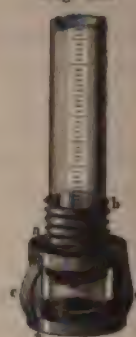


Fig. 190.



Federn *cc* am Stuhl (Fig. 190) passen in zwei Löcher des Fußes *f* (Fig. 190) und wenn man das Rohr *c* in den Fuß *f* einsetzt, drückt das Rohr *c* nur auf und ab, es wird nicht aber gedreht werden. Eine Drehung des Rohres wirkt deshalb ein Lösen der Festerziehen der Schrauben und damit eine Erhebung der Bodenplatte und des Rohres *c*, oder ein Drücken gegen dieselbe, um den dichten Verschluss von Rohr *c* dient als Absorptionsrohr. Das Rohr ist ganz nach Länge von Glaszylinder *gg* umhüllt. Der Cylinder ist mit seinen abgeschliffenen Rändern, auf Kautschukringe liegen, Fuß *f* und gegen den Rand des eisernen Ringes mittels der Schrauben *ii* gepreßt. Die Röhre *c* mit dem innern Raum des Cylinders *gg* kommuniziert zum Eingießen und Ablassen von Quecksilber, um den im Innern des Absorptionsrohres *c* regulieren zu können. Der weitere Cylinder ist mit Quecksilber mit Wasser gefüllt, um das Absorptionsrohr auf konstanter Temperatur zu erhalten, welche mit dem Thermometer *k* bestimmt wird. Der äußere Cylinder kann durch den Deckel *p* fest verschlossen werden, in dessen Mitte eine mit einer Kautschukplatte überzogene eiserne Platte liegt.

Kopf des Absorptionsrohres *c* drückt, um dasselbe unveränderlich zu stellen.

Die Versuche werden folgendermaßen angestellt. In einer

überwanne läßt man in das zunächst ganz mit Quecksilber gefüllte Absorptionsrohr das zu untersuchende Gas einsteigen, und mißt das Volum V des Gases und den Druck P , unter dem es steht, um die Gasmenge (das auf 0° und 760^{mm} Druck reducierte Volum) zu erhalten. Darauf läßt man über das Quecksilber ein gemessenes Volum h völlig luftfreien Wassers eintreten, schließt das Rohr mittels des Stuhles a und setzt es in den Boden f des mit Quecksilber und darüber vollständig mit Wasser gefüllten Cylinders g ein.

Durch eine kleine Drehung öffnet man dann das Absorptionsrohr, setzt dadurch den Druck im Innern desselben mit dem äußern Druck ins Gleichgewicht, verschließt es wieder und schüttelt dann den ganzen Apparat eine Minute lang auf das heftigste, öffnet dann wieder das Absorptionsrohr, um die Drucke neuerdings auszugleichen, schließt und schüttelt wieder und so fort, so lange bis beim Öffnen des Absorptionsrohres keine Volumänderung des Gases mehr eintritt.

Darauf wird das Volum V_1 des rückständigen Gases und sein Druck P_1 bestimmt, und wir haben alle Daten zur Bestimmung des Absorptionscoefficients α .

Um V_1 und P_1 zu bestimmen, bedarf es außer der Beobachtung des Barometer und Thermometer k folgender Ablesungen, die mit dem Kathetometer gemacht werden.

1. Bestimmung des Quecksilberniveau b im Absorptionsrohr.
2. Bestimmung des obern Wasserniveau im Absorptionsrohr c .
3. Bestimmung des Quecksilberniveau a (Fig. 189) und
4. Bestimmung des Wasserniveau d im äußern Cylinder gg .

Um den Gang des Versuches und der Berechnung deutlich zu machen, wird es am besten sein, einen Versuch Bunsens vollständig vorzuführen, es ist ein Versuch über Absorption des Stickstoffes.

Um V und P zu bestimmen, dienen folgende Daten. Ehe Wasser in das Absorptionsrohr eingelassen war, fand sich:

Der Unterschied der Quecksilberniveaus im Absorptionsrohr und der Quecksilberwanne	315 ^{mm} ,1
Barometerstand	744 ,4
Druck des trockenen Stickstoffs	$P = 429^{\text{mm}},3$
Volumen des Gases unter diesem Drucke	$V = 32 ,608$.

Darauf wurde Wasser eingelassen und in der vorhin beschriebenen Weise operiert; es fand sich am Schlusse des Versuchs

Barometerstand	$\delta = 743,8$
Quecksilberniveau bei b	$b = 350,7$
Quecksilberniveau bei a	$a = 352,2$
Differenz der Niveaus	$\delta_1 = 1,5$
Höhe der Wassersäule in e , $cb =$	$w^* = 285,2$
Höhe der Wassersäule im Cylinder $ad =$	$w_1 = 344,2$
Differenz beider, also auf das Gas in e drückende Wassersäule $w_1 - w^* =$	$59,0$
Diese Differenz auf Quecksilberdruck reduciert	$q = 4,4$.

Somit ist der innere Druck des Gases im Absorptiometer stärker als der der äußern Atmosphäre, da der Unterschied der Quecksilberniveaus 1^{mm},5 beträgt, dagegen durch die höhere Wassersäule in gg nach dem

Innern von c hin ein Druck ausgeübt wird, der gleich $4^{\text{mm}},4$ Quecksilberdruck ist. Um P_1 zu erhalten, müssen wir demnach zu dem Barometerstande δ die Differenz dieser Drucke oder $2^{\text{mm}},9$ addieren. Darnach würde

$$P_1 = 746^{\text{mm}},8.$$

An diesem Drucke müssen wir aber noch eine Korrektur anbringen. Wir werden später in der Wärmelehre sehen, daß ebenso wie die Gase, so auch die Dämpfe auf die Wände der Gefäße, in denen sie eingeschlossen sind, einen Druck ausüben, der sich mit der Temperatur ändert. Das Wasser im Absorptionsrohre verdampft und füllt den Raum über dem Wasser mit Dampf an. Dieser Dampf drückt das Quecksilber herab, und zwar bei der zu $19^0,2$ beobachteten Temperatur des Absorptiometers um $16^{\text{mm}},3$. Wäre demnach kein Wasserdampf im Absorptiometer, so würde das Niveau des Quecksilbers im Absorptiometer um $16^{\text{mm}},3$ höher stehen. Der Druck P_1 des trockenen Stickstoffgases ist demnach um diese Größe kleiner, oder

$$P_1 = 730^{\text{mm}},5.$$

Das Volumen V_1 des nicht absorbierten Gases war auf 0^0 reduziert

$$V_1 = 16,52.$$

Und schließlich das absorbierende Wasservolumen

$$h = 182,37.$$

Darnach wird der Absorptionskoeffizient

$$\alpha = \frac{1}{h} \left(V \frac{P}{P_1} - V_1 \right) = \frac{1}{182,37} \left(32,608 \frac{429,33}{730,5} - 16,52 \right)$$

$$\alpha = 0,01448,$$

das heißt, das Wasservolumen 1 absorbiert bei der Temperatur von $19^0,2$ 0,01448 seines Volumens an Stickstoff.

Bunsen fand, daß der Absorptionskoeffizient sich mit der Temperatur der absorbierenden Flüssigkeit ändert. Ein Gesetz dieser Änderung ließ sich nicht erkennen, man mußte sich begnügen, eine empirische Formel aufzustellen, um die Werte von α zu bestimmen.

Die Formeln von Bunsen haben alle die Gestalt

$$\alpha = a + bt + ct^2,$$

worin t die Temperatur in Graden nach der hundertteiligen Skala a, b, c drei für jedes Gas und jede Flüssigkeit verschiedene Konstanten sind, welche durch eine Anzahl, wenigstens drei Versuche bei verschiedenen Temperaturen zu bestimmen sind.

Für Stickstoff in Wasser ist z. B.

$$\alpha = 0,020346 - 0,00053887t + 0,000011156 \cdot t^2.$$

Für Stickstoff in Alkohol aber

$$\alpha = 0,126338 - 0,000418t + 0,0000060t^2.$$

Diese Formeln gelten jedoch nur bis zu ungefähr 20^0 , bis wohin Versuche reichen.

Wir lassen hier eine Reihe der Absorptionskoeffizienten der wichtigsten

e, welche Bunsen untersuchte, folgen, für Wasser und Alkohol bei der Temperatur 15°.

Namen der Gase	α in Wasser	α in Alkohol
Stickstoff	0,014 78	0,121 42
Wasserstoff	0,019 30	0,067 25
Sauerstoff	0,029 89	0,283 97
Kohlensäure	1,002 0	3,199 3
Kohlenoxydgas	0,024 32	0,204 43
Stickoxydul	0,777 8	3,267 8
Grubengas	0,039 09	0,482 80
Ethyl	0,161 5	2,882 5
Äthyl	0,021 47	—
Methyl	0,050 8	—
Schwefelwasserstoff	3,232 6	9,539
Schwefelige Säure	43,564	144,55
Ammoniak	727,2	—
Atmosphär. Luft	0,017 95	—

Mit Hülfe des Henryschen Gesetzes und der von Bunsen bestimmten Absorptionskoeffizienten ist man auch imstande, die Absorption eines Gases oder die Mengen zu bestimmen, welche von den einzelnen Gasen eines Gemisches absorbiert werden, umgekehrt aber auch, wenn man die Zusammensetzung des absorbierten Gases bestimmen kann, daraus die Zusammensetzung des Gasgemisches zu berechnen, welches der Absorption ausgesetzt wurde.

Ein Volumen atmosphärischer Luft besteht z. B. aus 0,79 Stickstoff, 0,21 Sauerstoff. Übt dasselbe den Druck p aus, so ist der Druck des Stickstoffes $0,79 p$ und der des Sauerstoffes $0,21 p$. Ist der Absorptionskoeffizient des Stickstoffes α_1 , der des Sauerstoffes α_2 , so ist die von einem Gasvolumen h aus der Luft absorbierte Menge Stickstoff

$$g_1 = \frac{\alpha_1 \cdot h \cdot 0,79 p}{760},$$

des Sauerstoffes
$$g_2 = \frac{\alpha_2 \cdot h \cdot 0,21 p}{760}.$$

Setzen wir $h = 1$, $p = 760$, so muß $g_1 + g_2$ gleich dem Absorptionskoeffizienten für atmosphärische Luft sein. Die Rechnung gibt mit Versuche übereinstimmend

$$g_1 + g_2 = 0,79 \cdot 0,014 78 + 0,21 \cdot 0,029 89 = 0,017 95$$

absorptionskoeffizient für atmosphärische Luft bei 15°.

Hat man allgemein ein Gasgemisch unter dem Drucke p , welches r_1 Teile Gases, r_2 eines zweiten, $r_3, r_4 \dots r_n$ Teile eines 3, 4 $\dots n$ Gases enthält, so sind die von jedem Gase absorbierten, in der Volumeinheit enthaltenen Gas Mengen

$$g_1 = \alpha_1 \cdot r_1 \frac{p}{760}$$

$$g_2 = \alpha_2 \cdot r_2 \frac{p}{760}$$

$$\vdots$$

$$g_n = \alpha_n \cdot r_n \cdot \frac{p}{760}.$$

Kennt man die Zusammensetzung des zur Absorption verwandten Gases nicht, aber kann man die Zusammensetzung des absorbierten Gases und somit $g_1, g_2, g_3 \dots$ bestimmen, so kann man daraus $r_1, r_2 \dots$ oder die Zusammensetzung des zur Absorption verwandten Gases berechnen. Auf diese Weise hat Bunsen der Absorptimetrie in der Analyse der Gase eine wichtige Anwendung gegeben.

§ 115.

Ausströmen der Gase. Wenn in die Wand eines mit Gas unter dem Drucke p gefüllten Gefäßes eine Öffnung gemacht wird und vor der Öffnung weniger dichtes Gas oder ein leerer Raum ist, so strömt das Gas aus der Öffnung hervor, um so rascher, je höher der Druck ist, unter welchem das Gas im Gefäße steht und je geringer die Spannung des äußern Gases ist. Wegen der freien Beweglichkeit der Teile, welche die Gase mit den tropfbaren Flüssigkeiten gemein haben, müssen auch die Ausströmungsgesetze der Gase mit denen der Flüssigkeiten übereinstimmen.

Wir gelangen daher zur Bestimmung der Geschwindigkeit, mit welcher ein Gas aus einer Öffnung in der Wand eines Gefäßes, in welchem es unter stärkerem Druck steht, als der Druck außerhalb des Gefäßes ist, ausströmt, durch Anwendung ganz derselben Principien, welche wir auch § 84 angewandt. Wir denken uns zunächst das Gas im Innern des Gefäßes unter einem konstantem Drucke p_0 und ebenso werde der Druck außerhalb der Öffnung konstanter Höhe erhalten, so daß ein stationärer Strömungszustand eintritt. Das Kennzeichen dieses stationären Zustandes ist dann, daß durch jeden Querschnitt, durch welchen das Gas hindurchtritt, in gleichen Zeiten gleiche Mengen des Gases hindurchgehen müssen. Haben wir deshalb zwei Querschnitte Q und Q_1 und sind die mittleren gegen diese Querschnitte senkrechten Geschwindigkeiten u und u_1 , so sind die durch die Querschnitte in der Zeiteinheit hindurchtretenden Gasvolumina $Q \cdot u$ und $Q_1 \cdot u_1$. Diese Volumina entsprechen aber nur dann gleiche Mengen, wenn in diesen Querschnitten die Drucke, welchen die Gase dort ausgesetzt sind, gleich sind, da nur dann die Dichtigkeit des Gases dieselbe ist. Sind die Drucke nicht gleich, sondern ist der Druck im Querschnitt Q gleich P , im Querschnitt Q_1 gleich P_1 , so ist die Dichtigkeit im Querschnitt Q gleich s , im Querschnitt Q_1 gleich s_1 , und die durch diese Querschnitte hindurchfließenden Gasmengen, die einander gleich sein müssen, sind

$$s Q u = s_1 Q_1 u_1.$$

Da nun, bei der von uns als überall gleich vorausgesetzten Temperatur nach dem Mariotteschen Gesetze

$$s : s_1 = P : P_1,$$

so können wir die Gleichung schreiben

$$P \cdot Q \cdot u = P_1 \cdot Q_1 \cdot u_1.$$

Eine weitere Beziehung erhalten wir auch hier wieder durch die Bemerkung, daß bei dem stationären Zustande die Gase sich in konstanten Bahnen bewegen; denken wir uns deshalb wieder, wie in § 84 einen Kanal OA mit überall gleichem Querschnitt q durch das Gas gelegt, so können wir

die Geschwindigkeitsänderung bestimmen. Sei Fig. 191 $MMNN$, aus dem das Gas aus einer engen Öffnung ausfließt, in welchem der Gasdruck etwa dadurch erhalten wird, daß das Gefäß mit einem gelegenen Wasserreservoir R , welches auf konstantem Niveau steht, in Verbindung steht. Sei OA der betrachtete Kanal, und m und n zwei unendlich nahe Querschnitte. Tritt das Gas durch den Querschnitt m mit der Geschwindigkeit v , so ist die in der Zeit dt durch m hindurchfließende Gasmenge gleich $s \cdot q \cdot v \cdot dt$. In derselben Zeit dt fließt das Gas den Querschnitt n mit der Geschwindigkeit $v + dv$ durch, so daß die in der Zeit dt durch n fließende Gasmenge gleich $s \cdot q \cdot (v + dv) \cdot dt$ ist. In derselben Zeit dt erfährt die Bewegung des Gases eine Änderung dv ; die Bewegungsgleichung lautet also zu um

$$\frac{s}{g} q v dt dv.$$

3 Zunahme der Bewegungsgleichung durch die in der Zeit dt durch n fließende Gasmenge $q dv$ Kraft erteilt; als solche haben nur die Änderung dp des Gasdrucks zu betrachten, da dieser gegenüber der Wirkung der Schwerkraft der geringen Gewichte der Gase vernachlässigt werden darf. Ändert sich der Druck von p bis $p + dp$, so ist $q dp$ die Größe der wirksamen Kraft, die wir die Gleichung erhalten

$$\frac{s}{g} q v dt dv = - q dp dt,$$

4 auf der rechten Seite das negative Vorzeichen setzen müssen, weil der Druck abnehmende Geschwindigkeit, abnehmendem Druck entspricht. Bezeichnen wir die Dichtigkeit bei dem Drucke π der Atmosphäre mit σ , so ist, wenn p den Druck und m den Querschnitt bedeutet,

$$s = \frac{\sigma}{\pi} p,$$

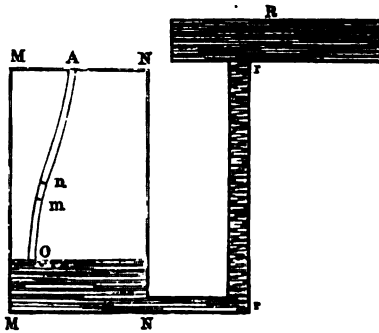
5 unsere Gleichung

$$\frac{\sigma}{\pi g} p q v dt dv = - q dp dt$$

$$v dv = - \frac{\pi g}{\sigma} \frac{dp}{p}.$$

6 Die Geschwindigkeit an der Grenze des Gases bei O gleich v_0 , dort der Druck p_0 , so erhalten wir die Geschwindigkeit, welche das Gas bei dem Druck p besitzt, indem wir auf beiden Seiten der Gleichung integrieren, wie im § 84, auf der linken von v_0 bis v , auf der rechten von p_0 bis p .

Fig. 191.



Diese Summen sind, wie wir schon öfter sahen, nach E VIII, 1 und E 2

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p}.$$

Da wir über die Lage des gedachten Gaskanals gar keine besondere Voraussetzung gemacht haben, so gilt, wie wir schon § 84 für die fließende Flüssigkeit bemerkten, diese Gleichung für die ganze ausströmende Gasmasse, es ist überall dort die Geschwindigkeit der strömenden Gas gleich v , wo der Druck gleich p ist.

Bezeichnen wir den Druck in der Ausströmungsöffnung mit p_1 , die Geschwindigkeit des Gases dort mit v_1 , so erhalten wir

$$v_1^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) = 2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}.$$

Um schließlich das Verhältnis $\frac{v_0}{v_1}$ zu bestimmen, setzen wir wir voraus, daß in der Fläche bei O , wo die Bewegung des Gases beginnt in der Öffnung bei A , die wir als sehr klein nehmen, die Geschwindigkeiten v_0 und v_1 die mittlern gegen die betreffenden Querschnitte s rechten Geschwindigkeiten seien. Ist dann Q der Querschnitt des Gefäßes q_1 der der Öffnung, so ist

$$p_1 q_1 v_1 = p_0 Q \cdot v_0$$

$$\frac{v_0}{v_1} = \frac{p_1 q_1}{p_0 Q}$$

und damit

$$v_1^2 = \frac{2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}}{1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q}\right)^2}.$$

Ist der Querschnitt der Öffnung gegen jenen des Gefäßes hinreichend klein, so können wir, da auch $p_1 < p_0$ sein muß, wenn überhaupt ein Strömen stattfindet, das zweite Glied des Nenners vernachlässigen, dann wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \pi g}{\sigma} \log \frac{p_0}{p_1}}.$$

Der Ausdruck für v_1 wird einfacher, wenn der Druck p_0 nur wenig von dem Drucke p_1 in der Ausflußöffnung verschieden ist. Wir erhalten zunächst

$$\log \frac{p_0}{p_1} = -\log \frac{p_1}{p_0} = -\log \left(1 - \frac{p_0 - p_1}{p_0}\right).$$

Nun ist, wie in der Analysis bewiesen wird,

$$-\log \left(1 - \frac{p_0 - p_1}{p_0}\right) = \frac{p_0 - p_1}{p_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{p_0 - p_1}{p_0}\right)^3 + \dots$$

Wenn p_0 nur wenig größer als p_1 ist, so können in dieser Reihe Glieder nach dem ersten vernachlässigt werden, und es wird

$$v_1 = \sqrt{\frac{2 \pi g}{\sigma} \cdot \frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

ergibt sich somit, daß bei kleinen Überdrucken die Geschwindigkeit ausströmens bei einem und demselben Gase der Quadratwurzel aus dem Quotienten des Überdruckes $p_0 - p_1$ und des Druckes im Gasbehälter proportional ist; bei gleicher Druckdifferenz $p_0 - p_1$ nimmt also die Ausströmgeschwindigkeit proportional der Quadratwurzel aus dem Drucke p_0 ab. Für Luft von der Temperatur 0° wird der Wert des Koeffizienten v_1 , da die Dichtigkeit der Luft bei dem Drucke der Atmosphäre Quecksilber, gleich 0,001 293 ist, und die Dichtigkeit des Quecksilbers gleich 13,59 ist,

$$\sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,76 \cdot 13,59 \cdot 9,808}{0,001\,293}} = 396^m,002,$$

$$v_1 = 396^m,002 \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

zeichnen wir das spezifische Gewicht irgend eines andern Gases, für Luft gleich 1 gesetzt, mit d , so erhalten wir für die Ausströmgeschwindigkeit desselben

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma \cdot d}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}} = \frac{396^m,002}{\sqrt{d}} \cdot \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Für gleichen Druck p_0 und p_1 ist die Ausströmgeschwindigkeit verschiedener Gase der Quadratwurzel aus ihrer Dichtigkeit umgekehrt proportional.

Die Prüfung dieser Sätze durch Messung der Geschwindigkeit v_1 ist möglich, da die Geschwindigkeit des Gases in der Ausströmöffnung sich messen läßt. Dieselbe ist dagegen möglich, indem man die Menge des ausgeflossenen Gases mißt.

Man kann das am besten, indem man bei einer der in Fig. 191 angegebenen ähnlichen Vorrichtung die Volumverminderung des Gases in dem Gefäße mißt, welche sich unmittelbar aus dem Volumen oder Gewichte der ausfließenden Flüssigkeit ergibt. Ist der Querschnitt der Öffnung q_1 , so ist in der Sekunde ausfließende Gasvolumen

$$w_1 = q_1 \cdot v_1.$$

Wenn dieses Volumen aus der Öffnung bei dem Drucke p_1 hervortritt, so ist in dem Gefäße, in welchem der Druck, wenn wir dasselbe als ein geschlossenes Reservoir voraussetzen, überall gleich p_0 ist, ein Volumen w , nach dem Mariotteschen Gesetze sich ergibt

$$w : w_1 = p_1 : p_0$$

$$w = \frac{w_1 p_1}{p_0} = q_1 \frac{p_1}{p_0} \cdot \sqrt{\frac{2\pi g}{\sigma \cdot d}} \sqrt{\frac{p_0 - p_1}{p_0}}.$$

Ist man die Gase in die freie Luft ausströmen und wendet nur einen Überdruck an, so kann man für den Druck in der Ausströmöffnung den Druck der äußern Atmosphäre einsetzen, und erhält dann, wenn in Quadratmetern gegeben ist, das Volumen der ausgeflossenen Gase in Kubikmetern.

Die Versuche ergeben auch hier, wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten, daß die wirkliche Ausflußmenge kleiner ist als die theoretische, während indes bei den tropfbaren Flüssigkeiten der sogenannte Erfahrungskoeffizient konstant war, scheint er bei den Gasen mit wachsendem p_0 etwas abzunehmen, schon innerhalb der Grenze, bei welcher die genäherte Formel noch ausreicht, was bis etwa 1^m Wasserdruck als Druck der Fall ist. Bei sehr geringen Differenzen der Drucke p_0 zwischen 0^m,028 und 0^m,14 Wasserdruck fand D'Aubuisson¹⁾ die Erfahrungskoeffizienten bei Öffnungen in dünner Wand

$$\mu = 0,65,$$

Weisbach²⁾ erhielt bei ähnlichen Verhältnissen

$$\mu = 0,671,$$

also sehr nahe mit dem übereinstimmend, mit welchem man die theoretisch berechnete Ausflußmenge der Flüssigkeiten multiplicieren muß, um die beobachtete Ausflußmenge zu erhalten.

G. Schmidt³⁾ erhielt für eine Druckhöhe von 0^m,913 als Koeffizient

$$\mu = 0,52$$

und einen nicht viel davon verschiedenen Wert bestimmte Koch⁴⁾ für das Ausströmen der Luft aus Öffnungen in dünner Wand.

Diese Verschiedenheit der Resultate aus den Beobachtungen und der Theorie weist darauf hin, daß bei der theoretischen Entwicklung des Ausflußgesetzes nicht alle Umstände in Betracht gezogen sind, welche die Bewegung des Gases von Einfluß sind. Wir erkennen dieselben bei den ähnlichen Verhältnissen wie bei den Flüssigkeiten, das Gas bewegt sich von allen Seiten gegen die Öffnung hin und dadurch wird die gleichmäßige Öffnung senkrechte Geschwindigkeit des ausfließenden Gases gestört.

Den experimentellen Beweis dafür liefert uns der Einfluß von den Röhren an die Gefäßöffnung auf die Menge des ausfließenden Gases. Nach den Versuchen von D'Aubuisson, Schmidt, Koch und Weisbach war die Menge des ausfließenden Gases durch solche Röhren ähnlich wie bei den tropfbaren Flüssigkeiten größer, so lange die Röhren nicht zu eng und zu lang sind. Nach den Versuchen von D'Aubuisson ist für kurze cylindrische Röhren, deren Länge gleich ist dem fünffachen Durchmesser $\mu = 0,93$, für kurze konische Ansatzröhren, den engern Durchmesser nach gekehrt, $\mu = 0,93$, Weisbach findet für cylindrische Ansatzröhre $\mu = 0,883$ für konische 0,883.

Schmidt findet für konische Ansatzröhren, wenn der größere Durchmesser nach außen gekehrt ist, μ noch um vieles größer, nämlich 1, daß also die beobachtete Ausflußmenge selbst größer ist als die theoretisch berechnete.

Wendet man anstatt kurzer verhältnismäßig weiter Ansatzröhren enge Röhren an, so zeigt sich auch hier ähnliches wie bei den tro-

¹⁾ D'Aubuisson, Annales de chim. et de phys. XXXII.

²⁾ Weisbach, Experimental-Hydraulik p. 184 ff.

³⁾ G. G. Schmidt, Gilbert Annalen LXVI.

⁴⁾ Fr. L. Koch, Versuche und Beobachtungen über die Geschwindigkeit und Quantität verdichteter Luft, welche aus Öffnungen etc. ausströmt, Göttingen.

Flüssigkeiten; der Ausfluß der Gase folgt ganz andern Gesetzen als bei Anwendung von Öffnungen in dünnen Wänden. Nach den ausgedehnten Versuchen von Girard¹⁾ verhalten sich die Ausflussmengen bei nicht zu engen Röhren direkt wie die Drucke, unter welchen das ausfließende Gas steht, und umgekehrt wie die Quadrate der Röhrenlängen, durch welche das Gas abfließt.

Daß die Ausflusgeschwindigkeit der Gase der Quadratwurzel aus ihrer Dichtigkeit umgekehrt proportional ist, kann man am bequemsten dadurch nachweisen, daß man gleiche Volume verschiedener Gase unter denselben Druckverhältnissen aus einer engen Öffnung ausströmen läßt, und die dazu erforderliche Zeit beobachtet. Die Quadrate dieser Zeiten müssen sich dann verhalten wie die Dichtigkeiten der Gase. Bunsen hat diese Methode angewandt und darauf ein Verfahren gegründet, die specifischen Gewichte der Gase mit einander zu vergleichen²⁾, ein Verfahren, welches besonders für technische Zwecke, wie zu Dichtigkeitsbestimmungen von Leuchtgas, sehr bequem ist.

Läßt man verschiedene Gase durch lange Röhrenleitungen gehen, so hängt nach den Versuchen von Girard die Ausflusgeschwindigkeit nicht mehr von der Dichtigkeit des Gases ab; unter Voraussetzung gleicher Druckverhältnisse ist die Ausflusgeschwindigkeit für die verschiedenen Gase dieselbe.

Noch in einer andern Weise können wir die abgeleiteten Gleichungen prüfen, indem wir aus ihnen die Verteilung des Druckes in der strömenden Gasmasse berechnen. Bezeichnen wir in irgend einem Querschnitt q der strömenden Gasmasse den Druck mit p , die Geschwindigkeit mit v , so erhalten wir für die Ausflusgeschwindigkeit v_1 , wenn in der Ausflußöffnung der Druck gleich p_1 ist, aus der vorhin aufgestellten Gleichung

$$v dv = - \frac{\pi g}{\sigma} \frac{dp}{p},$$

indem wir jetzt von v bis v_1 und von p bis p_1 summieren

$$v_1^2 \left(1 - \frac{v^2}{v_1^2} \right) = 2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p}{p_1},$$

die Gleichung, welche uns mit Hülfe der Beziehung

$$pqv = p_1 q_1 v_1,$$

welche gilt, wenn wir eine derartige Form des Gefäßes und der Ausflußöffnung voraussetzen, daß wir die Geschwindigkeiten als senkrecht zu den betreffenden Querschnitten annehmen dürfen, den in den verschiedenen Querschnitten des Gefäßes vorhandenen Druck p zu berechnen gestattet. Zunächst erhalten wir

$$v_1^2 \left(1 - \left(\frac{p_1}{p} \right)^2 \left(\frac{q_1}{q} \right)^2 \right) = 2 \frac{\pi g}{\sigma} \log \frac{p}{p_1}.$$

¹⁾ Girard, Mémoires de l'Académie de l'Institut de France. T. V.

Neuere Versuche:

Saint-Venant und Wantzel, Comptes rendus de l'Acad. de Paris. T. XVII.

²⁾ Bunsen, Gasometrische Methoden. p. 128 ff.

Setzen wir nun voraus, daß das Ausfließen überhaupt nur kleinen Drucken erfolge, so können wir zunächst setzen

$$\log \frac{p}{p_1} = \log \left(1 + \frac{p-p_1}{p_1} \right) = \frac{p-p_1}{p_1}$$

und weiter

$$\left(\frac{p_1}{p} \right)^2 = \left(\frac{p}{p_1} \right)^{-2} = \left(1 + \frac{p-p_1}{p_1} \right)^{-2} = 1 - 2 \frac{p-p_1}{p_1} + 3 \left(\frac{p-p_1}{p_1} \right)^2 +$$

und können in dieser Reihe schon das dritte Glied vernachlässigen. erhalten wir

$$v_1^2 \left\{ 1 - \left(\frac{q_1}{q} \right)^2 + 2 \frac{p-p_1}{p_1} \left(\frac{q_1}{q} \right)^2 \right\} = 2 \frac{\pi g}{\sigma} \frac{p-p_1}{p_1}$$

und daraus

$$\frac{p-p_1}{p_1} = \frac{q^2 - q_1^2}{\frac{2\pi g}{\sigma v_1^2} q^2 - 2q_1^2}$$

oder, indem wir im Nenner rechts v_1^2 durch seinen Wert

$$v_1^2 = \frac{2\pi g}{\sigma} \frac{p_0 - p_1}{1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q} \right)^2}$$

ersetzen,

$$\frac{p-p_1}{p_1} = \frac{(q^2 - q_1^2) \left(1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q} \right)^2 \right)}{\frac{p_1}{p_0 - p_1} q^2 - 2 \left(1 - \left(\frac{p_1 q_1}{p_0 Q} \right)^2 \right) q_1^2}$$

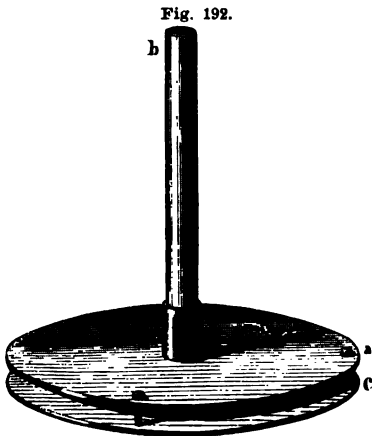
Das Vorzeichen auf der rechten Seite hängt davon ab, ob $q > q_1$ oder $q < q_1$, denn da unsere ganze Entwicklung nur gilt, so lange $p_0 - p_1$ sehr klein ist, so ist der Nenner der rechten Seite bei allen

Praxis herzustellenden Vorrichtung positiv zu nehmen. Dann ergibt sich, daß in allen Querschnitten, welche größer sind als die Ausflußöffnung, $p > p_1$, der Druck positiv ist, in allen, welche kleiner sind als die Ausflußöffnung, dagegen $p < p_1$. Läßt man deshalb Gas oder Luft in die Atmosphäre ausströmen, so daß die Ausflußöffnung der Druck p_1 gleich dem äußeren Atmosphärendruck ist, so wird an allen Stellen, an welchen das strömende Gas einen Querschnitt besitzt, der kleiner ist als die Ausströmöffnung, der Druck kleiner als der Atmosphärendruck.

Mit Hilfe des kleinen App

Fig. 192 kann man diesen gerin

Druck leicht nachweisen. Eine Glasröhre mündet in der Mitte einer Scheibe. In einiger Entfernung von letzterer ist eine zweite nicht durchlöcher



mittels dreier Drähte festgehalten, welche sich der Mündung der Röhre nähern kann. Bläst man kräftig in die Röhre bei *b* hinein, so sieht man, wie sich die Scheibe *c* der Schwere entgegen zur Scheibe *a* hinbewegt, indem Moment die Öffnung der Röhre verschließt, dann wieder abgestoßen wird, wieder sich gegen *a* hinbewegt und so auf und nieder sich bewegt, solange man in die Röhre hineinbläst. Die Ausflußöffnung ist hier die ringförmige Spalte zwischen den Rändern der beiden Scheiben, nach welcher in der Mitte aus die Luft sich auf den Rändern hinbewegt. Die einzelnen durch den Mittelpunkt der Scheibe *a* gelegten zur Scheibe *a* und *c* senkrechten kreisförmigen Schnitte bilden also die verschiedenen Querschnitte, welche somit alle kleiner sind als die Ausflußöffnung, so daß auf die ganze Scheibe von unten nach oben ein stärkerer Druck wirkt als von oben nach unten. In dem Augenblicke aber, in welchem infolge dieses Druckes die Scheibe *c* sich vor die Öffnung der Röhre legt, die Luft also am Ausfließen verhindert wird, tritt der statische Druck der in der Röhre *b* verdichteten Luft in Wirksamkeit, und treibt die Platte fort, welche dann wieder gegen *a* bewegt wird, und so fort.

Mit der Anordnung Fig. 193 kann man diesen kleinern Druck ebenso sichtbar machen. Man steckt in ein weiteres Glasrohr *A*, an welches

ein kleines Manometerrohr *M* angeschmolzen ist, mit einem Stopfen ein engeres Rohr *b* und schiebt dasselbe soweit hinein, daß das Ende sich in dem Querschnitt befindet, in welchem das Manometerrohr angeschmolzen ist. Füllt man das Manometer mit Wasser, so bläst durch das Röhrrchen, so steigt das Wasser in dem Winkel des Manometerrohres

Fig. 193.



vor, welcher mit der Röhre *A* in Verbindung steht. Die Niveaudifferenz in beiden Röhren gibt die Differenz der Drucke in der Mündung des einen Rohres und an der Ausflußöffnung.

§ 116.

Reibung der Gase. Die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Bedingungen gelten nur für das Ausfließen der Gase durch eine Öffnung in einer Wand oder durch Röhren, welche einen im Verhältnis zu ihrer Länge nicht zu kleinen Querschnitt haben; läßt man die Gase durch millare Röhren ausfließen, so werden, wie das sich zuerst aus ausgedehnten Versuchen von Graham¹⁾ ergab, die Gesetze des Anflusses wie bei Flüssigkeiten ganz andere, welche beweisen, daß auch bei den Gasen eine innere Reibung vorhanden ist, und ebenso eine Reibung an den Wänden der Röhre, durch welche die Gase fließen.

Daß in der That bei den Gasen eine innere Reibung vorhanden sein muß, und welchen Gesetzen dieselbe folgen muß, ergibt sich unmittelbar

¹⁾ Graham, Philosophical Transactions of London R. S. for the year 1846 1849.

aus der dynamischen Gastheorie, wie zuerst Maxwell¹⁾ aus seiner alten, wie wir erwähnten, im wesentlichen mit derjenigen von Clausius übereinstimmenden Anschauung über die Natur der Gase abgeleitet hat. Später ist dann die Theorie der Reibung in einfacherer Weise von O. E. Meyer²⁾ behandelt worden, und noch einfacher von v. Lang³⁾.

Wir denken uns zu dem Ende eine Gasmasse, welche nach einer Richtung strömt, nehmen an, daß die einander parallelen Schichten mit verschiedener Geschwindigkeit strömen, und untersuchen, welche Verzögerung eine Schicht dadurch erhalten muß, daß die an einer Seite neben ihr befindliche eine kleinere Strömungsgeschwindigkeit hat. Denken wir uns jetzt durch die strömende Gasmasse der Strömungsrichtung parallel, und zwar so eine Ebene gelegt, daß die sämtlichen in einer der Ebene parallelen Gasschicht liegenden Teilchen dieselbe Strömungsgeschwindigkeit haben, daß aber mit der Entfernung von der Ebene nach der einen Seite die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung zunimmt, nach der andern Seite mit wachsender Entfernung abnimmt. In einer ruhenden Gasmasse haben nach der von uns vorgetragenen Theorie alle Moleküle dieselbe Geschwindigkeit, welche nach allen Richtungen des Raumes gerichtet ist, so daß keine Richtung vor der andern bevorzugt ist. In einer parallel einer bestimmten Richtung bewegten Gasmasse haben die Moleküle zunächst diese, von uns bisher mit u bezeichnete Geschwindigkeit und außerdem eine der Bewegungsrichtung parallele Geschwindigkeit, welche der Strömungsgeschwindigkeit des Gases gleich ist. Nennen wir diese Strömungsgeschwindigkeit in der gedachten durch die strömende Gasmasse gelegten Ebene v_0 , so ist sie in dem von uns angenommenen Falle für alle Gasschichten an der einen Seite der Ebene $v_0 + \varphi$, an der andern $v_0 - \varphi$, worin φ mit wachsendem Abstände von der gedachten Ebene größer wird. Infolge der den Gasmolekülen eigentümlichen nach allen Richtungen des Raumes gleichmäßig mit der Geschwindigkeit u stattfindenden Bewegung werden durch die gedachte Ebene in jedem Momente Moleküle von der einen zur andern Seite gehen, und zwar muß, da die Dichtigkeit an allen Stellen der Gasmasse dieselbe bleibt, die Zahl der Moleküle, welche von der einen Seite der rascher bewegten zu den langsamer strömenden Schichten hinübergehen, genau so groß sein als die Zahl der umgekehrt von den langsamer zu den rascher strömenden Schichten übertretenden Moleküle. Da die letztern nun aber eine geringere Geschwindigkeit in der Richtung der Strömung besitzen, so muß ihnen von der strömenden Gasmasse eine gewisse Geschwindigkeit mitgeteilt werden; ebenso übertragen die zu den langsamer strömenden Gasmasse hinübertretenden Moleküle dorthin eine gewisse Bewegungsgröße. Das geht aber nur auf Kosten der Bewegung der rascher strömenden Gasmasse, so daß diese eine der den eintretenden Molekülen erteilten und der an die langsamer strömenden übertragenen

¹⁾ Maxwell, Philosophical Magazin IV. series vol. XIX. Eine etwas andere Theorie der Reibung aus seiner spätern Gastheorie gibt Maxwell, Phil. Mag. IV. series vol. XXXV.

²⁾ O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXXV. Kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877. p. 126 ff.

³⁾ v. Lang, Poggend. Ann. Bd. CXLV. Man sehe auch Stefan, Wiener Berichte Bd. LXV. p. 343 ff. Boltzmann, Wiener Berichte Bd. LXVI. p. 325 ff.

an gleiche Bewegungsgröße verliert. Diese verlorene Bewegungsgröße rascher strömenden Gasmasse ist der Effekt der Reibung. Eine genauere Bewegungsgröße erhalten die langsamer fließenden Schichten, so daß diese eine Beschleunigung erhalten müssen, deren Wert ebenso groß als derjenige der Verzögerung der rascher strömenden Schichten.

Man sieht, daß hieraus zunächst die Thatsache der Reibung, wie sie bei Beobachtungen sich ergibt, als in der Konstitution der Gase begründet scheint.

Um die Größe der Reibung zu bestimmen, haben wir nur die Bewegungsgröße zu berechnen, welche den in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit der vorhin gedachten Ebene von der Seite der langsamer strömenden Schichten auf die Seite der rascher strömenden Schichten über tretenden Molekülen mitzuteilen ist.

Um die überhaupt durch eine Ebene hindurchtretenden Moleküle zu zählen, können wir die Annahme machen, daß nur solche Moleküle durch sie hindurchgehen, welche in der Richtung ihrer Bewegung nicht weiter von ihr entfernt sind, als die mittlere Wegelänge l beträgt, und aus allen Schichten bis zu dieser Entfernung die gleiche Anzahl von Molekülen übertritt. Denken wir uns also etwa ein Flächenelement ds auf diesem unter dem Winkel ϑ einen prismatischen Raum von der Höhe l , so wird aus jeder Schicht dieses Raumes von der Dicke dl die gleiche Anzahl von Molekülen durch das Flächenelement ds hindurchtreten. Es ergibt sich das unmittelbar aus der Bedeutung der mittleren Wegelänge. Die gesamten zwischen zwei Zusammenstößen der Moleküle zurückgelegten Wege dividiert durch die Zahl der Moleküle sind diese mittleren Wege; anstatt die einzelnen Moleküle mit ihren Wegen in Betracht zu ziehen, ist es somit im Effekt dasselbe, wenn wir annehmen, alle Moleküle nach einem Stoß zum andern diesen Weg zurück. Dann wird aber

ein Molekül, welches weiter in der Richtung seiner Bewegung von der Ebene, als die Strecke l beträgt, entfernt ist, in Betracht zu ziehen sein, sobald vor Erreichung der gedachten Grenzebene an ein Molekül stößt und umkehrt; alle in der Richtung ϑ sich bewegenden aber, deren Entfernung zwischen Null und l beträgt, treten über, und zwar so weit, daß der zurückgelegte Weg gleich l geworden ist. Da nun die Moleküle ganz gleichmäßig im Raume verteilt sind, so müssen dann auch aus jeder Schicht dieser Dicke gleich viel Moleküle sich herausbewegen.

Wie wir im § 102 sahen, ist die Zahl der Moleküle, welche gegen eine Ebene von der Größe s in der Richtung ϑ anprallen,

$$\frac{s N u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2 U}.$$

Nennen wir die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle

$$\frac{N}{U} = n$$

setzen wir für s die Flächeneinheit, so gibt uns der Ausdruck

$$\frac{n u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2}$$

auch die Anzahl der in der Richtung ϑ durch die betrachtete Fläche Gases pro Flächeneinheit hindurchgehenden Zahl von Molekülen; denn in der betreffenden Stelle keine Wand, so gehen die Moleküle eben durch die Fläche hindurch, die, wenn eine Wand vorhanden ist, an dieselbe anprallt.

Da alle diese Moleküle aus der zwischen Null und l liegenden Entfernung herkommen, so kommen aus jeder Schicht zwischen 0 und der Richtung ϑ von der Dicke $d\xi$ eine Anzahl von Molekülen, welche zur Gesamtzahl verhält wie $\frac{d\xi}{l}$. Aus einer in der Richtung der Bewegung genommenen Entfernung $\xi < l$ und einer Schicht, welche in dieser Richtung die Dicke dl hat, passieren also unsere gedachte Grenzfläche pro Flächeneinheit

$$\frac{n u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2} \cdot \frac{d\xi}{l}$$

Moleküle. Wir berechnen jetzt die Bewegungsgröße, welche diese der Entfernung ξ kommenden und durch die gedachte Grenzfläche von langsamer zu den rascher strömenden Schichten in der Richtung ϑ hindurchgehenden Molekülen erteilt werden muß. Indem wir dann für ξ nach und nach alle Werte von 0 bis l einsetzen und die so für alle innerhalb der Entfernung befindlichen Moleküle erforderliche Bewegungsgröße bilden, erhalten wir in der Summe aller dieser Werte zunächst die Bewegungsgröße, welche den in der Richtung ϑ übertretenden Molekülen erteilt werden muß.

Wir bezeichneten schon vorhin die Strömungsgeschwindigkeit an der gedachten Grenzfläche mit v_0 und in einiger Entfernung davon an der langsamer strömenden Schichten mit $v_0 - \varphi$; die Größe φ wächst mit der Entfernung der Schichten von der Grenzfläche. Da es sich hier um äußerst kleine Entfernungen handelt, dürfen wir φ dem senkrechten Abstande z der betrachteten Schicht von der Grenze proportional, also

$$\varphi = \frac{dv}{dz} z,$$

worin dv die Abnahme der Geschwindigkeit gibt, wenn z um dz zunimmt, somit der Quotient die Abnahme der Geschwindigkeit bedeutet, wenn der senkrechte Abstand von der Grenze um die Einheit der Entfernung zunimmt, vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeitsabnahme überall gleichmäßig erfolgen würde, wie an der gerade betrachteten Stelle.

Ein aus dem Abstände ξ in einer Richtung, welche mit der Normale den Winkel ϑ bildet, kommendes Molekül kommt aus einer Schicht, deren senkrechter Abstand von der Grenze

$$z = \xi \cos \vartheta$$

ist, es hat somit die Strömungsgeschwindigkeit

$$v_0 - \frac{dv}{dz} \cdot \xi \cos \vartheta.$$

Dieses Molekül geht an der andern Seite der Grenzfläche bis zu einer Entfernung

$$z = (l - \xi) \cos \vartheta,$$

mufs somit dort eine Strömungsgeschwindigkeit erhalten

$$v_0 + \frac{dv}{dz} (l - \xi) \cos \vartheta,$$

ine Strömungsgeschwindigkeit mufs somit um

$$\left(v_0 + \frac{dv}{dz} (l - \xi) \cos \vartheta\right) - \left(v_0 - \frac{dv}{dz} \xi \cos \vartheta\right) = \frac{dv}{dz} l \cos \vartheta$$

nehmen. Ist m die Masse des einzelnen Moleküls, so entspricht dieser Geschwindigkeitszunahme die Bewegungsgröfse

$$m \frac{dv}{dz} l \cos \vartheta.$$

Für die aus der Entfernung ξ von Seiten des langsamer strömenden Gas kommenden unter einem Winkel ϑ die Grenzebene durchsetzenden Moleküle ist somit der Zuwachs an Bewegungsgröfse, welche sie auf Kosten der strömenden Gasschicht erhalten,

$$\frac{n u \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2} \cdot \frac{d\xi}{l} \cdot m \frac{dv}{dz} l \cos \vartheta.$$

Für die überhaupt in der Richtung ϑ übertretenden Moleküle ergibt sich dann die erforderliche Bewegungsgröfse aus der Überlegung, dafs auf der Strecke l , von welcher überhaupt Moleküle in dieser Richtung übertreten, $\frac{l}{d\xi}$ Schichten von der in der Bewegungsrichtung genommenen Dicke $d\xi$ sind. Da aus jeder dieser Schichten die gleiche Zahl von Molekülen kommt, und da nach der eben gemachten Entwicklung für jedes der Moleküle die gleiche Zunahme der Bewegungsgröfse eintreten mufs, erhalten wir die für alle in der Richtung ϑ übertretenden Moleküle erforderliche Bewegungsgröfse, indem wir den eben gefundenen Ausdruck mit $\frac{l}{d\xi}$ multiplizieren. Dieselbe wird somit

$$-\frac{m n u l}{2} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \frac{dv}{dz}.$$

Diesen Verlust an Bewegungsgröfse erfährt die rascher strömende Gasmasse durch die von Seite der langsamer strömenden Schichten in sie in der Richtung ϑ eintretenden Moleküle. Einen genau ebenso grofsen Verlust an Bewegungsgröfse erfährt sie dadurch, dafs von Seiten der rascher strömenden Gasmasse genau so viel Moleküle in die langsamer strömende übertreten und dort genau denselben Zuwachs an Bewegungsgröfse übertragen. Da die Zahl der übertretenden Moleküle ist genau dieselbe, und jedes Molekül den Weg l in der Richtung von der rascher zu der langsamer strömenden Gasmasse zurück, gibt also an diese genau die gleiche Bewegungsgröfse ab, welche das aus der entsprechenden Lage von der andern Seite kommende zu erhalten hat.

Der Gesamtverlust, den die durch die Grenzebene in der Richtung ϑ austauschenden Moleküle in der rascher strömenden Gasmasse betragen, ist somit das Doppelte des eben berechneten, oder

$$m n u l \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \frac{dv}{dz}.$$

Wir erhalten dann den Verlust an Bewegungsgröße, den die rascher strömende Gasmasse überhaupt durch die sich austauschenden Moleküle erfährt, wenn wir obigen Wert für jeden zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Winkel ϑ bilden und alle diese Werte summieren, also in der Summe

$$mnul \frac{dv}{dz} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta,$$

da $mnul \frac{dv}{dz}$ für jede Richtung ϑ denselben Wert hat. Diese Summe ist, wie wir schon mehrfach sahen,

$$\frac{1}{3} mnul \frac{dv}{dz}.$$

Dieser Verlust der Bewegungsgröße der rascher strömenden Gasmasse, dem ein genau gleicher Gewinn auf Seiten der langsamer strömenden gegenüber steht, ist der Effekt der Reibung.

Gerade wie bei den Flüssigkeiten können wir die Reibung auch hier als einen in der Grenzebene der Bewegungsrichtung entgegenwirkenden Druck definieren, der Druck muß auf die Flächeneinheit während einer Sekunde wirkend der strömenden Gasmasse denselben Verlust an Bewegungsgröße, oder dieselbe Bewegungsgröße in der der Strömung entgegengesetzten Richtung erteilen. Bezeichnen wir diesen Druck mit K , so ist

$$K = \frac{1}{3} mnul \frac{dv}{dz}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit dem § 86 für die Reibung in Flüssigkeiten erhaltenen Ausdruck

$$K = \eta f \frac{dv}{dz},$$

indem wir hier z für x setzen, weil wir die zur Strömungsrichtung normale Richtung mit z bezeichnet haben, so erkennt man, daß für die Gase dasselbe Reibungsgesetz für die innere Reibung gilt, und daß der Reibungskoeffizient

$$\eta = \frac{1}{3} mnul$$

ist. In diesem Ausdrucke bedeutet n die in der Volumeinheit vorhandene Molekülnzahl. Nach § 101 können wir, wenn wir die von den Wirkungssphären der Moleküle ausgefüllten Räume außer Acht lassen, für l setzen

$$l = \frac{1}{n \frac{4}{3} \varrho^2 \pi}$$

und erhalten dann für η

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{mu}{\frac{4}{3} \varrho^2 \pi} \cdot \varrho,$$

ein Ausdruck, welcher zeigt, daß der Reibungskoeffizient von der Anzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle, also auch, soweit die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen, von dem Drucke unabhängig ist, unter welchem das Gas steht.

Die Notwendigkeit dieses auf den ersten Blick sehr auffallenden Satzes gibt sich indes aus der Natur der Gasreibung als Abgabe der Bewegung der schneller strömenden Moleküle an die in sie eindringenden langsamer fortschreitenden. Wird die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit kleiner, nimmt in demselben Verhältnisse die Wegelänge l , also die Dicke der langsamer strömenden Schicht, aus welcher die Moleküle in die rascher strömende übertreten, zu, die übertragene Bewegungsgröße muß also denselben Wert behalten, vorausgesetzt, daß die strömende Gasmasse in der Bewegung senkrechten Richtung eine solche Ausdehnung hat, daß die Dichte abnehmender Dichte, wegen des Wachsens von l wachsende Dicke der Schicht ganz mit Gas ausgefüllt ist.

Bei einer sehr weit gehenden Verdünnung des Gases ist indes die vorgeführte Theorie nicht mehr gültig¹⁾, da wir dann die Annahme nicht mehr machen dürfen, daß nur Moleküle aus Schichten von der Dicke l sich ausströmen.

§ 117.

Bestimmung der Reibungskoeffizienten der Gase. Da nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen die Theorie für die Reibung der Gase zu dem auch für die Flüssigkeiten gültigen Reibungsgesetze führt, so lassen auch die zur Beobachtung der Flüssigkeitsreibung dienenden Methoden zur Beobachtung der Gasreibung geeignet sein. Zunächst muß sich das Ausströmen von Gasen aus kapillaren Röhren ganz der entsprechende Ausdruck ergeben wie für das Ausströmen von Flüssigkeiten. Die von E. Meyer²⁾ durchgeführte Theorie des Ausströmens von Gasen durch kapillare Röhren führt denn auch zu ganz entsprechenden Ausdrücken für das Volumen der durchströmenden Gase. Mißt man das Volumen des Gases unter konstanten Druckverhältnissen, das heißt während des ganzen Versuches konstantem Drucke p_a beim Anfange und p_e am Ende der kapillaren Röhre, durch die Röhre geströmten Gases unter dem arithmetischen Mittel der Drucke p_a und p_e , also unter dem Drucke $\frac{p_a + p_e}{2}$, so liefert die Theorie für das in der Zeiteinheit ausströmende Volumen V

$$V = \frac{\pi(p_a - p_e)}{8\eta L} \left(R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right),$$

so genau denselben Ausdruck, welchen wir für das Volumen der ausfließenden Flüssigkeit fanden, wenn wie dort η die Konstante der innern, ε die der äußern Reibung, L die Länge und R den Radius der kapillaren Röhren bedeutet.

Mißt man das Volumen des ausfließenden Gases unter einem andern Drucke, etwa p_a oder p_e , so ändert sich dieser Ausdruck etwas, da dann das Volumen V ein anderes wird; messen wir das Volumen etwa einfach durch die Volumverminderung des Gases in dem Gefüße, aus welchem das Gas ausströmt, also unter dem Drucke p_a , so wird dasselbe V_a nach dem Mariotteschen Gesetze

$$V_a \cdot p_a = V \frac{p_a + p_e}{2}$$

¹⁾ Kundt und Warburg, Poggend. Ann. Bd. CLV.

²⁾ O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXXVII.

und deshalb

$$V_a = \frac{\pi (p_a^2 - p_e^2)}{16 \eta L p_a} \left(R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right).$$

An den im Anfange des vorigen Paragraphen erwähnten, in den Jahren 1846 und 1849 von Graham angestellten Versuchen hat Meyer die Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachgewiesen. Unter vielen Versuchsreihen Grahams ist eine, bei welcher die Drucke p_a und p_e konstant erhalten wurden; es wurde unter konstantem Drucke p_a ein bestimmtes unter dem Drucke p_a gemessenes Volumen Luft in die (einer Luftpumpe strömen gelassen, in der durch fortgesetztes Pumpen konstant luftverdünnter Raum erhalten wurde, und die Zeit bestimmt, welche bei verschiedenen Drucken p_a dazu erforderlich war. Bezeichnen wir die dazu erforderliche Zeit mit t , so wird, da wir $p_e = 0$ setzen können

$$V_a = p_a t \frac{\pi}{16 \eta L} \left(R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3 \right),$$

somit

$$p_a t = \frac{V_a 16 \eta L}{\pi} \frac{1}{R^4 + 4 \frac{\eta}{\varepsilon} R^3}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist, da immer dasselbe Volumen in derselben Röhre benutzt wurde, konstant, es muß also bei diesen Versuchen das Produkt aus dem Drucke p_a und der Zeit t konstant sein. Das ergab auch die Versuche Grahams; bei drei Versuchsreihen ergaben sich folgende Werte

p_a	t	$p_a t$
1 Atmosph.	799",5	799,5
0,75 "	1050	787,5
0,5 "	1543	771,5

Werte, welche so wenig von einander abweichen, daß man sie in Anbetracht der Schwierigkeit der Versuche als eine Bestätigung des Satzes annehmen muß, daß die Größe der Reibung von dem Drucke unabhängig ist.

Bei den übrigen Versuchen liefs Graham entweder nur p_a oder p_e konstant; indem Meyer aber aus obiger Formel für den stationären Zustand gelassen Gleichung jene ableitete, welche für ein nur konstantes p_a oder p_e gilt, konnte er zeigen, daß alle Versuche Grahams mit der Theorie Übereinstimmung sind.

Später haben dann O. E. Meyer gemeinschaftlich mit Springmühl (A. von Obermaier²⁾) in ausführlichen Versuchen das Ausströmungsverhalten von Gasen durch kapillare Röhren geprüft, und gleichzeitig gezeigt, daß für Gase sich dabei der Koeffizient ε der äußeren Reibung als unabhängig ergibt. Man wird also auch bei den Gasen unter diesen Umständen annehmen müssen, daß die letzte Schicht fest an den Wänden der

¹⁾ Meyer und Springmühl, Poggend. Ann. Bd. CXLVIII p. 1 und p. 2.

²⁾ A. von Obermaier, Wien. Ber. Bd. LXXIII. Carl, Repertorium Bd. XIII. Man sehe auch von Lang, Wien. Ber. Bd. LIII und Meyers Berechnung dieser Versuche, Poggend. Ann. CXLVIII p. 550.

riert, und daß an dieser sich die strömenden Gasschichten vorbeibewegen.

Infolge dieser Erfahrung ist die Beobachtung der durch eine kapillare re strömenden Gasmenge auch vortrefflich geeignet, um die Reibungskoeffizienten der Gase in absolutem Maße zu bestimmen; sie ist zu dem Zwecke von Meyer und Springmühl und von A. von Obermaier benutzt worden. Die von diesen Experimentatoren erhaltenen Resultate werden wir hier für einige Gase zusammenstellen.

Bei Besprechung der Reibung der Flüssigkeiten haben wir noch eine andere Methode zur Bestimmung der Reibungskoeffizienten kennen gelernt, die darin bestand, daß man eine kreisförmige Scheibe um eine durch ihren Mittelpunkt gehende und zu ihrer Ebene senkrechte Axe in Schwingungen versetzt, und das logarithmische Dekrement dieser Schwingungen bestimmt. Auf welcher Weise dieses Dekrement von der Reibung, welche die Platte in ihrer Bewegung erleidet, abhängig ist, haben wir § 86 abgeleitet.

Wie wir dort sahen, erhält man den Reibungskoeffizienten der Flüssigkeiten aus der Differenz der logarithmischen Dekremente, wenn man die Schwingungen der Scheibe in der Luft und in der Flüssigkeit beobachtet. In dieser Form ist die Methode zur Bestimmung des Reibungskoeffizienten in der Luft nicht anzuwenden, da man einen luftleeren Raum nicht herstellen kann.

O. E. Meyer, der diese Methode zuerst zur Messung der Luftreibung benutzte, verfuhr deshalb folgendermaßen¹⁾. An dem Draht, dessen Torsionsschwingungen bewirken soll, deren Dekrement beobachtet wird, wurde ein vertikal herabhängender cylindrischer Stab befestigt. Auf diesen wurden drei kreisförmige Scheiben von gleichem Durchmesser, entweder Glas- von 150^{mm} oder Messingscheiben von 200^{mm} Durchmesser, veränderbar aufgesetzt, so daß man entweder die Scheiben in einem gewissen Abstande von einander einklemmen konnte, oder alle drei fest an einander anheben zu einer Scheibe vereinigen konnte. In dem letztern Falle wirkt die Luftreibung nur auf eine Scheibe, in dem erstern dagegen auf drei Scheiben, und das von der Luftreibung herrührende Dekrement der Schwingungen ist dann das dreifache von demjenigen, welches man mit einer Scheibe erhält. Bezeichnen wir daher jetzt mit λ_1 das mit einer Scheibe beobachtete Dekrement, mit λ_0 das nicht von der Luftreibung herrührende, so wird mit Vernachlässigung der höheren Potenzen des Dekrements und wenn wir die Dicke der Scheiben gegen den Radius derselben vernachlässigen, nach § 86

$$\lambda_1 - \lambda_0 = \frac{R^4 \pi}{K} \sqrt{\frac{\pi}{8} \sigma \eta T_0},$$

jetzt η den Koeffizienten der Luftreibung und σ die Dichtigkeit der Luft bedeutet. Ist das Dekrement bei drei getrennten Scheiben λ_3 , so wird

$$\lambda_3 - \lambda_0 = 3 \frac{R^4 \pi}{K} \sqrt{\frac{\pi}{8} \sigma \eta T_0}.$$

Beiden Beobachtungen gestatten die Größe von η zu bestimmen.

Die Scheiben hingen bei diesen Versuchen in einer mit einer Luft- in Verbindung stehenden, im übrigen luftdicht verschlossenen Glocke,

¹⁾ O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXXV.

so daß man die Reibung unter sehr verschiedenem Drucke beobachten konnte.

Eine sehr wesentliche Verbesserung wurde dieser Methode durch Maxwell¹⁾ gegeben, die sehr einfach darin bestand, daß er die beweglichen Scheiben zwischen denselben sehr nahe stehenden festen, den beweglichen Scheiben schwingen ließ. Es wurden über und unter schwingenden Scheiben und zwischen dieselben dünne aus zwei Halbkugeln bestehende Platten geschoben, so daß zwischen den schwingenden festen Scheiben sich nur wenige Millimeter dicke Luftplatten befanden. Durch diese Modifikation des Meyerschen Verfahrens wird die dämpfende Wirkung der Luftreibung eine ganz erheblich stärkere; läßt man nämlich die Scheiben ohne zwischen oder nahe gestellte Platten schwingen, so trägt sich von der schwingenden Platte aus die Bewegung erheblich weiter, während bei den zwischen gestellten Platten die an der festen Platte liegende Luftschicht durch die Adhäsion in Ruhe bleibt; infolge dessen die Geschwindigkeitsabnahme der Bewegung mit Entfernung von der schwingenden Platte, der § 86 als $\frac{d\psi}{dx}$ bezeichnete Differentialquotient erheblich größer. Die theoretische Behandlung der zwischen den Platten stattfindenden Bewegung der Luft zeigt dann ferner, daß das von der Reibung an der Luft abhängige logarithmische Dekrement in diesem direkt dem Reibungskoeffizienten proportional ist. Ist nämlich jetzt beobachtete, λ_0 das von der Luftreibung nicht abhängige Dekrement, so nach Maxwell

$$\lambda - \lambda_0 = N \frac{\pi(R + \alpha)^4}{4DK} T \cdot \eta \cdot (1 + \vartheta),$$

wenn N die Anzahl der Oberflächen der Scheiben ist, welche der Reibung ausgesetzt sind, D den Abstand der Oberfläche der beweglichen von der zugewandten Seite der festen Scheibe bedeutet. Die GröÙe α eine Korrektion wegen des Scheibenrandes und ϑ ein aus der Theorie ergebendes Korrektionsglied, welches bei kleinen Werten von D und g Schwingungsdauern der Scheiben vernachlässigt werden kann. Bei Werten D von 4,6^{mm} und einer Schwingungsdauer von 36'' wird nach Maxwell, wenn die Luft unter dem Drucke einer Atmosphäre steht, $\vartheta = -0,04$ bei kleineren Drucken wird der Wert noch kleiner.

Indem man auch in diesem Falle die Scheiben teils vereinzelt, aufeinandergelegt schwingen läßt, bei Anwendung von drei Scheiben einmal $N = 6$, das andere mal $N = 2$ wählt, läßt sich aus den beobachteten Dekrementen η ableiten.

Wegen der GröÙe und Unsicherheit in der Bestimmung der Reibung wandten später Meyer²⁾ sowie Kundt und Warburg³⁾ zur Untersuchung der Scheiben, die zuerst von Gauss⁴⁾ bei magnetischen Messungen benutzte Biflarsuspension an. Dieselbe besteht darin, daß man Körper, der Schwingungen vollführen soll, an zwei Fäden von gl

¹⁾ Maxwell, Philos. Transactions for the year 1866 p. 249.

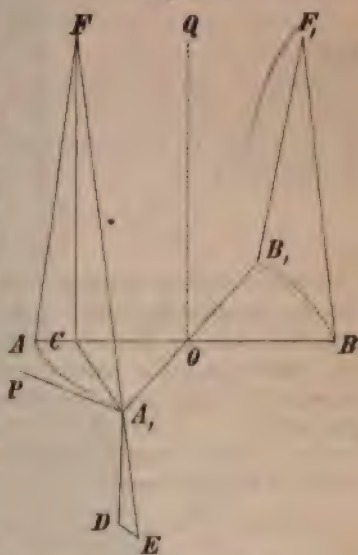
²⁾ O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXLIII.

³⁾ Kundt und Warburg, Poggend. Ann. Bd. CLV.

⁴⁾ Gauss, Resultate aus den Beobachtungen des Magnetischen Vereins das Jahr 1837 p. 1, für das Jahr 1840 p. 1.

abhängt, welche sich in größerer oder geringerer Entfernung von befinden, und welche entweder einander parallel hängen, wenn ihre unteren Anknüpfungspunkte gleich weit von einander entfernt und symmetrisch zur vertikalen, wenn die unteren Anknüpfungspunkte näher oder auch von einander entfernter sind als die oberen. Ein hängender Körper befindet sich in der Gleichgewichtslage, wenn die Fäden sich ihrer ganzen Länge nach in einer Vertikalebene befinden, durch den Schwerpunkt des Körpers gelegte Vertikale sich in derselben befindet. Bringt man den Körper aus seiner Lage durch eine Umkehrung um die Mittellinie der beiden Fäden, so wird das Gleichgewicht da die Gleichgewichtsbedingungen nicht mehr bestehen; die Fäden sind nicht mehr parallel, nicht mehr in einer Ebene, und gleichzeitig wird der Schwerpunkt des Körpers etwas gehoben. Es entsteht daher ein Drehungsmoment, welches den Körper in die Gleichgewichtstellung zurückzuführen will. Um die Größe dieses Drehungsmomentes zu bestimmen, sei (Fig. 194) ein Durchschnitt durch den Körper in der Aufhängeebene

Fig. 194.



A und B seien die Aufhängefäden und der Schwerpunkt des Körpers sei in der Ebene QO . Ist das Gewicht des Körpers P , so können wir für unsere Betrachtung annehmen, in jedem der Aufhängepunkte A und B wirke das Gewicht $\frac{P}{2}$. Wenn wir den Körper in die Lage A_1B_1 drehen, wobei wir voraussetzen, daß die Fäden eine solche Länge haben, daß wir die durch die drehende Hebung des Schwerpunktes außer Acht lassen können. Dann sind AB und A_1B_1 in derselben Ebene und $\angle AOA_1 = \varphi$ ist der Winkel, um welchen der Körper gedreht ist. Das Gewicht $\frac{P}{2}$, das durch die Länge AO dargestellt sei, greift dann in A_1 an, und bildet mit der Vertikalen A_1D einen Winkel $\angle DA_1E$, welcher ist dem Winkel $\angle CFA_1$, wenn CFA_1 die durch den Faden FA_1 und die Vertikale gelegte Ebene ist. Den parallel A_1D gerichteten Zug FA_1 zerlegen wir in zwei Komponenten, deren eine parallel der Vertikalen A_1D ist, deren andere in der Ebene CA_1D senkrecht zu A_1D steht. Diese letztere Komponente zieht den Körper wieder gegen die Gleichgewichtslage zurück. Die Komponente, die senkrecht zu A_1D steht, multipliziert mit $A_1O = a$ gibt uns dann das den Körper in die Gleichgewichtslage zurückführende Drehungsmoment. Nennen wir den Winkel, den der Faden FA_1 mit der Vertikalen bildet, δ , so ist die zum Drehungsmoment senkrechte Komponente $\frac{P}{2} \sin \delta$; da die zum Faden senkrechte Kom-

ponente ED mit der Horizontalen CA_1 denselben Winkel δ bildet, ist parallel CA_1 genommene Komponente dieser Kraft $\frac{p}{2} \sin \delta \cdot \cos \delta$ und zu A_1O senkrechte $\frac{p}{2} \sin \delta \cos \delta \cos CA_1P$; zur Bildung des Drehmomentes haben wir diesen Ausdruck mit $A_1O = a$ zu multiplizieren. nun an dem andern Aufhängepunkte B_1 ein ganz ebensolches Drehmoment wirkt, ist das gesamte den Körper zurückführende Drehungs-

$$a \cdot p \cdot \sin \delta \cos \delta \cos CA_1P.$$

In diesem Ausdrucke ist

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin DA_1E = \sin CFA_1 = \frac{CA_1}{FA_1} = \frac{CA_1}{l} \\ \cos \delta &= \frac{CF}{l} = \frac{h}{l}, \end{aligned}$$

wenn wir die Länge der Fäden mit l und den vertikalen Abstand der von den oberen Aufhängepunkten mit h bezeichnen. Da weiter

$$\cos CA_1P = \sin CA_1O$$

und

$$\sin CA_1O = \sin COA_1 \frac{CO}{CA_1},$$

so wird das Drehungsmoment unter Beachtung, daß $CO = b$ und Winkel $COA_1 = \varphi$,

$$ap \frac{CA_1}{l} \cdot \frac{h}{l} \frac{b}{CA_1} \cdot \sin \varphi = ap \frac{h}{l} \frac{b}{l} \sin \varphi.$$

Wir erhalten demnach ein dem Sinus des Drehungswinkels proportionales Drehungsmoment; somit vollführt der aus der Gleichgewicht gebrachte Körper Pendelschwingungen um die Gleichgewichtslage.

Den mit $\sin \varphi$ multiplizierten Faktor, das Drehungsmoment, $\sin \varphi = 1$, nennt man die bifilare Direktionskraft. Ist die Länge der hängefäden so groß, daß wir die Hebung des Schwerpunktes vernachlässigen dürfen, dann dürfen wir auch $h = l$ setzen, und erhalten für bifilare Direktionskraft

$$p \frac{ab}{l},$$

sie ist dem Gewichte des Körpers, dem Produkte aus den halben Abständen der oberen und unteren Aufhängepunkte direkt und der Länge der Fäden umgekehrt proportional.

Da bei einer solchen Aufhängung keine innere Reibung des Aufhängeapparates vorhanden ist, hängt das Dekrement der Schwingungen wesentlich von dem Widerstande, den die Bewegung in der Luft findet, also wesentlich von der Reibung des an den Fäden hängenden Körpers ab. Indem Kundt und Warburg sehr feine und einander sehr nahe Fäden anwandten waren die Dekremente innerhalb der Beobachtungsfehler nur von der Reibung der nach der Maxwellschen Methode schwingenden Scheibe abhängig. Wurde anstatt der Scheibe ein Gewicht angehängt, welches einer kleinen Zinkscheibe bestand, so war das logarithmische Dekre-

dafs die aus demselben berechnete dämpfende Kraft nur 1 Procent den Reibungsversuchen sich zeigenden Dämpfung betrug. Kundt und Warburg konnten deshalb das ganze bei den Schwingungsversuchen nach der Maxwell'schen Methode auftretende Dekrement als von der Luft herrührend ansehen, sie konnten daher ihre Beobachtungen mit diesen, zwischen nahe stehenden festen, schwingenden Scheibe durch-

von Kundt und Warburg bei ihren Versuchen benutzte Anordnung (Fig. 195). Die schwingende Scheibe sitzt zunächst an einem festen Stiel, zugleich oben bei w den zur Beobachtung der Schwingungen dienenden Spiegel trägt. An diesem Stiel sind die Fäden der bifilaren Aufhängung angeknüpft. Die festen Scheiben, zwischen denen die bewegliche Scheibe schwingen soll, deren obere aus zwei gegen einander geschobenen Halbkugeln besteht, die erst an ihre Stelle

gebracht werden, wenn die schwingende Scheibe richtig hängt, werden von einem Rahmen getragen, auf welchem eine halbkugelförmige Vorrichtung besteht, an der oben die Bifilaraufhängung angeknüpft sind. Die ganze Vorrichtung ist mit einer Glasglocke umgeben, welche auf dem Teller pq , der den ganzen Apparat luftdicht abschliesst, aufgeschliffen ist. Aus der Glocke führt eine Glasröhre mit einem Glashahn l zu einer weiteren Röhre, die zu einem weiten abzusperrenden T-förmigen Ventilsystem einer Schenkel zu einer Röhre w , dessen anderer zu einem Gasbehälter führt, welches das Gas entnommen werden soll. Um die Schwingungen zu setzen, sind an dem dieselbe tragenden Stücken Eisen draht befestigt, die Schwingungen werden durch Annäherung eines Magnetes an den Eisen draht

Fig. 195.



und Warburg
bei ihren Ver-
suchen sehr hohem

Drucke die Dichtigkeit der Gase geändert, zur Prüfung des aus der Theorie sich ergebenden Gesetzes, dafs die Reibung von der Dichtigkeit des Gases unabhängig sei. Da die Reibungskoeffizienten bei diesen Beobachtungen den logarithmischen Dekrementen proportional sind, so mufs, wenn das Gesetz richtig ist, der Wert des logarithmischen Dekrements von der Dichte des Gases unabhängig sein. In der That zeigte sich das, so lange der Druck

mehr als 20^{mm} Quecksilber betrug; wurde er kleiner, so nahmen die logarithmischen Dekremente nicht unerheblich ab. Die beiden Physiker zeigten indes, daß hieraus nicht ein Mangel der aus unserer Auffassung sich ergebenden Theorie der Reibung folgt, daß vielmehr die bei der Ableitung der schwingenden Bewegung mit Berücksichtigung der Reibung gemachte Voraussetzung, daß die an den festen Körpern anliegende Gasschicht derselben fest haftet, nicht mehr zulässig ist. Wird der Druck kleiner als 20^{mm} Quecksilber, so ist der mit ϵ bezeichnete Koeffizient der inneren Reibung nicht mehr unendlich zu setzen, es tritt ein Gleiten des Gases an den Wänden des festen Körpers ein. Mit Berücksichtigung dieses Gleitens, dessen Theorie sie entwickeln¹⁾, konnten die beiden Physiker zeigen, daß bis zu einem Drucke von 0,6^{mm} Quecksilber die Koeffizienten der inneren Reibung konstant sind.

Ehe wir die von den verschiedenen Experimentatoren erhaltenen Werte für die Reibungskoeffizienten einiger Gase zusammenstellen, wollen wir, um nicht später auf diese Untersuchungen noch zurückkommen zu müssen, noch auf eine Folgerung der Theorie hinweisen. Die Theorie gibt für den Reibungskoeffizienten den Wert

$$\eta = \frac{1}{3} m n u l,$$

sie zeigt somit, daß derselbe der Geschwindigkeit u der Moleküle proportional ist. Für diese gaben wir § 103 an, daß, wenn u_0 die Geschwindigkeit bei 0° ist

$$u = u_0 \sqrt{1 + 0,00367 t} = u_0 (1 + 0,00367 t)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Nach demselben Gesetze mußte also auch der Reibungskoeffizient mit der Temperatur wachsen. Diese Folgerung hat sich in den Versuchen bestätigt, sämtliche Versuche ergeben ein rasches Wachsen des Reibungskoeffizienten. Maxwell²⁾ folgerte aus seinen Versuchen, daß der Reibungskoeffizient der Luft nicht der Quadratwurzel, sondern direkt $1 + 0,00367 t$ proportional zunehme. O. E. Meyer³⁾ erhielt für Luft einen zwischen dem theoretischen und dem von Maxwell gefundenen liegenden Wert, er fand

$$\eta = \eta_0 (1 + 0,0025 t) = \eta_0 (1 + 0,00367 t)^{\frac{2}{3}},$$

da man bei der Kleinheit der Koeffizienten von t sich bei Entwicklung der Potenz $\frac{2}{3}$ auf das erste Glied beschränken kann. Denselben Wert für Luft fand Warburg⁴⁾.

Am ausführlichsten ist die Abhängigkeit der Reibungskoeffizienten von der Temperatur fast gleichzeitig von Puluj⁵⁾ durch Ausflußversuche und Schwingungsversuche, und von A. von Obermaier⁶⁾ durch Ausflußversuche verfolgt worden. Beide Experimentatoren gelangen übereinstimmend

¹⁾ Kundt und Warburg, Poggend. Ann. Bd. CLV. p. 345 ff.

²⁾ Maxwell, Philosophical Transactions for 1866 p. 267.

³⁾ O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXLIII, Bd. CXLVIII.

⁴⁾ Warburg, Poggend. Ann. Bd. CLIX.

⁵⁾ Puluj, Wiener Berichte Bd. LXIX, Bd. LXX, Bd. LXXIII. Carl, Repertorium Bd. XIII.

⁶⁾ A. von Obermaier, Wiener Berichte Bd. LXXI, Bd. LXXIII. Carl, Repertorium Bd. XII, Bd. XIII.

Resultate, daß die Änderung der Reibungskoeffizienten mit der Natur für die verschiedenen Gase verschieden ist, für alle aber überrascher erfolgt, als es nach der vorgeführten Theorie der Reibung sein sollte. Für Luft finden beide Experimentatoren fast den Wert wie O. E. Meyer; Puluj gibt als Exponenten des Temperaturanstatt $\frac{1}{2}$ den Wert 0,722, A. von Obermaier 0,76; für Wasserhalt der erstere 0,693, der letztere 0,70, für Kohlensäure sind die 0,917 und 0,94, wie man sieht vortrefflich übereinstimmende Werte. Ähnlichen fast der Einheit gleichen Wert erhielt A. von Obermaier für Kohlendioxyd, Chloräthyl und Äthylen, Gase, die zum Teil bei gewöhnlicher Temperatur durch Druck flüssig gemacht werden können, teils, wie Äthylen nach § 99, sehr stark von dem Mariotteschen Gesetze abweichen. In diese Nichtübereinstimmung der Erfahrung mit der aus unserer Annahme von der Natur der Gase abgeleiteten Theorie der Gase in Einklang bringen, nimmt Stefan¹⁾ an, daß die mittleren Wegelängen mit der Temperatur des Gases auch bei konstanter Dichtigkeit des Gases etwas abnehmen werden, eine Annahme, welche nach unserem Ausdrucke für dieselbe

$$l = \frac{1}{n \frac{1}{2} \rho^2 \pi}$$

hinauskommt, daß die Radien der Wirkungssphären mit steigender Temperatur kleiner werden. Ohne auf diese Frage hier schon näher einzugehen, möge nur bemerkt werden, daß diese Annahme darauf hinaus-

führt, daß die Abstände, bis zu welchen die Schwerpunkte der Moleküle aneinanderprallen sich nähern können, mit der Geschwindigkeit, mit der sie gegen einander fliegen, etwas kleiner wird.

In folgender Tabelle sind für einige Gase die Reibungskoeffizienten angegeben, dieselben geben, gerade wie bei den Flüssigkeiten in einem Zentimeter den auf ein Quadratmillimeter der Strömung entgegenwirkenden Widerstand, wenn zwei ein Millimeter von einander entfernte Schichten die Viskositätsdifferenz von einem Millimeter haben.

Für Luft ist η bei 15° nach

Gas	O. E. Meyer ³⁾	Puluj ⁴⁾	K. u. W. ⁵⁾	A. v. Oberm. ⁶⁾
Sauerstoff	0,000 001 93	0,000 001 86	0,000 001 91	0,000 001 77
Stickstoff	0,000 000 95	0,000 000 95	0,000 000 94	0,000 000 91
Kohlensäure	0,000 001 63	0,000 001 53	0,000 001 55	0,000 001 49
Äthylendichlorid	0,000 002 16	—	—	0,000 001 99
Äthylchlorid	0,000 001 87	—	—	0,000 001 76
Kohlendioxyd	—	—	—	0,000 001 72

¹⁾ Stefan, Wien. Berichte Bd. LXV. p. 338.

²⁾ Maxwell, Philos. Transactions for 1866.

³⁾ O. E. Meyer, Poggend. Ann. Bd. CXLVIII. p. 226 u. 549.

⁴⁾ Puluj, Wiener Berichte Bd. LXXIII. Carl, Repertorium Bd. XIII.

⁵⁾ Kundt und Warburg, Poggend. Ann. Bd. CLV.

⁶⁾ A. von Obermaier, Wiener Berichte Bd. LXXIII. Carl, Repert. Bd. XIII.

Wie man sieht stimmen die von verschiedenen Beobachtern gefundenen Werte recht gut mit einander überein, nur findet A. von Obermaier durchweg etwas kleinere Werte.

§ 118.

Diffusion der Gase. Verbindet man zwei Gefäße etwa durch eine Öffnung in dünner Wand, welche dasselbe Gas enthalten, so tritt eine Bewegung der Gase nur ein, wenn in dem einen Gefäße der Druck kleiner ist als in dem andern, ist keine Druckdifferenz in beiden Gefäßen vorhanden, so tritt auch keine Strömung des Gases ein. Das ist jedoch nicht mehr der Fall, wenn in den beiden durch eine Öffnung in Verbindung stehenden Räumen verschiedene Gase vorhanden sind. Zwar läßt sich durch den Versuch nachweisen, daß substantiell verschiedene Gase denselben Druck auf einander ausüben, wie die Teilchen gleichartiger Gase, aber dennoch tritt stets eine Vermischung ein, wenn verschiedene Gase unter gleichem Druck durch eine Öffnung mit einander in Verbindung stehen. Daß ersteres der Fall ist, zeigt folgender Versuch¹⁾. Wenn man eine mit Luft gefüllte unter verschlossene Glasröhre vom Boden aus mit einem gefärbten Gase zur Hälfte anfüllt, welches schwerer ist als Luft, z. B. mit unterchloriger Säure, so ruht in dem obern Teile der Röhre anfänglich eine farblose Luftsäule auf dem gefärbten Gase. Bringt man dann rasch das obere Ende der Röhre mit einer Luftpumpe in Verbindung und pumpt einen Teil der Luft aus, so rückt die an der Farbe erkenntliche Grenzfläche beider Gase mit der zunehmenden Verdünnung aufwärts, der Druck der Gase ändert sich aber in der ganzen Ausdehnung der Röhre in gleicher Weise, denn seitlich angebrachte Manometer zeigen in jedem Momente an allen Stellen der Röhre den gleichen Druck. Aber ungeachtet dessen, daß die verschiedenen Gase auf einander denselben Druck ausüben, als die einzelnen Teile desselben Gases, vermag ein Gas ein anderes nicht in einem Raume abzusperren.

Der erste, welcher diese Vermischung verschiedener Gase nachwies, war Dalton²⁾, er wandte zwei Flaschen von gleicher Kapazität an, welche durch einen Hahn mit einander in Verbindung gesetzt werden konnten. Die eine füllte er mit Kohlensäure, die andere mit atmosphärischer Luft unter gleichem Drucke und bei gleicher Temperatur, und stellte sie so auf, daß die Kohlensäure in der untern, die Luft in der obern Flasche sich befand. Auf diese Weise konnte durch die verschiedenen specifischen Gewichte der Gase eine Mischung derselben nicht eintreten, da die Kohlensäure als das specifisch schwerere Gas unten und die leichtere Luft darüber war. Nach geöffnetem Hahne war der Druck im Innern der Flaschen ungeändert derselbe geblieben, nach mehreren Stunden waren aber beide Gase gleichmäßig in beiden Flaschen verteilt, ungeachtet, daß die Schwere dieselben getrennt zu erhalten suchte. Es folgt daraus, daß jedes der beiden Gase sich in dem ganzen Raum verbreitet hatte, als wenn es in demselben allein vorhanden gewesen wäre. Jedes der Gase dehnte sich dadurch auf den doppelten Raum aus, sein Druck mußte dadurch die Hälfte des früheren

¹⁾ Bunsen, Gasometrische Methoden p. 209.

²⁾ Dalton, Gilbert Annalen Bd. XXVII.

werden; die Unveränderlichkeit des äußern Druckes zeigt daher ebenfalls, als auch die Drucke verschiedener Gase sich summieren.

Ein ausgezeichnetes Beispiel dieser Mischung der Gase ihrem Gewichte entgegen zeigt uns unsere Atmosphäre, welche, wie wir bereits früher erwähnten, ein Gemische zweier Gase, Sauerstoff und Stickstoff ist. Obwohl nämlich der Sauerstoff schwerer ist als der Stickstoff und zwar im Verhältnisse 110 zu 97, so zeigt doch die Luft an allen Stellen, wo sie geschöpft wird, wesentlich dieselbe Zusammensetzung von 79 Theilen Stickstoff und 1 Theilen Sauerstoff.

Man bezeichnet diese Mischung von unter gleichem Drucke stehenden Gasen ähnlich wie die allmähliche Mischung zweier verschiedener über einander gelagerter mischbarer Flüssigkeiten, als Diffusion der Gase.

Die Diffusion der Gase in einander zeigt auch darin eine Analogie mit der Diffusion der Flüssigkeiten, daß die Schnelligkeit, mit welcher zwei Gase sich mischen, wesentlich von der Natur der Gase abhängig ist, wie das schon die ersten messenden Versuche von Graham¹⁾ zeigten. Graham gibt an, daß sich Wasserstoff in Luft sehr viel schneller verbreitet als Kohlenäure.

Der erste, welcher die Diffusion der Gase genauer untersuchte, war Loschmidt²⁾, er ging davon aus, daß die Diffusion der Gase ganz denselben Gesetzen folgen müsse wie diejenige der Flüssigkeiten. Die Menge eines Gases, welche, konstante Verhältnisse vorausgesetzt, in der Zeiteinheit durch eine Querschnitteinheit wandert, wenn auf den beiden Seiten des Querschnitts die Konzentration des Gases eine verschiedene ist, wird der Konzentrationsdifferenz, und einem von der Natur der beiden Gase abhängigen Koeffizienten, der Diffusionsgeschwindigkeit oder dem Diffusionskoeffizienten proportional gesetzt. Als Konzentration des Gases können wir hier einfach den Druck des betreffenden Gases an der betrachteten Stelle einführen, indem nach dem oben erwähnten Gesetze von Dalton an jeder Stelle eines zwei Gase enthaltenden Raumes sich die Drucke beider Gase zu dem im ganzen Raume konstanten Gesamtdrucke summieren, jedes Gas aber einen solchen Teil des Gesamtdruckes ausübt, als es einen Bruchteil der in der Volumeinheit an der betreffenden Stelle vorhandenen Gesamtmenge des Gases ausmacht. Der Diffusionsvorgang wird demnach durch dieselben Gleichungen, die wir § 82 für die Diffusion der Flüssigkeiten ableiteten, dargestellt, wenn wir die dort eingeführte Konzentration durch den Druck p des betreffenden Gases ersetzen, also durch die Gleichung

$$\frac{dp}{dt} = -k \frac{d^2p}{dx^2},$$

wann wir auch jetzt den Diffusionskoeffizienten mit k bezeichnen.

Betrücks desselben ist nur zu bemerken, daß der Diffusionskoeffizient sich immer auf zwei Gase beziehen muß, daß wir also z. B. für Kohlenäure nur einen bestimmten Diffusionskoeffizienten einem bestimmten zweiten Gase gegenüber, also etwa dem Wasserstoff gegenüber erhalten, und daß dann der Diffusionskoeffizient des Wasserstoffs gegenüber der Kohlenäure derselbe ist als derjenige der Kohlenäure gegenüber dem Wasserstoff. Daß

¹⁾ Graham, Philosoph. Magazin, 4 series, vol. XXVI. Poggend. Ann. CXX.

²⁾ Loschmidt, Wiener Ber. Bd. LXI, Bd. LXII.

letzteres der Fall sein muß, ergibt sich unmittelbar aus dem Dalton'schen Gesetze, daß sich die Drucke beider Gase an jeder Stelle eines Gefäßes zu dem konstanten Gesamtdrucke summieren. Ist also in einem gegebenen Momente an einer Stelle des Raumes p_1 der Druck des einen, p_2 der des andern Gases, so ist immer

$$p_1 + p_2 = p$$

gleich dem konstanten Gesamtdrucke. Geht dann durch Zuströmen des einen Gases in der Zeit dt der Druck desselben in $p_1 + dp_1$ über, so muß durch Fortströmen des andern der Druck desselben in $p_2 - dp_2$ übergehen und da wieder

$$p_1 + dp_1 + p_2 - dp_2 = p$$

sein muß, folgt $dp_1 = dp_2$. Es ist somit der Strom des einen Gases gegen das zweite stets gleich dem des zweiten gegen das erste.

Um die physikalische Bedeutung des Diffusionskoeffizienten zu erkennen denken wir uns wieder den stationären Zustand hergestellt, das heißt also wir denken uns ein Gefäß mit Kohlensäure gefüllt, etwa unter dem Druck einer Atmosphäre und dieses durch einen Cylinder von 1^{cm} Querschnitt und l^{cm} Länge mit einem ebensolchen mit Wasserstoff gefüllten Gefäße verbunden. Die Gefäße denken wir uns von solcher Größe, daß die durch Diffusion der Gase in sie übertretenden Mengen des andern Gases keine merkliche Verunreinigung des in dem Gefäße vorhandenen Gases bewirken oder etwa, wir denken uns durch irgend ein Mittel die in das Wasserstoffgefäß übergetretene Kohlensäure und den in das Kohlensäuregefäß übergegangenen Wasserstoff sofort weggenommen. Dann ist auf der einen Seite des Cylinders der Druck des einen Gases stets konstant und gleich p_0 , auf der andern stets gleich Null, und auf der l^{cm} langen Strecke des Cylinders nimmt der Druck von p_0 auf 0, und zwar nach Eintritt des stationären Zustandes in solcher Weise ab, daß, wie sich durch eine der im § 82 für den analogen Fall gemachten gleiche Entwicklung ergibt, im Abstände x vom Beginne des Cylinders der Druck des betreffenden Gases p_1 gleich

$$p_1 = p_0 - \frac{p_0}{l} \cdot x.$$

Für das unter dem Drucke p_0 gemessene Volumen des Gases, welches dann in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt des Cylinders wandert, welches somit aus dem einen Gefäße aus- und in das andere übertritt, ergibt sich gemäß den Entwicklungen des § 82

$$S = kq \frac{p_0}{l}.$$

Setzen wir nun $q = 1$, ein Quadratcentimeter, $l = 1^{\text{cm}}$, p_0 gleich einer Atmosphäre, so wird

$$S = k,$$

somit ist der Diffusionskoeffizient jene Menge eines Gases, dieselbe in Kubikcentimetern unter dem Drucke p_0 gemessen, welche in der Zeiteinheit, welche wir die Sekunde wählen, bei dem stationären Zustand durch Fläche ein Quadratcentimeter in ein anderes Gas übertritt, wenn auf Strecke 1^{cm} der Druck des ersten Gases von 1 Atmosphäre auf 0 abnimmt, somit der des zweiten Gases von 0 auf eine Atmosphäre zunimmt. Der Diffusionskoeffizient des zweiten Gases ist dann ganz derselbe.

Das hier gedachte einfache Verfahren lässt sich in der Praxis allerdings leicht durchführen. Loschmidt verfuhr deshalb zur Bestimmung des Diffusionskoeffizienten folgendermaßen. Ein vertikal zu stellendes Glasrohr von 7,5^{cm} Länge und 2,6^{cm} Durchmesser wird an beiden Enden durch Spiegelglasplatten geschlossen, in welche je zwei Glashähne eingekittet sind. In der Mitte ist dasselbe durchschnitten und beide Hälften sind in zwei durch eingelegte Metallplatten verstärkte Spiegelglasplatten eingelassen, zwischen denen sich ein Schieber von dünnem Stahlblech mittels eines Schraubengewindes hin und herführen lässt. Derselbe ist mit einer dem lichten Querschnitt des Glasrohres entsprechenden kreisförmigen Öffnung versehen, und eingerichtet, dass er in der einen Stellung I die beiden Rohrhälften von einander gasdicht absperrt, in der andern Stellung II dagegen die Kommunikation zwischen ihnen vollkommen frei lässt. Es wurden bei der Schieberstellung I beide Rohrhälften mit Quecksilber gefüllt, dasselbe dann durch die wohlgetrockneten Gase verdrängt, und der Apparat in die Vertikalstellung gebracht.

Nach etwa einer Viertelstunde wurde der Schieber möglichst rasch in die Stellung II gebracht, wodurch der Beginn der Diffusion herbeigeführt wurde. Nach Ablauf einer passenden Zeit, eine halbe oder eine ganze Stunde, ward der Schieber geschlossen, und damit die Diffusion beendet. Das Resultat der Diffusion wurde durch eine genaue Analyse der in der Rohrhälfte vorhandenen Gase festgestellt. Wie man sieht, entspricht das Verfahren im wesentlichen dem einen von Schuhmeister (§ 82) zur Bestimmung der Diffusion der Salze angewandten. Der Diffusionskoeffizient ergibt sich in ähnlicher Weise aus den gefundenen Gasmengen¹⁾. In dieser Weise erhielt Loschmidt unter andern folgende Diffusionskoeffizienten gedrückt in den oben angenommenen Einheiten

Wasserstoff — Kohlensäure	$k = 0,556$
Sauerstoff — Kohlensäure	0,141
Wasserstoff — Sauerstoff	0,722
Luft — Kohlensäure	0,142.

Loschmidt fand weiter, dass die Diffusionskoeffizienten einer und derselben Kombination der Summe der Gasdrücke, oder dem in dem Diffusionsgefäße vorhandenem Gesamtdrucke umgekehrt proportional seien, und dass ganz erheblich mit der Temperatur wachsen. Obige Werte beziehen sich auf die Temperatur des schmelzenden Eises.

Für die bei gleichem Drucke und gleicher Temperatur den verschiedenen Kombinationen entsprechenden Werte der Diffusionskoeffizienten ergeben die Beobachtungen Loschmidts, dass dieselben der Quadratwurzel aus dem Produkte der spezifischen Gewichte umgekehrt proportional sind, oder wenn die Dichtigkeiten der beiden Gase mit δ_1 und δ_2 bezeichnen, dass

$$k\sqrt{\delta_1\delta_2} = k_0$$

konstante GröÙe ist. Setzen wir das spezifische Gewicht der Luft zu 1, so wird:

¹⁾ Man sehe außer Loschmidt a. a. O. Stefan, Wiener Berichte Bd. LXIII. ff.

Luft $\delta = 1$	Luft — Kohlens.	$k \sqrt{\delta_1 \delta_2} = 0,1775$
Kohlensäure 1,53	Wasserst. — Kohlens.	„ = 0,1811
Wasserstoff 0,0693	Wasserst. — Sauerst.	„ = 0,1990
Sauerstoff 1,103	Sauerst. — Kohlens.	„ = 0,1848.

Die Zahlen der letzten Kolumne weichen in der That nur wenig voneinander ab.

§ 119.

Ableitung der Diffusion aus der dynamischen Gastheorie.

langsame Mischung, welche bei der Diffusion zweier Gase eintritt, glaubte Buys Ballot¹⁾ als mit der dynamischen Gastheorie nicht verträglich ansehen zu können, da bei der großen Geschwindigkeit der gasförmigen Bewegung es nur sehr kurze Zeit dauern könne, bis in geschlossenen Räumen zwei Gase sich mischen. Clausius²⁾ wies dem entgegen darauf hin, daß die Schnelligkeit, mit welcher zwei Gase sich mischen, nicht von der Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung allein, sondern ebenso von den Strecken abhängig sein müsse, welche die Gasmoleküle ungehindert zurücklegen. Es war das für Clausius der Anlaß, die mittlern Wegelängen der Gasmoleküle zu untersuchen, für welche sich dann Werte ergaben, § 118, welche nicht sehr große Vielfache des Radius der Wirkungskugel sind. Eine vollständigere Ableitung der Diffusion aus der dynamischen Gastheorie gaben Maxwell³⁾ und besonders Stefan⁴⁾. Wir begnügen uns hier damit, die Diffusion der Gase nur so weit aus der Theorie abzuleiten, daß wir erkennen, wie der Diffusionskoeffizient von den das Gas in der dynamischen Theorie charakterisierenden Größen, Geschwindigkeit und Wegelänge abhängig ist, wir schlagen dazu im wesentlichen denselben Weg der Betrachtung ein, den O. E. Meyer⁵⁾ gewählt hat.

Haben wir zunächst einen ganz gleichmäßig mit einem und demselben Gas gefüllten Raum, so ergeben uns die Entwicklungen des § 101 und die Anzahl der Moleküle, welche durch irgend eine Ebene in der Zeiteinheit in der einen Richtung hindurchgehen. Schon im § 116 leiteten wir daraus ab, daß, wenn in der Volumeinheit des Raumes n Moleküle vorhanden sind, durch eine in dem Gase gedachte Ebene pro Flächeneinheit in der Richtung, welche mit der zur Ebene senkrechten Richtung den Winkel ϑ bildet, in der Sekunde

$$\frac{nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2}$$

Moleküle hindurchgehen. Die gesamte durch die Flächeneinheit dieser Ebene hindurchfliegende Zahl erhalten wir in der Summe aller den verschiedenen Winkeln ϑ zwischen Null und $\frac{\pi}{2}$ entsprechenden Zahlen, also in der Summe

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{nu \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta}{2} = \frac{nu}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos^2 0 - \cos^2 \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4} nu.$$

¹⁾ Buys Ballot, Poggend. Ann. Bd. CIII.

²⁾ Clausius, Poggend. Ann. Bd. CV. Abhandl. zur mechanischen Wärmetheorie II p. 260.

³⁾ Maxwell, Philosoph. Mag. 4 series. vol. XX.

⁴⁾ Stefan, Wiener Berichte Bd. LXIII, Bd. LXV.

⁵⁾ O. E. Meyer, die kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877. p. 10

Es passiert also ein Viertel der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle in der Zeiteinheit die die Volumeinheit begrenzende Flächeneinheit der einen Richtung. Genau die gleiche Zahl passiert die Flächeneinheit an der andern Seite, so daß die Dichtigkeit und Druck des Gases überall die gleiche bleibt.

Denken wir uns jetzt, ein Gefäß enthalte etwa in der von Loschmidt wählten Anordnung zwei Gase, und die Diffusion habe schon eine Zeit lang gedauert. Es wird dann die Dichtigkeit des einen Gases von unten nach oben, die des andern von oben nach unten abnehmen. Nennen wir den Gesamtdruck der Gase in dem Gefäße p , in irgend einem Querschnitt den Druck des einen Gases p_1 , den des andern p_2 , so ist nach dem Dalton'schen Satze überall

$$p_1 + p_2 = p.$$

Gehen wir von dem betrachteten Querschnitt nach der Richtung des abnehmenden Druckes um eine kleine Entfernung x weiter, so werden wir die Druckabnahme dem Werte x proportional setzen, und somit den Druck Abstände x setzen dürfen

$$p' = p_1 - \frac{dp_1}{dx} \cdot x,$$

an der andern Seite des betrachteten Querschnitts wächst für gleiche Werte von x der Druck um dieselbe GröÙe.

Für den Druck des zweiten Gases p'' an derselben Stelle, wo der des ersten p' ist, erhalten wir ebenso

$$p'' = p_2 + \frac{dp_2}{dx} \cdot x$$

da nach dem Dalton'schen Satze auch $p' + p'' = p$, so muß demgemäß nach

$$\frac{dp_1}{dx} = \frac{dp_2}{dx}.$$

Dieselbe Beziehung, welche für die Verteilung des Druckes der einzelnen Gase gilt, gilt auch für die Zahl der in der Volumeinheit enthaltenen Moleküle. Nach einem von Avogadro aufgestellten Satze, der darauf basiert, daß das spezifische Gewicht der Gase ihrem chemischen Molekulargewichte proportional ist, befindet sich nämlich in mit Gas gefüllten Räumen gleicher Größe unter gleichem Drucke und bei gleicher Temperatur stets dieselbe Zahl von Molekülen, welches auch die chemische Natur des Gases sei. Wir werden auf diesen Satz in der Wärmelehre bei Untersuchung der Dampfdrucke zurückkommen. Nach diesem Satze können wir für das ganze Diffusionsgefäß an jeder Stelle setzen für die Anzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle

$$n = n_1 + n_2,$$

wo n_1 die an der betrachteten Stelle in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle des einen Gases und n_2 die des andern bedeuten. In einem Abstände x in der Richtung der abnehmenden Dichte des ersten Gases ist die Zahl der Moleküle des ersten Gases

$$n' = n_1 - \frac{dn_1}{dx} x,$$

die der zweiten Art

$$n'' = n_2 + \frac{dn_2}{dx} x,$$

wo wieder dem Werte nach

$$\frac{dn_1}{dx} = \frac{dn_2}{dx}.$$

Durch den betrachteten Querschnitt gehen nun stetig infolge der schreitenden Bewegung Moleküle der beiden Arten nach beiden Richtungen hin, deren Zahl wir zu bestimmen haben. Zu dem Zwecke machen wir wieder die Annahme, daß der von allen Molekülen desselben Gases zurückgelegte Weg derselbe sei. Da indes diese Moleküle sich nicht in Molekülen der gleichen Art bewegen, sondern da Moleküle beider Gase sich neben einander befinden, so dürfen wir für diese mittlere Wegelänge nicht die Wegelänge einsetzen, welche die Moleküle haben, wenn sie sich in einem mit gleichartigen Molekülen gefüllten Raume bewegen, sondern müssen einen andern noch näher zu bestimmenden Wert einsetzen. Wir nennen die Wegelänge des ersten Gases unter diesen Verhältnissen l' , die des zweiten l'' ; diese kommen den für die betreffenden Gase charakteristischen Wegelängen so nahe, je weniger Moleküle des zweiten Gases in dem betrachteten Raume vorhanden sind.

Denken wir uns das Gas I sei unten, das Gas II sei oben; durch den betrachteten Querschnitt nach oben tretenden Moleküle der ersten Art werden dann durch den allgemeinen Ausdruck für die durch die Flächeneinheit tretende Molekülzahl $\frac{1}{4} nu$ gegeben, wenn wir für n die Moleküldichte n' setzen, welche der Volumeinheit der Schicht entsprechen, die um l' vom betrachteten Querschnitt sich befindet. Diese ist

$$n' = n_1 + \frac{dn_1}{dx} l',$$

somit ist die Zahl der übertretenden Moleküle

$$v_1 = \frac{1}{4} u_1 \left(n_1 + \frac{dn_1}{dx} l' \right);$$

ganz entsprechend ist die Zahl der von unten nach oben gehenden Moleküle des zweiten Gases

$$v_2 = \frac{1}{4} u_2 \left(n_2 - \frac{dn_2}{dx} l'' \right).$$

Von oben nach unten treten Moleküle der beiden Gase

$$v'_1 = \frac{1}{4} u_1 \left(n_1 - \frac{dn_1}{dx} l' \right); \quad v'_2 = \frac{1}{4} u_2 \left(n_2 + \frac{dn_2}{dx} l'' \right).$$

Es gehen demnach von unten nach oben überhaupt mehr Moleküle des ersten als des zweiten Gases, wenn

$$v_1 - v'_1 > v_2 - v'_2.$$

Da die Mischung der Gase in so geringen Abständen von dem betrachteten Querschnitt nicht wesentlich verschieden sind, können wir die in den Ausdrücken für v_1 und v'_1 vorkommenden Werte von l' und ebenso in den für v_2 und v'_2 vorkommenden l'' als einander gleich setzen; da

$$\frac{dn_1}{dx} = \frac{dn_2}{dx},$$

wird

$$v_1 - v'_1 + v'_2 - v_2 = \frac{1}{2} \frac{dn_1}{dx} (\tau u_1 - \tau' u_2).$$

Durch diesen Überschuss würde indes oberhalb des betrachteten Querschnitts eine Vermehrung des Druckes eintreten; infolge dessen treten eben- viel Moleküle des oberhalb desselben vorhandenen Gasgemisches durch n Querschnitt auf die andere Seite zurück. Das Gemische enthält in der n Volumeneinheit n' Moleküle des ersten, n'' des zweiten Gases oder der $\frac{n'}{n}$ Teil des Gemisches besteht aus dem ersten, der $\frac{n''}{n}$ aus dem zweiten Gas. Es übt somit als Zuwachs des ersten Gases oberhalb des Querschnittes

$$\frac{1}{2} \frac{dn_1}{dx} \tau u_1 - \frac{n'}{n} \frac{1}{2} \frac{dn_1}{dx} (\tau u_1 - \tau' u_2),$$

oder

$$\frac{1}{2n} \frac{dn_1}{dx} ((n - n') \tau u_1 + n' \tau' u_2) = \frac{1}{2n} \frac{dn_1}{dx} (n'' \tau u_1 + n' \tau' u_2).$$

Genau derselbe Zuwachs von Molekülen des zweiten Gases findet unterhalb des Querschnittes statt, so daß sich also zunächst ergibt, daß der Diffusionsstrom der Gase nach beiden Richtungen der gleiche ist.

Weiter enthält dieser Ausdruck die der Theorie der Diffusion zu Grunde liegende Annahme, daß nämlich die Menge des durch die Querschnittseinheit tretenden Gases der Abnahme der Dichtigkeit des betreffenden Gases n einem von der Natur beider Gase abhängigen Koeffizienten proportional ist; dieser vorhin mit k bezeichnete Quotient ist

$$k = \frac{1}{2n} (n'' \tau u_1 + n' \tau' u_2).$$

Anstatt der Zunahme der Molekülzahl des ersten Gases erhalten wir jene des von dem ersten Gase ausgeübten Druckes, indem wir einfach $\frac{1}{2}$ durch $\frac{dp_1}{dx}$ ersetzen, da wir früher gezeigt haben, daß der Druck, den

Gas in einem gegebenen Raume ausübt, der Zahl der in demselben vorhandenen Moleküle proportional ist.

In einer Beziehung weicht dagegen der gefundene Wert von k von dem im vorigen Paragraphen gemachten Annahme ab, derselbe ist nicht für alle Gase bei gegebenem Gesamtdruck und gegebener Temperatur konstant, sondern ändert sich mit dem Mischungsverhältnisse der Gase, da sowohl n' als auch n'' als auch τ und τ' sich mit demselben ändern.

Bei den Versuchen von Loschmidt wird die Diffusion der Gase durch einen Querschnitt beobachtet, der anfänglich beide Gase von einander trennt, in dieser wird am Schlusse des Versuches wieder geschlossen und dann der Inhalt jeder Rohrhälfte analysiert. In diesem Querschnitt und in dessen Nähe wird man mit großer Annäherung annehmen dürfen, daß während der ganzen Dauer des Versuches die Zahlen n' und n'' der Moleküle der beiden Gase stets gleich sind, so daß jede gleich $\frac{1}{2} n$ ist. Für diese Verhältnisse ergibt sich dann k

$$k = \frac{1}{4} (\tau u_1 + \tau' u_2).$$

In dem Falle werden wir auch $\tau = \tau'$, also die mittlere Wegelänge der Moleküle im Gemische einander gleich setzen dürfen. Für diese Wege-

länge macht dann Stefan die Voraussetzung, daß sie dieselbe sein würde, wie wenn der Radius der Wirkungssphäre aller Moleküle derselbe und zwar gleich dem arithmetischen Mittel der Radien der Moleküle der beiden Gase sei. Vernachlässigen wir in dem Ausdruck für die Wegelängen den von den Wirkungssphären selbst ausgefüllten Raum, so ist

$$l = \frac{1}{\frac{1}{2} n \varrho^2 \pi};$$

nennen wir den Radius der Wirkungssphäre für das erste Gas ϱ_1 , für das zweite ϱ_2 , so wird

$$l' = l'' = \frac{1}{\frac{1}{2} n \left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2} \right)^2 \pi},$$

denn die Gesamtzahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle ist auch jetzt gleich n . Setzen wir die mittlere Wegelänge des ersten Gases l_1 , die des zweiten l_2 , beide Gase im ungemischten Zustande vorausgesetzt, so können wir setzen

$$\frac{1}{l'} = \frac{1}{2} \varrho_1 \sqrt{\frac{1}{2} n \pi} + \frac{1}{2} \varrho_2 \sqrt{\frac{1}{2} n \pi} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)$$

$$l' = l'' = 4 \frac{1}{\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)^2}.$$

Setzen wir diesen Wert ein, so wird

$$k = \frac{u_1 + u_2}{\left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} \right)^2},$$

ein Ausdruck, der zeigt, daß, wie Loschmidt fand, der Diffusionskoeffizient dem Gesamtdrucke des Gases umgekehrt proportional ist, da die Wegelängen der dem Gesamtdrucke der Gase proportionalen Molekülzahl n umgekehrt proportional sind. Ebenso ergibt sich nach den früheren Bemerkungen, daß der Diffusionskoeffizient sich mit der Temperatur ändert, da die Geschwindigkeiten u und die Wegelängen l sich mit derselben ändern.

Interessant ist, daß nach obigem Werte der Diffusionskoeffizient durch den Reibungskoeffizienten der beiden Gase ausgedrückt werden kann. Die Wegelängen l_1 und l_2 sind jene der Gasmoleküle, wenn die Volumeinheit n Moleküle des einen oder des andern Gases enthält; nennen wir den Reibungskoeffizienten des ersten Gases η_1 , des zweiten η_2 , so ist nach § 116

$$\eta_1 = \frac{1}{3} n m_1 u_1 l_1 \quad \eta_2 = \frac{1}{3} n m_2 u_2 l_2.$$

Setzen wir die hiernach sich ergebenden Werte für l_1 und l_2 in obigen Ausdruck für k , so wird

$$k = \frac{1}{n} \frac{3 \eta_1 \eta_2 (u_1 + u_2)}{(\sqrt{3} \eta_2 m_1 u_1 + \sqrt{3} \eta_1 m_2 u_2)^2},$$

Ausdruck, den wir zur numerischen Prüfung der Theorie benutzen, indem wir für die von Loschmidt gewählten Kombinationen

Diffusionskoeffizienten berechnen. Wir wollen indes diese Prüfung der Theorie im nächsten Paragraphen vornehmen, wenn wir die Wegelängen der Moleküle berechnet haben.

§ 120.

Absolute Werte der mittleren Wegelängen, Größe und Zahl der Moleküle. Die experimentelle Bestimmung der Reibungs- und Diffusionskoeffizienten setzt uns in den Stand, die absoluten Werte der Wegelängen der Gase zu bestimmen; in der Übereinstimmung der auf beiden Wegen erhaltenen Werte erhalten wir dann eine wertvolle Bestätigung der dynamischen Gastheorie. Für den Reibungskoeffizienten eines Gases erhielten wir

$$\eta = \frac{1}{3} mnul,$$

mit für die Wegelänge

$$l = 3 \cdot \frac{\eta}{mn u}.$$

Wir haben im § 117 die Reibung als Druck in Milligrammen auf den Quadratmillimeter ausgedrückt, oder was dasselbe ist, als die durch ein Quadratmillimeter der rascher strömenden Gasmasse zu der langsamer strömenden hintertretende Bewegungsgröße, wenn wir die Masse von einem Milligramm als Einheit der Masse setzen. Wir erhalten demnach die Wegelängen aus dem Reibungskoeffizienten in Millimetern, wenn wir für die Masse eines Kubikmillimeters des betreffenden Gases in Milligrammen, 1μ in Millimetern einsetzen.

Für Luft erhalten wir als Mittelwert für η bei 15° , wenn wir die Benennung von Maxwell ausschließen nach der Tabelle des § 117

$$\eta = 0,000\,001\,87.$$

Das Gewicht von 1 Kubikmillimeter Luft ist bei $15^\circ = 0,001\,226^{\text{mgr}}$, mit

$$mn = \frac{0,001\,226}{9810} = 0,000\,000\,124\,8.$$

Für die Geschwindigkeit u der Luftmoleküle bei 15° ergibt sich nach § 103 in Millimetern

$$u = 498\,000.$$

Mit diesen Werten wird

$$l = 0,000\,090\,2^{\text{mm}},$$

mittlere Wegelänge der Luftmoleküle beträgt somit nicht ganz den tausendsten Teil eines Millimeters.

Setzen wir die Dichtigkeit eines andern Gases bezogen auf Luft δ , so nennen wir für dieses schreiben

$$m_1 n_1 = mn \delta, \quad u_1 = \frac{u}{\sqrt{\delta}}, \quad m_1 n_1 u_1 = mn u \sqrt{\delta},$$

mit

$$l_1 = \frac{3 \eta_1}{mn u \sqrt{\delta}}.$$

Darnach wird für

	η_1	δ	l_1
Wasserstoff	0,000 000 94	0,069 26	0,000 172 4 ^{mm}
Sauerstoff	0,000 002 07	1,105 63	0,000 095 0
Stickstoff	0,000 001 81	0,971 37	0,000 088 6
Kohlensäure	0,000 001 55	1,529 01	0,000 060 5
Kohlenoxyd	0,000 001 72	0,967 30	0,000 086 7.

Der zweite Weg zur Berechnung der mittlern Wegelänge ist durch die Beobachtung der Diffusionskoeffizienten zwischen den möglichen Kombinationen dreier Gase, also etwa Wasserstoff-Sauerstoff, Wasserstoff-Kohlensäure und Sauerstoff-Kohlensäure gegeben. Nennen wir die Geschwindigkeiten der Moleküle der drei Gase u_1, u_2, u_3 , die Wegelängen l_1, l_2, l_3 , die Diffusionskoeffizienten k_{12}, k_{13}, k_{23} , so ist

$$k_{12} = \frac{u_1 + u_2}{\left(\sqrt{\frac{1}{l_1}} + \sqrt{\frac{1}{l_2}}\right)^2}; \quad k_{13} = \frac{u_1 + u_3}{\left(\sqrt{\frac{1}{l_1}} + \sqrt{\frac{1}{l_3}}\right)^2};$$

$$k_{23} = \frac{u_2 + u_3}{\left(\sqrt{\frac{1}{l_2}} + \sqrt{\frac{1}{l_3}}\right)^2},$$

drei Gleichungen, aus denen sich die drei Werte von l berechnen lassen. Aus den von Loschmidt gegebenen Koeffizienten für diese drei Gase gibt sich dann

Wasserstoff — Sauerstoff	$k_{12} = 0,722$	$l_1 = 0,000 225 1$
Wasserstoff — Kohlensäure	$k_{13} = 0,556$	$l_2 = 0,000 079 8$
Sauerstoff — Kohlensäure	$k_{23} = 0,141$	$l_3 = 0,000 055 7$

Werte, die allerdings nicht ganz mit den aus der Reibung abgeleiteten übereinstimmen, die aber unter Beachtung, daß der von uns abgeleitete Diffusionskoeffizient nur angenähert richtig ist, denselben so nahe kommen, daß wir in den Resultaten der Rechnung eine schöne Bestätigung der dynamischen Gastheorie erkennen. Berechnen wir aus unseren aus Reibung abgeleiteten Wegelängen die Diffusionskoeffizienten, so wird

$$k_{12} = 0,721 3 \quad k_{13} = 0,532 9 \quad k_{23} = 0,159 7;$$

es weicht also nur der Diffusionskoeffizient Sauerstoff-Kohlensäure erheblich von den beobachteten ab.

Andere der von Loschmidt angewandten Kombinationen liefern andere Werte, so liefern die Kombinationen Wasserstoff-Sauerstoff-Kohlenoxyd

$$k_{12} = 0,722 \quad k_{13} = 0,642 \quad k_{23} = 0,180$$

$$l_1 = 0,000 206 2 \quad l_2 = 0,000 084 1 \quad l_3 = 0,000 068 1.$$

Für die beiden ersten Wegelängen ergeben sich Werte, die den der Reibung erhaltenen näher kommen, der für Kohlenoxyd erhaltene dagegen erheblich kleiner.

Die Bestimmung der absoluten Werte der mittleren Wegelängen hat uns weiter in den Stand, einen angenäherten Wert für die Radien

irkungssphären zu erhalten, und zwar bieten sich dazu wiederum zwei Wege. Der erste benutzt dazu die nach den Entwicklungen von van der Waals, § 102, mitgeteilte theoretische Bedeutung der Größe b , welche in der Gleichung das Verhalten der Gase an Stelle des Mariotteschen Gesetzes charakterisierend vorkommt. Dieselbe ist das von der Wirkungssphäre r in dem Raum V unter dem Drucke p vorhandenen Moleküle ausgefüllte Volumen, somit wenn wir die Volumeinheit Gas unter dem Drucke p voraussetzen und wie immer die Zahl der in der Volumeinheit vorhandenen Moleküle mit n bezeichnen,

$$b = n \frac{4}{3} \varrho^3 \pi.$$

Für die Wegelängen l , ausgedrückt durch den Radius der Wirkungssphäre, fanden wir § 101

$$\frac{l}{\varrho} = \frac{V - N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi}{N \frac{4}{3} \varrho^3 \pi} = \frac{1 - n \frac{4}{3} \varrho^3 \pi}{n \frac{4}{3} \varrho^3 \pi} = \frac{1 - b}{b},$$

mit

$$\varrho = l \frac{b}{1 - b}.$$

Im § 102 erhielten wir für Stickstoff als Wert von $b = 0,002\,325$, ein Wert, der, wie wir sahen, auch die Amagatschen Beobachtungen bis zu 8 Meter Quecksilber gut wieder gab. Als Druck p ist hier jener von 1 Meter Quecksilber angenommen; unsere Wegelängen beziehen sich dagegen auf 1 Atmosph. = 0,76 Meter Quecksilber. Da die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit dem Drucke proportional ist, so enthält dieselbe unter Atmosphärendruck nur 0,76 derjenigen, welche sie unter dem Drucke von 1 Meter enthält. Der von ihnen ausgefüllte Raum ist daher

$$b = 0,76 \cdot 0,002\,325 = 0,001\,767.$$

Damit wird für Stickstoff

$$\varrho = l \frac{0,001\,767}{1 - 0,001\,767} = \frac{l}{564}.$$

Die mittlere Wegelänge würde somit bei Stickstoff, wenn derselbe unter dem Drucke einer Atmosphäre steht, gleich dem 564 fachen des Radius der Wirkungssphäre sein. Für ϱ erhalten wir daraus in Millimetern

$$\varrho = \frac{0,000\,088\,6}{564} = 0,000\,000\,157,$$

oder etwa anderthalb Zehnmillionstel eines Millimeters.

Mit diesem Werte erhalten wir die Zahl n der in einem Kubikmillimeter unter dem Drucke einer Atmosphäre vorhandenen Stickstoffmoleküle aus der Gleichung für b

$$n = \frac{b}{\frac{4}{3} \varrho^3 \pi} = \frac{0,001\,767}{\frac{4}{3} \varrho^3 \pi},$$

, wenn wir ϱ in Millimetern angeben, b der Radius der Wirkungssphäre der in einem Kubikmillimeter Gas ausgefüllte Volumeinheit ist. Mit dem oben erhaltenen Werte

$$n = 1090.$$

oder im Kubikmillimeter Stickstoff, wenn derselbe unter dem Drucke Atmosphäre steht, befinden sich 109 000 Billionen Moleküle.

Einen zweiten, zuerst von Loschmidt benutzten Weg bietet der Vergleich des Volumens der Gase, welche durch Druck flüssig gemacht werden können, mit dem Volumen der aus ihnen entstandenen Flüssigkeiten. Wir können zu diesem Zwecke die Kohlensäure benutzen, deren specif. Gewicht in flüssiger Form wir § 111 zu 0,947 bei der Temperatur schmelzenden Eises angaben.

Bei derselben Temperatur ist das Gewicht von 1 Kubikmillimeter förmiger Kohlensäure unter dem Druck einer Atmosphäre, da das specif. Gewicht derselben, bezogen auf Luft, gleich 1,529 ist und 1 Kubikmeter Luft unter denselben Verhältnissen 0,001 293 Milligramm wiegt,

$$0,001\,293 \cdot 1,529 = 0,001\,977.$$

Das Volumen dieser Kohlensäuremenge in flüssiger Form ist in Kubikmillimetern

$$\frac{0,001\,977}{0,947} = 0,002\,08.$$

Im flüssigen Zustande sind die Moleküle einander so nahe, daß die geringe Kompressibilität zeigt, dieselben überhaupt nur wenig voneinander genähert werden können. Wir werden daher nur wenig von der Wahrheit abweichen, wenn wir annehmen, daß die Moleküle einander weit genähert sind, wie sie es im Gaszustande im Augenblicke des Schmelzens sind. Dann würde also der Abstand der Mittelpunkte der Moleküle gleich dem Radius der Wirkungssphären sein. Man würde sich etwa die Moleküle selbst als Kugeln denken können, deren Durchmesser gleich dem Radius der Wirkungssphäre wäre, und daß diese Kugeln sich zur Berührung nicht könnten, denn in dem Falle wäre der Abstand ihrer Mittelpunkte gleich dem Durchmesser der Moleküle. Die von uns bisher allein in Betracht gezogenen Wirkungssphären entsprächen dann dem Achtfachen des von einem Molekül selbst ausgefüllten Raumes.

Wir erhalten aus dem von der flüssigen Kohlensäure in Anspruch genommenen Raume den von den Wirkungssphären ausgefüllten in folgender Weise. Denken wir um jedes der im flüssigen Zustande sich befindlichen Moleküle einen Würfel gelegt, dessen Seite gleich dem Durchmesser des Moleküls ist, so füllen diese Würfel den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum aus. Der von den Molekülen wirklich ausgefüllte Raum verhält sich somit zu dem von der Flüssigkeit ausgefüllten, wie das Volumen der Kugel zu dem des umschriebenen Würfels, er ist somit $\frac{1}{8}$ des ganzen Raumes. Da nun die Wirkungssphären den achtfachen Raum einnehmen, ist derselbe $\frac{8}{8} \pi$ des von der Flüssigkeit ausgefüllten Raumes somit

$$b = \frac{8}{8} \pi \cdot 0,002\,08 = 0,008\,69,$$

und dann

$$e = l \cdot \frac{b}{1-b} = \frac{l}{114} = \frac{0,000\,060\,5}{114} = 0,000\,000\,53,$$

wo wir als l den aus der Reibung sich ergebenden Wert der mittleren Weglänge einsetzen.

Der Radius der Wirkungssphäre wäre also etwas mehr als dreimal so groß als bei Stickstoff. Für die Molekülzahl n ergibt sich dann

$$n = 139,4 \cdot 10^{14}.$$

Die Annahme, daß die Moleküle, dieselben als Kugeln gedacht, sich unmittelbar berühren, ist keinesfalls ganz richtig, und damit wird b und damit ρ etwas zu groß und n zu klein. Nach dem Avogadro'schen Satze müßte dieses n dem für Stickstoff gefundenen gleich sein, letzteres ist aber etwa das siebenfache. Indes, wenn wir beachten, aus welcher verschiedenen Erfahrungen wir die beiden Zahlen abgeleitet haben, und daß weder die für den Stickstoff aus den Regnault'schen Beobachtungen abgeleitete Größe b vollkommen genau, noch daß der für die Kohlensäure berechnete Wert ganz richtig ist, weiter, daß die Werte der mittleren Wegelängen die gleiche Unsicherheit enthalten, welche die experimentell bestimmten Reibungskoeffizienten haben, so müssen wir die Übereinstimmung der Werte von n für eine ganz außerordentlich nahe halten und darin einen neuen Beweis erblicken, wie vortrefflich die dynamische Gastheorie die verschiedensten bei den Gasen beobachteten Erscheinungen aus der einfachen Grundhypothese abzuleiten vermag. Würden wir annehmen, daß im flüssigen Zustande der Abstand der Schwerpunkte der Moleküle nur das 1,5fache des Radius der Wirkungssphäre wäre, so würde der für Kohlensäure berechnete Wert von n schon auf mehr als das Zehnfache steigen. Überhaupt läßt sich ja bei diesen Berechnungen nicht mehr erwarten, als daß wir in den schließlich Resultaten nur ein ungefähres Bild der äußerst kleinen Dimensionen und der sehr großen Zahl der Moleküle erhalten, wir können die für Stickstoff und Kohlensäure berechneten Werte von n als eine obere und untere Grenze ansehen, zwischen denen die Zahl der Moleküle eingeschlossen ist.

§ 121.

Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen. Trennt man zwei Gase durch eine poröse Scheidewand, z. B. durch eine poröse Thonplatte oder durch ein Gypsdaphragma, dessen Poren so enge sind, daß in Folge selbst bedeutender Drucke die Gase nur mit geringer Geschwindigkeit hindurchfließen, so zeigt sich, daß auch durch solche Scheidewände hindurch die Gase sich mit großer Geschwindigkeit mischen. Sorgt man dafür, daß der Druck auf beiden Seiten der Scheidewand während der ganzen Dauer des Versuches genau gleich ist, so sieht man, daß die in entgegengesetzter Richtung durch die Scheidewand hindurchtretenden Gasvolumina keineswegs gleich sind, daß also die chemisch verschiedenen Gase die Scheidewand mit verschiedenen Geschwindigkeiten durchdringen.

Die ersten genauern Versuche über die Diffusion der Gase durch trockene poröse Scheidewände rühren von Graham¹⁾ her. Derselbe ließ verschiedene Gase, die er in Röhren, welche mit einem trockenen Gypspfropf verschlossen waren, über Quecksilber absperrte, in atmosphärische Luft diffundieren, und fand, daß das gegen Luft unter konstantem Drucke ausgetauschte Gasvolumen nahezu der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der Gase umgekehrt

¹⁾ *Graham, Poggend. Annalen Bd. XVII und XXVIII.*

proportional war. So verhält sich z. B. die Dichtigkeit der Luft zu der des Wasserstoffes wie

$$1,000 : 0,069\ 26,$$

oder wie

$$14,43 : 1;$$

für 1 Volumen Luft, welches in die Diffusionsröhre durch den Gypspfropf eingetreten war, traten nun 3,1 Volumina Wasserstoff aus; die Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten der Luft und des Wasserstoffes verhalten sich aber wie 3,8 : 1; man sieht, daß die ausgetauschten Gasmengen nahezu im umgekehrten Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten stehen.

Da die sich austauschenden Gasmengen diejenigen sind, welche in gleichen Zeiten durch die Scheidewand hindurchtreten, so messen sie zugleich die Geschwindigkeiten, mit denen die verschiedenen Gase durch die Scheidewand hindurchfließen.

Vorhin sahen wir, daß die Ausflufgeschwindigkeiten verschiedener Gase aus Öffnungen in dünner Wand unter gleichem Drucke den Quadratwurzeln aus ihren Dichtigkeiten umgekehrt proportional sind. Die Diffusionsgeschwindigkeiten verhalten sich also nahezu wie die Ausflufgeschwindigkeiten aus dünner Wand.

Graham nahm nun an, daß die Diffusionsgeschwindigkeiten mit den Ausflufgeschwindigkeiten genau übereinstimmen, und gründete darauf eine Erklärung der Diffusionserscheinungen. Nach dieser verbreitet sich ein Gas in ein anderes gerade so wie in den leeren Raum und die Bewegung erfolgt mit derselben Geschwindigkeit. Die Poren der Thonplatte sieht man dann an als Öffnungen in dünner Wand und dann folgt unmittelbar, daß die ausgetauschten Gasmengen sich verhalten müssen wie die reciproken Werte aus den Quadratwurzeln der Dichtigkeiten.

Bunsen¹⁾ machte jedoch später darauf aufmerksam, daß die Erklärung nicht zulässig sei, da nur bei Anwendung von Öffnungen in dünner Wand die Ausflufgeschwindigkeiten in dem erwähnten Verhältnisse stehen, nicht aber bei der Anwendung enger und besonders kapillarer Röhren. Wenn nun auch bei der Anwendung poröser Diaphragmen die Gesetze des Auströmens nicht einfach diejenigen der Transpiration durch lange kapillare Röhren sein werden, so ist es doch wahrscheinlich, daß die Gase durch solche Diaphragmen nicht wie aus Öffnungen in dünner Wand fließen.

Letzteres hat Bunsen dann zunächst nachgewiesen; eine mit einer Teilung versehene und kalibrierte Glasröhre wurde oben mit einem Gypspfropf, der bei 60° getrocknet war, geschlossen, mit Quecksilber gefüllt, und dann mit dem Gypspfropf nach oben in ein tiefes Quecksilbergeläß gesenkt. Dann wurde das obere durch den Gypspfropf geschlossene Ende der Röhre mit einem Raume in Verbindung gesetzt, der mit den verschiedenen Gasen unter dem während des ganzen Versuches konstant erhaltenen Drucke einer Atmosphäre gefüllt werden konnte. Wurde das Rohr allmählich aus dem Quecksilber herausgezogen, so strömte durch das Diaphragma das Gas in die Röhre. War dann der Druck in der Röhre nur wenig mehr von dem Drucke einer Atmosphäre verschieden, so hielt man durch langsames

Heben der Röhre den Druck des Gases eine Zeit lang auch im Innern der Röhre konstant, und beobachtete die Zeit, welche erforderlich war, daß eine bestimmte Menge Gas durch das Diaphragma in die Röhre einströmte.

Dabei ergab sich, daß die Einströmungsgeschwindigkeit, das ist die immer unter demselben Drucke von 1^m in der Zeit 1" einströmende Gasmenge der Differenz der an beiden Seiten des porösen Diaphragmas vorhandenen Drucke bei den einzelnen Gasen proportional war, und daß die Einströmungsgeschwindigkeit verschiedener Gase keineswegs in dem reciproken Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichten steht. So erhielt Bunsen unter andern folgende Werte:

Sauerstoff

Einströmungsgeschwindigkeit V_1	0,091 87	0,197 7	0,305 8
Druckdifferenz p in M. Quecksilber . . .	0,016 7	0,033 5	0,052 0
$\frac{V_1}{p}$	5,893	5,901	5,881.

Wasserstoff

Einströmungsgeschwindigkeit V_1	0,266 5	0,536 9	0,843 1
Druckdifferenz p in M. Quecksilber . . .	0,016 7	0,033 8	0,052 0
$\frac{V_1}{p}$	15,96	15,89	16,21.

Während also die Druckdifferenzen von 16,7^{mm} bis 52^{mm} Quecksilber wachsen, zeigen sich die Einströmungsgeschwindigkeiten den Drucken scharf proportional.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten für Wasserstoff und Sauerstoff ist im Mittel 1 : 2,71, während das Verhältnis der reciproken Quadratwurzeln der Dichten 1 : 3,995 ist.

Das Verhalten der durch Diaphragmen strömenden Gase kommt also mit dem durch kapillare Röhren strömenden Gase überein, und das Verhältnis der von Bunsen beobachteten Einströmungsgeschwindigkeiten weicht auch nicht sehr von dem Verhältnis der reciproken Werte der Reibungskoeffizienten ab, wie sie sich im § 117 aus Meyers Beobachtungen der Transpirationszeiten, 1 : 2, ergaben.

Wollte man nun im übrigen die Grahamsche Theorie beibehalten, also die Diffusion der Gase einfach als eine Strömung durch kapillare Röhren ansehen, weil ein Gas ein anderes nicht in einem bestimmten Raume absperren kann, so müßten sich die Diffusionsgeschwindigkeiten nahe wie die Ausströmungsgeschwindigkeiten durch kapillare Röhren verhalten, das ist aber nach den vorhin angegebenen Zahlen Grahams, welche Bunsen bestätigt fand, nicht der Fall. Bunsen fand das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigkeiten Luft zu Wasserstoff wie 1 : 3,34, Sauerstoff zu Wasserstoff wie 1 : 3,345, Zahlen, welche dem Verhältnis der reciproken Werte der Quadratwurzeln aus den Dichten näher kommen als dem Verhältnis der vorher bestimmten Einströmungsgeschwindigkeiten.

Außerdem nimmt Bunsen an, daß die Verhältnisse der Diffusionsgeschwindigkeiten von der Natur des Diaphragmas abhängig sind, wodurch eine weitere Abweichung von den einfachen Strömungserscheinungen der Gase bedingt wäre.

Eine ausführlichere Theorie dieser Diffusionserscheinungen ist später von Stefan¹⁾ gegeben worden, in welcher er einen wohl zuerst von Maxwell²⁾ ausgesprochenen Gedanken ausführt, nach welchem man diese Diffusion als einen Specialfall der in den Paragraphen 118 und 119 betrachteten Diffusion ansehen kann. Stefan untersucht zunächst die Diffusion der Gase, denen ein drittes Gas gleichförmig beigemischt ist, also etwa die Diffusion von Wasserstoff und Sauerstoff, denen beiden Kohlensäure beigemischt ist. Man kann dann die Diffusion der Gase durch poröse Diaphragmen als eine solche ansehen, wobei indes die Moleküle des dritten Gases nicht beweglich, sondern fest sind. Ein weiteres Eingehen in die Theorie würde uns zu weit führen, wir verweisen auf die Abhandlung von Stefan.

§ 122.

Stoß und Widerstand der Luft. Wenn die bewegte Luft gegen einen festen Körper stößt, so verliert sie wie jeder bewegte Körper, wenn er auf einen ruhenden trifft, an Geschwindigkeit. Diese Geschwindigkeit wird auf den getroffenen Körper übertragen, und ist der Anstoß hinreichend groß, so kann letzterer durch den Stoß der Luft in Bewegung versetzt werden. So ist es der Stoß der Luft, welcher die Segelschiffe treibt, oder die Flügel der Windmühlen dreht. Die Kraft, welche die bewegte Luft ausübt, läßt sich nach den frühern Gesetzen bestimmen, sie ist proportional dem Produkte aus der Masse der bewegten Luft in das Quadrat der Geschwindigkeit der Bewegung. Je rascher die Bewegung der Luft ist, um so kräftiger sind daher auch die Wirkungen, welche ihr Stoß hervorbringt; die zerstörenden Wirkungen der Orkane sind bekannt.

Ebenso wie die bewegte Luft einen Teil ihrer Geschwindigkeit verliert, wenn sie gegen andere Körper stößt, so muß auch die Geschwindigkeit eines in ruhender Luft bewegten Körpers abnehmen, da er gegen die ruhenden Luftmassen stößt und diese aus der Stelle drängen muß. Daß die Größe dieses Widerstandes von der Geschwindigkeit des bewegten Körpers abhängig sein muß, das erkennt man leicht, da je größer die Geschwindigkeit ist, um so mehr ruhende Luft von dem Körper getroffen wird. Newton nahm an, daß der Luftwiderstand dem Quadrate des bewegten Körpers proportional sei. Man kann diese Annahme in folgender Weise plausibel machen.

Ist die Geschwindigkeit des Körpers zur Zeit t und während der unendlich kleinen Zeit dt gleich v , und verdrängt er während dieser Zeit die Luftmasse m , so überwindet er den Luftwiderstand dadurch, daß er dieser Luftmenge die Geschwindigkeit v erteilt. Die dazu erforderliche Kraft ist aber nach § 11 Gleichung I gleich $\frac{mv}{dt}$, oder auch, wenn wir den in der Zeit dt zurückgelegten Weg mit ds bezeichnen, da dann $v = \frac{ds}{dt}$, gleich $\frac{m \cdot ds}{dt^2}$. Die Masse m ist nun aber dem in der Zeit dt zurückgelegten Wege proportional, so daß wir dieselbe setzen können $m = \mu \cdot ds$. Setzen wir diesen Wert in obigen Ausdruck ein, so erhalten wir für die zur Überwindung des Widerstandes erforderliche Kraft $\mu \cdot \frac{ds^2}{dt^2}$ oder μv^2 . Infolge des Luft-

¹⁾ Stefan, Wiener Berichte Bd. LXIII.

²⁾ Maxwell, Phil. mag. 4 ser. vol XX.

Leben der Röhre den Druck des Gases eine Zeit lang auch im Innern der Röhre konstant, und beobachtete die Zeit, welche erforderlich war, als eine bestimmte Menge Gas durch das Diaphragma in die Röhre einströmte.

Dabei ergab sich, daß die Einströmungsgeschwindigkeit, das ist die Menge unter demselben Drucke von 1^m in der Zeit 1ⁿ einströmende Gasmenge der Differenz der an beiden Seiten des porösen Diaphragmas vorhandenen Drucke bei den einzelnen Gasen proportional war, und daß die Einströmungsgeschwindigkeit verschiedener Gase keineswegs in dem reciproken Verhältnisse der Quadratwurzeln aus den Dichten steht. So erhielt Bunsen unter andern folgende Werte:

Sauerstoff

Einströmungsgeschwindigkeit V_1	0,091 87	0,197 7	0,305 8
Druckdifferenz p in M. Quecksilber . . .	0,016 7	0,033 5	0,052 0
$\frac{V_1}{p}$	5,893	5,901	5,881.

Wasserstoff

Einströmungsgeschwindigkeit V_1	0,266 5	0,536 9	0,843 1
Druckdifferenz p in M. Quecksilber . . .	0,016 7	0,033 8	0,052 0
$\frac{V_1}{p}$	15,96	15,89	16,21.

Während also die Druckdifferenzen von 16,7^{mm} bis 52^{mm} Quecksilber rechen, zeigen sich die Einströmungsgeschwindigkeiten den Drucken scharf proportional.

Das Verhältnis der Geschwindigkeiten für Wasserstoff und Sauerstoff zum Mittel 1 : 2,71, während das Verhältnis der reciproken Quadratwurzeln der Dichten 1 : 3,995 ist.

Das Verhalten der durch Diaphragmen strömenden Gase kommt also mit dem durch kapillare Röhren strömenden Gase überein, und das Verhältnis der von Bunsen beobachteten Einströmungsgeschwindigkeiten weicht auch nicht sehr von dem Verhältnis der reciproken Werte der Reibungskoeffizienten ab, wie sie sich im § 117 aus Meyers Beobachtungen der Transpirationszeiten, 1 : 2, ergaben.

Wollte man nun im übrigen die Grahamsche Theorie beibehalten, also die Diffusion der Gase einfach als eine Strömung durch kapillare Röhren ansehen, weil ein Gas ein anderes nicht in einem bestimmten Raume abperren kann, so müßten sich die Diffusionsgeschwindigkeiten nahe wie die Ausströmungsgeschwindigkeiten durch kapillare Röhren verhalten, das ist aber nach den vorhin angegebenen Zahlen Grahams, welche Bunsen bestätigt hat, nicht der Fall. Bunsen fand das Verhältnis der Diffusionsgeschwindigkeiten Luft zu Wasserstoff wie 1 : 3,34, Sauerstoff zu Wasserstoff wie 1 : 3,345, Kohlen, welche dem Verhältnis der reciproken Werte der Quadratwurzeln der Dichten näher kommen als dem Verhältnis der vorher bestimmten Einströmungsgeschwindigkeiten.

Außerdem nimmt Bunsen an, daß die Verhältnisse der Diffusionsgeschwindigkeiten von der Natur des Diaphragmas abhängig sind, wodurch die weitere Abweichung von den einfachen Strömungserscheinungen der Natur bedingt wäre.

folgt dann unmittelbar, daß bei dem freien Fall in der Luft leichte Körper langsamer fallen müssen als schwere, so daß wir in dem Widerstande der Luft neben dem früher erwähnten Gewichtsverlust der Körper in der Luft den Grund der beobachteten Abweichung vom Fallgesetz erkennen.

Anhang zu Abschnitt I und II.

Über absolute Maßsysteme.

Wir haben in der Einleitung die Maße angegeben, nach welchen wir die bei den physikalischen Erscheinungen auszuwertenden Größen messen. Es waren das Meter, entsprechend dem in Paris deponierten Etalon als Längeneinheit, die Sekunde als Zeiteinheit und das Gewicht eines Kubikcentimeters Wasser bei der Temperatur 4° C., das Gramm, als Gewichtseinheit; anstatt des letztern auch das Tausendfache desselben, das Kilogramm.

Die Gewichtseinheit benutzten wir im ersten Abschnitt sofort, um Kräfte, Bewegungsantriebe zu messen; wir gingen dabei von der Erfahrung aus, daß wir jedem Bewegungsantriebe durch den Zug, den ein schwerer Körper oder eine gewisse Anzahl von Kubikcentimeter oder Kubikdecimeter Wasser gegen die Erde hin erfahren, das Gleichgewicht halten können, und maßen die Kraft durch den entgegengesetzt gleichen Zug, also nach Gramm oder Kilogrammen. Dadurch, daß wir die Kraft nach Gewichten maßgaben wir eigentlich erst die genaue Definition dessen, was wir unter Gewicht verstanden, nämlich den Antrieb, den ein schwerer Körper in vertikaler Richtung gegen die Erde erfährt, der sich als Druck gegen die Unterlage zu erkennen gibt, wenn der Körper unterstützt ist, und der den Körper mit gleichmäßig beschleunigter Bewegung in vertikaler Richtung gegen die Erde treibt, wenn ihm die Unterstützung entzogen wird.

Damit hatten wir für alle bisher zu messenden physikalischen Größen ein allerdings willkürliches aber festbestimmtes System von Grundmaßen festgestellt, aus welchem alle übrigen Maße, wie das der Geschwindigkeit, Beschleunigung u. s. f. abgeleitet wurden.

Wir hatten zunächst dieses Grundmaß der Kraft gewissermaßen als ein Hilfsmaß aufgestellt, aber auch als wir die Gesetze der gleichmäßig beschleunigten Bewegung untersucht hatten und im § 11 zeigten, daß wir die Kraft durch ihre Wirkung, durch die Beschleunigung, die sie einer Masse erteilt, messen können, behielten wir dieses Maß bei. Wir erhielten für die Kraft die Gleichung

$$p = mG,$$

wenn G die der Masse m durch die Kraft p erteilte Beschleunigung ist. Für die Masse hatten wir vorher erkannt, daß sie dem Gewichte eines Körpers, also dem Zuge, den derselbe gegen die Erde hin erfährt, und die wir messen, indem wir an der Wage denselben mit dem Zuge einer gewissen Anzahl Kubikdecimeter Wasser resp. mit dem von Gewichtsstücken die den gleichen Zug ausüben, vergleichen, proportional ist. Das Maß der

Masse bildeten wir aber aus unserem Kraftmaß, indem wir jene Masse als Masseneinheit festsetzten, welche durch die Einheit des Bewegungsantriebes, 1 Kilogramm in der Sekunde die Beschleunigung von 1 Meter erhielt. Das Maß der Masse war also ein aus unseren drei Grundmaßen abgeleitetes Maß.

Im dritten Kapitel des ersten Abschnittes fanden wir, daß die Beschleunigung, welche das Kubikdecimeter Wasser oder ein demselben an Gewicht gleicher Körper an verschiedenen Stellen der Erde bei freiem Fall erfährt, eine verschiedene ist. Wir mußten daraus schließen, daß der Antrieb, welchen ein und derselbe Körper gegen die Erde hin erfährt, an den verschiedenen Punkten der Erdoberfläche und in verschiedenen Höhen über dem Meeresniveau ein verschiedener ist, daß also das Gewicht eines und desselben Körpers eine Funktion der geographischen Breite und der Höhe über dem Meeresniveau ist.

Hieraus folgt, daß unser bisher angenommenes System von Grundmaßen uns strenge genommen nur die unter derselben geographischen Breite und in derselben Höhe über dem Meeresniveau angestellten Messungen vergleichbar macht, das heißt, daß die Zahlenwerte für irgend eine gemessene Größe, in welche die Kraft eingeht, nur an den so gelegenen Orten dieselben bleiben. Messen wir dieselbe Größe an einem anders gelegenen Orte, so wird der für dieselbe gefundene Zahlenwert ein anderer, da dort ein anderer Zug, den wir ein Kilogramm nennen, also unsere Einheit der Kraft eine andere ist. Unser Maßsystem ist demnach nur ein relatives, das heißt das Verhältnis der Zahlenwerte der in demselben ausgedrückten Größen ist an allen Orten dasselbe, die Zahlenwerte selbst ändern sich von Ort zu Ort. An irgend einem Orte irgend eine Größe gemessen gleich z Kilogrammen finden

$$E = z K;$$

an einem andern Orte, wo der Wert des Kilogrammes nicht K , sondern K_1 , müssen wir bei Messung derselben Größe

$$E = z_1 K_1,$$

ein andern Zahlenwert z_1 finden. Sind g_a und g_b die Beschleunigungen im freiem Fall an beiden Orten, so ist

$$K : K_1 = g_a : g_b$$

$$K_1 = K \frac{g_b}{g_a},$$

mit ist

$$E = z_1 \left(\frac{g_b}{g_a} \right) K,$$

so es muß

$$z_1 \left(\frac{g_b}{g_a} \right) = z; \quad z_1 = z \left(\frac{g_a}{g_b} \right).$$

Ein Zug also oder ein Antrieb, den wir an einem Orte, wo die Beschleunigung g_a ist, gleich z Kilogrammen finden, würde an einem Orte, wo die Beschleunigung gleich g_b ist, als z_1 Kilogramme bezeichnet, wo $z_1 = z \frac{g_a}{g_b}$ ist. Um also eine an dem Orte a ausgeführte Messung auf den

Ort b zu übertragen, müssen wir den Zahlenwert für jede der Kraftproportionale Größe mit dem Quotienten aus den Beschleunigungen an Orte a und an dem Orte b multiplicieren.

Eine solche Korrektur würde z. B. an allen Elasticitätskoefficienten anzubringen sein, die wir nach Kilogrammen messen. Ein unter 45° n. Br. etwa gleich 10 000 gefundener Elasticitätskoefficient unter dem Äquator in dem Maße größer gefunden werden, als die Beschleunigung dort kleiner ist als unter 45° n. Br., er würde

$$10000 \frac{9,805\ 52}{9,780\ 09} = 10026.$$

Auch dann, wenn wir die Kraft durch die Beschleunigung messen, sie einer Masse m erteilt, müssen wir sie durch denselben Quotienten einem Orte zu einem andern gelegenen übertragen, da wir auch dann in der Definition der Masseneinheit die Kraft in Kilogrammen des betreffenden Ortes messen. Wir nennen eben jene Masse eins, welche durch den A eins die Beschleunigung eins bekommt, setzen also die Masse eines Liter Wassers oder eines Körpers, der mit demselben das gleiche Gewicht hat, stets $\frac{1}{g}$. In dem Maße somit, in welchem die Kraft größer wird, setzen wir die Einheit der Masse in unsern Gleichungen ebenfalls größer, oder die Masse eines gegebenen Körpers entspricht in dem Verhältnisse kleineren Zahl von Masseneinheiten. Da nun die Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist, so wird die Anzahl der Einheiten, die einem gegebenen Körper eine bestimmte Beschleunigung geben, in dem Verhältnisse kleiner, als die Zahl Masseneinheiten, die wir dem Körper beilegen.

Ein Beispiel wird das noch klarer machen. Eine gespannte Feder gibt bei dem Loschnellen einem gegebenen Körper überall dieselbe Geschwindigkeit c ; sei das an der Waage bestimmte Gewicht des Körpers in Kilogrammen gleich q . Diese Zahl q finden wir für denselben Körper an allen Orten gleich, denn sie bedeutet immer die Zahl Kubikdecimeter Wasser, welche an demselben Orte den gleichen Zug gegen die Feder erfahren wie der abgewogene Körper; in demselben Maße, in welchem die Beschleunigung des gegebenen Körpers sich ändert, ändert sich auch der Zug des Liter Wassers, es ist also überall der Zug der gleichen Zahl Liter Wasser erforderlich, um den gegebenen Körper an der Waage zu equilibrieren. Die lebendige Kraft des geworfenen Körpers setzen wir

$$\frac{1}{2} \frac{q}{g} c^2.$$

Definieren wir die Federkraft als den konstanten Druck p , welcher denselben Weg s hindurch auf den Körper gewirkt haben müßte, welchen der Druck der Feder gewirkt hat, um demselben die Geschwindigkeit c zu erteilen, so erhalten wir die Federkraft aus der Gleichung

$$ps = \frac{1}{2} \frac{q}{g} c^2$$

in Kilogrammen gegeben, wenn das Kilogramm des betreffenden Ortes die Einheit ist. An einem andern Orte, wo die Beschleunigung bei f

alle g_1 ist, wird der Zahlenwert p_1 für die Größe der Federkraft aus der Gleichung erhalten

$$p_1 s = \frac{1}{2} \frac{g}{g_1} c^2.$$

Es ist somit gerade wie vorhin

$$p_1 = p \frac{g}{g_1}.$$

Wenn es hiernach auch keine große Schwierigkeit hat, die an einem Orte ausgeführten Messungen durch die an andern Orten in diesem relativen Maßsystem gültigen Einheiten auszudrücken, so ist es doch durchaus wünschenswert, die physikalischen Größen in solchen Einheiten anzugeben, welche der für diese Größen erhaltene Zahlenwert überall derselbe bleibt, also ein System von absoluten Einheiten aufzustellen.

Das sich zunächst darbietende Mittel würde sein, nicht den Zug, den ein Kubikdecimeter Wasser gegen die Erde hin an den verschiedenen Orten erfährt, als Einheit zu wählen, sondern den Zug, den es an einem bestimmten Orte, etwa unter dem 45. Breitengrad am Meeresniveau erfährt, als solche anzusetzen. Gegen diese Bestimmung der Krafteinheit würde theoretisch nichts einzuwenden sein, wenn man gleichzeitig für dieselbe den Namen Kilogramm fallen liesse. Das wäre nötig, da für uns das Kilogramm nicht nur Kraftmaß ist, sondern auch Quantitätsmaß. Wir messen die Menge der gegebenen Substanz durch ihr Gewicht; für diese Quantitätsbestimmungen sind die relativen Gewichte gleichzeitig die absoluten. Finden wir, daß ein Quantum irgend einer Substanz unter dem 45° n. Br. n Kilo wiegt, so finden wir für dieses Quantum an allen Orten dasselbe Gewicht von n Kilo, wie schon vorhin bemerkt wurde. Dabei ist es ganz gleichgültig, ob wir den zur Wägung benutzten Gewichtssatz unter dem 45. Breitengrad oder an einem andern Orte hergestellt haben, denn das Gewichtsstück, welches an der Wage auf dem 45. Breitengrade einem Kubikdecimeter Wasser das Gleichgewicht hält, thut es überall. Als Quantitätsmaß ist also das Kilo immer dasselbe; damit ist auch das Maß der Masse überall durch g_0 Kilo gegeben, wenn g_0 die Beschleunigung bei dem freien Fall auf dem 45. Breitengrade ist. Ist die Beschleunigung, welche ein Körper, dessen Gewicht gleich q Kilo ist, bei dem freien Falle an einem andern Orte erfährt, gleich g , so ist die ihn gegen die Erde treibende Kraft

$$p = \frac{q}{g_0} g,$$

man sieht, würden wir auch die Kraft als p Kilo bezeichnen, so würde dieselbe Bezeichnung zweien verschiedenen Größen beigelegt.

Gegen diese Definition der Krafteinheit lassen sich indes doch einige Anwendungen machen; zunächst, daß wir zu derselben eine Konstante g_0 anwenden müssen, die wir an Ort und Stelle nicht bestimmen können, aber weiter, daß bei wirklichen Kraftmessungen die Kraft in der That als abgeleitetes Maß erhalten wird. Wir können nämlich in dieser Zeit die Kraft nur aus der Beschleunigung einer bekannten Masse ablesen; denn wenn wir auch einer Kraft durch den Zug von Gewichten das Gleichgewicht halten, somit dieselbe durch diese messen können, so ist doch

der Wert dieser Gewichte in dem festgestellten Kraftmaße erst durch die Beschleunigung derselben bei dem freien Falle etwa zu erhalten, indem wir, wenn die Gewichte an der Wage zu q Kilo gefunden werden, den Quotienten $\frac{q}{g_0}$ mit g multiplicieren. Wir bestimmen also bei der Ausführung der Messung erst die Masse des Bewegten und leiten aus dieser erst die Kraft ab.

Deshalb hat Gauss den schon im § 6 angegebenen Weg eingeschlagen, daß er nicht die Einheit der Kraft als Grundmaß festsetzt, sondern diejenige der Masse. Das Maß der Masse eines Körpers ist das als Quantitätsmaß benutzte Gewicht, er setzt jene Masse gleich eins, welche das Gewicht eins hat. Damit hört das Gewicht auf Kraftmaß zu sein, es wird Maß der Masse eines Körpers, und in dem Sinne ist das Gewicht eines und desselben Körpers überall das gleiche, denn er wird überall von derselben Anzahl Kubikdecimeter Wasser an der Wage äquilibrirt. Deshalb ist auch das Maß der Masse so definiert überall dasselbe, somit neben dem Maße der Länge und der Zeit ein absolutes Maß. Das Maß der Kraft wird dadurch ein abgeleitetes, es ist jene Kraft, welche der Gewichtseinheit der Zeiteinheit die Beschleunigung eins erteilt. Die Kraft ist gemäß durch unsere Gleichung

$$p = mG = qG,$$

wenn q die Anzahl Gewichtseinheiten ist, welche die Masse wiegt, und G die Beschleunigung, welche die Kraft p ihr erteilt. Da die Beschleunigung, welche ein Körper vom Gewichte q bei freiem Fall erhält, gleich g ist, so ist die Kraft, welche den Körper gegen die Erde treibt,

$$p = q \cdot g$$

Krafteinheiten. Nehmen wir als Einheit der Masse das Kilogramm, so wird das Kilogramm mit g Krafteinheiten gegen die Erde getrieben.

Gauss wählte als Einheit der Masse das Milligramm, als Einheit der Länge das Millimeter, als Zeiteinheit die Sekunde; die Krafteinheit ist also die, welche der Masse 1^{mg} in der Sekunde die Beschleunigung 1^{cm} erteilt.

Bei Zugrundelegung dieser Einheiten erhält man vielfach unbequeme große Zahlen; deshalb hat die British Association for the advancement of science vorgeschlagen Gramm, Centimeter und Sekunde als Einheiten zu wählen. Aber auch dann werden die Zahlen vielfach unbequem, man wird deshalb in der Praxis nicht umhin können, zuweilen noch größere Einheiten zu wählen.

Dimensionen der abgeleiteten Masse.

Um die mit zu Grundelegung eines bestimmten Systems von Einheiten gegebenen Zahlenwerte auf andere Einheiten umzurechnen, also auch die bisher in dem relativen oder wie man es auch nennt irdischen Maßsystem ausgedrückten Zahlenwerte in absolutem System wiederzugeben, ist von wesentlichem Vorteil, genau zu übersehen, in welcher Weise die verschiedenen abgeleiteten Maße aus den Grundmaßen hervorgehen. können jedes abgeleitete Maß als das Produkt irgend einer Potenz der Masse, der Länge und der Zeit bezeichnen. Den so dargestellten Zusammenhang

ang irgend einer gemessenen GröÙe mit den drei Grundmaßen nennt man nach dem Vorgange Maxwells¹⁾ die Dimensionen des abgeleiteten Maßes.

Die Möglichkeit dieser Darstellung und die Bedeutung derselben tritt am besten hervor, wenn wir sofort dazu übergehen, die wichtigsten der von uns bisher gemessenen GröÙen in dieser Weise auszudrücken.

Das erste abgeleitete Maß war das der Geschwindigkeit; wir erhielten die Definition derselben bei der gleichförmigen Bewegung als den Quotienten einer Anzahl Längeneinheiten und der Anzahl Zeiteinheiten, in welcher dieser Weg zurückgelegt wird. Ist also L die Einheit der Länge, T die Einheit der Zeit, so ist, wenn z_1 und z_2 Zahlen sind,

$$c = \frac{z_1 L}{z_2 T} = z (L T^{-1}).$$

Die Geschwindigkeit wird somit durch eine Zahl gegeben, die als Quotient einer Anzahl Längeneinheiten und einer Anzahl Zeiteinheiten, oder als Produkt einer ersten Potenz der Länge und der minus ersten Potenz der Zeit erscheint, die Dimension der Geschwindigkeit ist $L T^{-1}$. Das dritte Grundmaß, die Masse kommt hier nicht, oder was dasselbe ist, mit dem Exponenten Null vor. Die Geschwindigkeit ist also erst bestimmt, wenn wir die Einheit der Länge und der Zeit bestimmen, also etwa

$$c = z \frac{\text{Meter}}{\text{Sekunde}}.$$

Nehmen wir statt Meter und Sekunde andere Einheiten, so wird die Geschwindigkeit durch eine andere Zahl ausgedrückt, welche Zahl sein muß, ergibt sich aus den Dimensionen sofort. Seien l und t die neuen Einheiten, so daß

$$L = kl \quad T = kt,$$

ist

$$c = z' (lt^{-1})$$

es muß

$$z' (lt^{-1}) = z (kl \cdot (k_1 t)^{-1})$$

, somit

$$z' = z \frac{k}{k_1}.$$

Würden wir statt Meter Kilometer, statt Sekunden Minuten wählen, wäre $k = 0,001$, $k_1 = \frac{1}{60}$, somit

$$z' = z \frac{60}{1000}.$$

Gehen wir zu einer neuen Einheit über, so daß die alte Einheit dem neuen der neuen Einheit gleich ist, so haben wir demnach den in den alten Einheiten gegebenen Zahlenwert einer gemessenen GröÙe nur mit halber Potenz von k zu multiplizieren, in welcher die Einheit in die Dimension der gemessenen GröÙe eingeht, um den Zahlenwert der gemessenen GröÙe in der neuen Einheit ausgedrückt zu erhalten.

¹⁾ Maxwell, Report of the British Association for 1868 p. 180. Man sehe auch „*Physikalische Begriffe und absolute Maße*. Leipzig, B. G. Teubner, 1880.

Die Beschleunigung ist die Geschwindigkeitszunahme in der Zeiteinheit; wir erhalten sie bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung, indem wir die nach der Zeit t erlangte Geschwindigkeit durch die Zeit t dividieren. Da die Geschwindigkeit der Quotient aus einer Länge und der Zeit ist, so ist die Beschleunigung der Quotient aus einer Länge und dem Quadrate einer Zeit, ihre Dimension ist somit

$$\text{Beschleunigung} = z(LT^{-2}),$$

wenn z die Zahl bedeutet, die wir für die Beschleunigung angeben.

Die Kraft, welche einer Masse m die Beschleunigung G erteilt, ist gleich dem Produkt von Masse und Beschleunigung, sie ist also das Produkt einer Masse, einer Länge und der minus zweiten Potenz einer Zeit. Ist also M die Masseneinheit, so ist eine Kraft dargestellt durch

$$\text{Kraft} = z(MLT^{-2}),$$

wo wieder z die Zahl bedeutet, welche die Anzahl Kräfteinheiten angibt.

Die dem absoluten System zu Grunde liegende Einheit der Masse ist die Gewichtseinheit; wir sagen ausdrücklich die Gewichtseinheit, nicht die Masse der Gewichtseinheit, da im absoluten System das Gewicht Massenmaß ist, nicht mehr Kraftmaß. Bisher haben wir als Masseneinheit den Quotienten aus dem Gewicht eines Körpers und der Zahl g genommen; nennen wir die bisher gebrauchte Masseneinheit M_1 , so ist

$$M = \frac{1}{g} M_1.$$

Wenn auch in dem bisher benutzten System das Maß der Masse ein abgeleitetes Maß war, so können wir doch zur Umrechnung der in demselben gegebenen Maße in das neue System gerade so verfahren, wie wenn das früher angewandte Maß der Masse ein Grundmaß wäre, dem nur eine andere Einheit zu Grunde liegt. Dann ergibt sich, wenn die Zahl der Kräfteinheiten in dem bisher angewandten System z_1 ist, die Zahl z im absoluten System nach der Gleichung

$$z(MLT^{-2}) = z_1 \left(\frac{M_1}{g} LT^{-2} \right) = \frac{z_1}{g} (M_1 LT^{-2})$$

$$\frac{z}{g} = z_1, \quad z = gz_1.$$

Um die in unserm bisherigen System gegebenen Kräfte in das absolute System zu übertragen, haben wir die früher gegebenen Zahlen bei Anwendung derselben Gewichtseinheiten nur mit g zu multiplicieren, wobei dann g in jenen Längeneinheiten angegeben sein muß, welche dem Maß der Beschleunigung zu Grunde liegen, also in den Einheiten L .

Im § 11 fanden wir die Beziehung, daß die Bewegungsgröße gleich dem Antriebe der Kraft ist. Die Gleichheit dieser Größen verlangt die Gleichheit ihrer Dimensionen, in der That sind dieselben gleich. Der Antrieb der Kraft ist Produkt einer Kraft und einer Zeit, somit

$$pt = z(MLT^{-1})$$

die Bewegungsgröße der bewegten Masse m ist das Produkt aus der Masse und der nach der Zeit t erreichten Geschwindigkeit v , es ist

$$mv = z(MLT^{-1}).$$

Die einer Masse m erteilte lebendige Kraft $\frac{1}{2}mv^2$ ist gleich der Arbeit der Kraft

$$\frac{1}{2}mv^2 = z(ML^2T^{-2})$$

$$ps = z(MLT^{-2}L) = z(ML^2T^{-2}).$$

Man sieht, die Dimensionen dieser beiden Größen sind die gleichen.

Die Winkelgeschwindigkeit bei der drehenden Bewegung können wir definieren als die Geschwindigkeit eines Punktes, der sich in der Abstandseinheit von der Drehungsaxe befindet; die Geschwindigkeit in Bogenmaß ausgedrückt, den Kreisumfang gleich 2π gesetzt, gibt uns dann auch die Geschwindigkeit des Punktes in der Abstandseinheit in gewöhnlichem Maße. Die Geschwindigkeit eines im Abstände l von der Axe befindlichen Körpers ist dann das Produkt der Winkelgeschwindigkeit und der Länge l . Da das Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Länge uns eine Geschwindigkeit gibt, ist die Dimension der Winkelgeschwindigkeit somit die einer Geschwindigkeit LT^{-1} dividiert durch L , somit T^{-1} .

Ein Drehungsmoment ist das Produkt einer Kraft und einer Länge. Dasselbe ist somit

$$D = zKI = z(ML^2T^{-2}),$$

ein Trägheitsmoment das Produkt aus einer Masse und dem Quadrate einer Länge, dasselbe ist also

$$z(ML^2).$$

Drehungsmomente und Trägheitsmomente werden demnach aus dem früher angewandten System in das absolute übergeführt durch Multiplikation der früher angegebenen Zahlen mit g .

Wir fanden bei der Untersuchung der Pendelbewegung, daß die Schwingungsdauer gleich ist π multipliziert mit der Quadratwurzel aus dem Trägheitsmoment und dividiert durch die Quadratwurzel aus dem Drehungsmoment, welches die im Schwerpunkte des Pendels angreifende Kraft dem Pendel erteilt, wenn dasselbe senkrecht zur Richtung der Kraft ist. Der Quotient aus einem Trägheitsmoment und einem Drehungsmoment muß demnach das Quadrat einer Zeit sein. In der That zeigen unsere Dimensionsausdrücke das, denn der Quotient ist

$$\frac{z_1(ML^2)}{z_2(ML^2T^{-2})} = zT^2.$$

Im § 22 definierten wir das spezifische Gewicht einer Substanz als das Gewicht der Volumeinheit und unterschieden von demselben die Dichtigkeit der Substanz als die Masse der Volumeinheit. Im absoluten System fallen spezifisches Gewicht und Dichtigkeit zusammen, da die Einheit der Masse die Einheit des Gewichtes ist. Da die Dichtigkeit Quotient einer Masse und eines Volumens, das Volumen die dritte Potenz einer Länge ist, so ist

$$s = z(ML^{-3}),$$

und man erkennt sofort aus der Beziehung zwischen der Masseneinheit des absoluten und des bisher angewandten Systemes, daß in dem bisher angewandten Maßsystem die Dichtigkeit durch den Quotienten aus dem spezifischen Gewicht und der Zahl g gegeben ist.

Die Centripetalbeschleunigung, welche ein Körper gegen den Mittelpunkt der drehenden Bewegung erhalten muß, wenn derselbe sich im Kreis bewegen soll, muß die Dimension einer Beschleunigung haben. In That fanden wir § 33

$$\frac{F}{m} = \frac{v^2}{R} = z(L^2 T^{-2} L^{-1}) = z(L T^{-2});$$

der Zug, den der im Kreise bewegte Körper zu dem Zwecke gegen den Mittelpunkt des Kreises erfahren muß, ist

$$F = m \frac{v^2}{R} = z(M L T^{-2}),$$

er hat also, wie es sein muß, die Dimension einer Kraft.

Im dritten Kapitel des ersten Abschnittes berechneten wir die Gravitationskonstante, das heißt den Zug in Kilogrammen, welcher der Einheit gleiche Massen in der Entfernung von einem Meter ausüben erhielten

$$f = 6,46 \cdot 10^{-10}.$$

Die Dimensionen der Gravitationskonstanten ergeben sich daraus zwei Massen m und m_1 im Abstände r sich mit einer Kraft K an welche gleich ist

$$K = f \frac{m m_1}{r^2},$$

somit

$$f = K \frac{r^2}{m m_1}.$$

Drücken wir K durch eine Zahl und seine Dimensionen aus, bei dem r eine Anzahl Längeneinheiten, m und m_1 eine Anzahl Masseneinheiten, so wird

$$f = z(M L T^{-2} L^2 M^{-2}) = z(M^{-1} L^3 T^{-2}).$$

Wir erhalten die Beziehung zwischen dem Zahlenwert von f im bisher gebrauchten System und dem absoluten System, wenn wir z beibehalten, da wenn jetzt die frühere Masseneinheit M_1 genannt wird,

$$M = \frac{M_1}{g}$$

$$f = z(M^{-1} L^3 T^{-2}) = z g (M_1^{-1} L^3 T^{-2})$$

$$z g = z_1 \quad z = \frac{z_1}{g}.$$

$$f = \frac{6,46}{9,822\ 36} \cdot 10^{-10} = 0,657 \cdot 10^{-10} = 6,57 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{\text{Meter}}{\text{Kilogr. S}}$$

Die Zahl bedeutet jetzt den Zug, den zwei Massen von je einem Kilogramm auf einander ausüben, in Kräfteinheiten, deren jede einem Kilogramm in der Sekunde die Beschleunigung ein Meter erteilen, wenn die ein Meter von einander entfernt sind.

Zu demselben Resultate gelangt man durch die Erwägung, daß in dem absoluten System die Attraktionskonstante den Zug zweier Massen berechnet, deren jede $\frac{1}{g}$ der Masse ist, für welche früher der Zug berechnet war, daß dann aber, um den Zug in unseren Kräfteinheiten zu erhalten, die früher gefundene Zahl mit g multipliziert werden muß. Im Gauss'schen Systeme Millimeter, Milligramm, Sekunde wird

$$f = 6,57 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Mm.}^3}{\text{Milligr. Sek.}^2}$$

der denselben Zahlenwert behält sie in den C, G, S Einheiten, das heißt wenn Centimeter, Gramm, Sekunde als Einheit gewählt werden. Diese Einheiten werden eben nach dem Vorgange der British Association die G, S Einheiten genannt, so daß also auch

$$f = 6,57 \cdot 10^{-8} \frac{C^3}{GS^2} = 6,57 \cdot 10^{-8} (G^{-1} C^3 S^{-2})$$

Bei der Untersuchung der Eigenschaften der festen Körper fanden wir, daß die elastischen Eigenschaften derselben ihrer Größe nach wesentlich abhängt werden durch zwei Konstante, den Elasticitätskoeffizienten und die Konstante μ der Querkontraktion. Ersterer ist der Koeffizient, mit welchem die in Bruchteilen der ursprünglichen Länge gegebene Verlängerung des Stabes und den Querschnitt des Stabes multiplizieren müssen, um die Kraft zu erhalten, mit welcher zwei benachbarte Schichten des verlängerten Stabes sich anziehen. Da die Verlängerung des Stabes in Bruchteilen der ursprünglichen Länge gemessen eine reine Zahl ist, so folgt, daß der Elasticitätskoeffizient, multipliziert mit einer Fläche, eine Kraft liefert, mit der wir ihn als den Quotienten einer Kraft und einer Fläche erhalten. Als solcher tritt er auch in den Gleichungen des § 49 auf. Da die Fläche das Quadrat einer Länge ist, so wird

$$E = z (MLT^{-2} L^{-2}) = z (ML^{-1} T^{-2}).$$

Wir haben im § 49 die Elasticitätskoeffizienten in einem rein konventionellen Maße mitgeteilt, Kilogramm an einem Stabe vom Querschnitt eines Quadratmillimeter. Im absoluten Maßsystem dagegen muß jede Längendimension in der einmal gewählten Einheit ausgedrückt werden, also auch die Fläche als das Quadrat derjenigen Länge, welche der Definition der Kräfteinheit zu Grunde liegt. Wollen wir den Elasticitätskoeffizienten in Kilogramm, Meter, Sekunden ausdrücken, so müssen wir auch einen Stab von 1 Quadratmeter Querschnitt voraussetzen. Wir müssen dann zunächst die im § 49 gegebenen Zahlenwerte mit $1\,000\,000 = 10^6$ multiplizieren, und dann, um den Zug in unseren Kräfteinheiten auszudrücken, mit der Zahl g in Meter angeben, im ganzen haben wir also die dort angegebenen Zahlen mit

$$9,81 \cdot 10^6$$

multiplizieren. Der Elasticitätskoeffizient des Silbers würde so z. B.

$$7357 \cdot 9,81 \cdot 10^6 = 72172 \cdot 10^6 \frac{\text{Kilogr.}}{\text{Meter Sek.}^2}$$

Um die Elasticitätskoeffizienten im System $C.G.S$ auszudrücken, sind, da das Kilo gleich 1000^{gr} , das Meter gleich 100^{cm} ist, die Zahlen mit

$$981 \cdot 10^5$$

zu multiplicieren, oder der Elasticitätskoeffizient des hart gezogenen Silbers ist

$$72\,172 \cdot 10^7 \frac{G}{CS^2}.$$

Hiernach lassen sich alle Elasticitätskoeffizienten in absolute Maße umrechnen.

Der Querkontraktionskoeffizient μ ist eine reine Zahl, diejenige, mit der wir die in Bruchteilen der Länge, also als Zahl gegebene Verlängerung des Stabes multiplicieren müssen, um die Veränderung der Querdimensionen in Bruchteilen der letztern, also auch als reine Zahl zu erhalten.

Der lineare Dilatationskoeffizient und der kubische Kompressionskoeffizient haben die reciproken Dimensionen des Elasticitätskoeffizienten; ersterer ist der reciproke Wert des Elasticitätskoeffizienten; das letztere derselben Dimension ist, ergibt die Erwägung, daß wir ihn erhalten, wenn wir die in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens gegebene Volumverminderung durch den pro Flächeneinheit wirkenden Druck dividieren. Wir fanden ja auch den kubischen Kompressionskoeffizienten gleich $3 \frac{1-\mu}{E}$.

Der Torsionskoeffizient und der Biegungskoeffizient haben dieselben Dimensionen wie der Elasticitätskoeffizient. Denn nach § 53 ist der Torsionskoeffizient multipliciert mit einer Fläche ϱ^2 , einer Länge $\omega \varrho$ und dem Quotienten zweier Längen $\frac{\varrho}{l}$ ein Drehungsmoment, somit Torsionskoeffizient mal Fläche eine Kraft. Für den Torsionskoeffizienten eines cylindrischen Stabes erhielten wir

$$\frac{\pi}{4(1+\mu)} E;$$

der vor E stehende Faktor ist eine reine Zahl; für den Biegungskoeffizienten fanden wir $\frac{E}{4}$.

Dasselbe, was von den Kompressionskoeffizienten und Elasticitätskoeffizienten der festen Körper gilt, gilt auch für die der flüssigen Körper. Wir haben § 63 aus den von Grassi beobachteten Kompressionskoeffizienten die Elasticitätskoeffizienten einer Anzahl Flüssigkeiten im Kilogramm auf das Quadratmillimeter abgeleitet; zur Überführung dieser Zahlen in absolute Maße $C.G.S$ haben wir die dort angeführten Zahlen mit $981 \cdot 10^5$ zu multiplicieren. So wird der Elasticitätskoeffizient des Wassers bei 0°

$$2011 \cdot 10^7 \frac{G}{CS^2};$$

der Druckeinheit auf das Quadratcentimeter entsprechende Kompressionskoeffizient

$$0,197 \cdot 10^{-10} \frac{CS^2}{G}.$$

Der hydrostatische Druck ist der Druck, den die über der Flächeneinheit des betrachteten Niveaus stehende Flüssigkeitssäule ausübt. Da d

produkt aus der Höhe h der Flüssigkeitssäule und dem spezifischen Gewicht s der Flüssigkeit das Gewicht der drückenden Flüssigkeitssäule gibt, ist hsg , das Produkt aus dem Gewichte und der Beschleunigung bei dem selben Fall der Druck auf die Flächeneinheit in Kräfteinheiten. Die Dimension des Druckes ist, da

$$h = zL \quad s = z \frac{M}{L^3} \quad g = z \frac{L}{T^2}$$

$$ML^{-1}T^{-2}.$$

Multiplizieren wir mit einer Fläche, so erhalten wir eine Kraft; der Dimensionsausdruck multipliziert mit L^2 wird auch MLT^{-2} die Dimension der Kraft.

Der Luftdruck in $C \cdot G \cdot L$ ausgedrückt, wird bei uns

$$76 \cdot 13,5959 \cdot 981 = 10\,136\,673 \frac{G}{CS^2}.$$

Man sieht, der hydrostatische Druck einer und derselben Flüssigkeitssäule, somit auch der Luftdruck ändert sich proportional dem Werte von g .

Die sämtlichen Kapillarerscheinungen werden in quantitativer Beziehung bedingt durch den Wert der beiden Kapillarkonstanten H und ϑ . Letzterer ist ein Winkel, die Bedeutung der erstern ergibt sich daraus, daß in einer Kugel vom Radius R

$$\frac{H}{R}$$

der durch die Oberflächenspannung bewirkten Druck auf die Einheit der Fläche der Kugel bedeutet. Die Konstante H ist also das Produkt aus dem Druck und einer Länge. Da die Dimension des Druckes $ML^{-1}T^{-2}$ ist, so folgt

$$H = z(ML^{-1}T^{-2}L) = z(MT^{-2}).$$

In der Dimension der Konstanten H kommt also die Länge nicht vor.

Zu demselben Resultat führt uns die erste Gleichung des § 77. Um den Druck in den Kräfteinheiten des absoluten Systems auszudrücken, haben wir die linke Seite der dort gegebenen Gleichung mit der Beschleunigung g multiplizieren, es wird dann

$$fhgs = gm = H \cos \vartheta \frac{1}{r},$$

oder für vollkommen benetzende Flüssigkeiten

$$(h + \frac{1}{3}r)gs = \frac{H}{r}.$$

$$r(h + \frac{1}{3}r)gs = H.$$

Hierin ist $r = zL$, $h + \frac{1}{3}r = zL$, $g = zLT^{-2}$, $s = zML^{-3}$, das Produkt wird

$$z(MT^{-2}) = H.$$

In der Tabelle von Seite 341 sind die Werte von $\frac{H}{2}$, oder eigentlich $\frac{H}{r}$ für $r = 1$, weil wir die Konstanten als Milligramme bezeichnen gegeben. Sie bedeuten so den Druck auf das Quadratmillimeter Fläche von 1^{mm} Radius in Milligrammen.

Wir führen die Zahlen in die Druckeinheiten des Gauss'schen Systems über, indem wir diese Zahlen mit 9810, dem bei uns gültigen Werte von g multiplizieren. Es wird demnach für Wasser bei 0° nach Brunner

$$H = 2 \cdot 7,666 \cdot 9810 = 149,7 \cdot 10^3 \frac{\text{Milligr.}}{\text{Sek.}^2}.$$

Im $C. G. S$ System wird für Wasser, da $1^{\text{mgr}} = 0,001^{\text{gr}}$,

$$H = 149,7 \frac{G}{\text{Sek.}^2},$$

und bedeutet so den Druck in Einheiten, deren jede der Masse 1^{gr} in Sekunde 1^{cm} Beschleunigung gibt auf ein Quadratcentimeter einer Kugel deren Radius ein Centimeter ist.

Dafs wir einfach durch Einsetzen von Gramm an die Stelle des Milligramm aus dem Gauss'schen in das $C. G. S$ System übergehen, weil in Dimension von H die Länge L nicht vorkommt, ist auf den ersten Blick auffallend, läfst sich aber durch eine einfache Überlegung als richtig kennen.

In den Einheiten von Gauss würde der Druck auf die Fläche Quadratcentimeters und bei dem Krümmungsradius 1^{mm} der 100fache angegeben sein, bei dem Krümmungsradius 1^{cm} gleich 10^{mm} ein Zehntel des Hundertfachen, also

$$149,7 \cdot 10^4.$$

Da nun im $C. G. S$ System die Krafteinheit, weil das Gramm gleich 1000^{mgr} , das Centimeter gleich 10^{mm} ist, 10 000 mal gröfser ist, so deuten

$$149,7 \cdot 10^4 \text{ Gauss} \quad 149,7 \text{ Krafteinheiten}$$

im $C. G. S$ System.

Wir bekommen demnach die in der Tabelle angegebenen Konstanten $\frac{H}{2}$, übertragen ins $C. G. S$ System, wenn wir die dort angegebenen Zahlen mit 9,81 multiplizieren.

Die Diffusionskonstante oder Diffusionsgeschwindigkeit definierten als die Salzmenge in Gramm, welche im Laufe eines Tages durch Querschnitt von 1^{cm} geht, wenn zwei um 1^{cm} entfernte Schichten die Konzentrationsdifferenz von 1^{gr} im Kubikcentimeter haben. Der Wert der Konstanten bleibt derselbe, wenn wir das Gramm durch das Milligramm setzen, ist also von der gewählten Masseneinheit unabhängig, wie man sich aus der Dimensionsbestimmung erkennt.

Auf Seite 361 erhielten wir für k

$$k = \frac{l S}{q u_0},$$

hierin ist l eine Länge $= z L$, S die in der Zeiteinheit übergetretene Salzmenge $= z \frac{M}{T}$, q der Querschnitt $= z L^2$, u_0 die Konzentration, M in der Volumeinheit, somit $z \frac{M}{L^3}$; demnach wird

$$k = z \frac{L M L^3}{L^2 M T} = z \frac{L^2}{T}.$$

Nach Ficks Bestimmung wäre also für Kochsalz

$$k = 1,076 \frac{C^2}{\text{Tag}} = 12,5 \cdot 10^{-6} \frac{C^2}{S}.$$

Bei der Ausströmung der Flüssigkeiten durch kapillare Röhren deklarierten wir den Koeffizienten der innern Reibung als den in der Flächeneinheit der Bewegung einer Flüssigkeitsschicht entgegenwirkenden Widerstand, wenn die Geschwindigkeitsdifferenz zweier um die Längeneinheit von einander entfernter Schichten gleich der Einheit ist. Der Reibungskoeffizient multipliziert mit einer Fläche und dem Quotienten einer Geschwindigkeit und einer Länge, repräsentiert somit eine Kraft; demnach ergibt sich seine Dimension aus der Gleichung

$$\eta \cdot L^2 \frac{L}{T L} = z (M L T^{-2})$$

$$\eta = z (M L^{-1} T^{-1}).$$

Dieselbe Dimension für η ergibt sich auch aus der Gleichung des § 87 384, welche nach η aufgelöst liefert

$$\eta = \frac{\pi (p_a - p_e)}{8 V L} R^2.$$

Hierin ist $p_a - p_e$ ein Druck, V ein Volumen dividiert durch eine Zeit, somit ist $V L = L^4 T^{-1}$. Die vierte Potenz der Länge im Nenner hebt sich gegen jene im Zähler, und es bleibt für die Dimension von η das Produkt eines Druckes und einer Zeit; da die Dimension des Druckes $M L^{-1} T^{-2}$ ist, ergibt sich für die Dimension von η der oben hingeschriebene Ausdruck.

Wir haben die Reibungskoeffizienten der Flüssigkeiten § 87 in Millimetern auf das Quadratmillimeter angegeben. Multiplizieren wir die dort angegebenen Zahlenwerte mit dem in Millimetern ausgedrückten Werte von G , so erhalten wir die Reibungskonstanten im Gauss'schen System. So wird die Reibungskonstante des Wassers bei 10^0 nach Poiseuille

$$1,3096 \frac{\text{Milligr.}}{\text{Millim. Sek.}}$$

Zur Überführung in das $C. G. S.$ System haben wir, da das Millimeter $0,001^{\text{er}}$, das Centimeter gleich 10^{mm} ist, den in Gauss'schen Einheiten gegebenen Zahlenwert des Reibungskoeffizienten mit 100 zu dividieren, es wird für Wasser bei 10^0

$$\eta = 0,013096 \frac{G}{C S}.$$

Die bei den Gasen zu bestimmenden Größen sind derselben Art wie bei den Flüssigkeiten, Druck, Reibungskonstante, Diffusionskonstante, und haben auch dieselben Dimensionen. Man erkennt das z. B. auch aus dem in der dynamischen Gastheorie gelieferten Werte der beiden letzteren Konstanten.

Für die Diffusionskonstante erhielten wir, wenn u_1 und u_2 die mittlern Geschwindigkeiten der fortschreitenden Bewegungen der Moleküle der beiden Gase, l_1 und l_2 die mittleren Wegelängen sind,

$$c = \frac{u_1 + u_2}{\left(\frac{1}{V l_1} + \frac{1}{V l_2}\right)^2} = \frac{(u_1 + u_2) l_1 l_2}{(V l_1 + V l_2)^2}.$$

Die Dimension ist

$$L T^{-1} L^3 L^{-1} = \frac{L^3}{T},$$

also dieselbe wie für die Flüssigkeit. Der Zahlenwert des Diffusionskoeffizienten hängt also nur von den gewählten Einheiten der Länge und der Zeit ab, wir haben dieselben seiner Zeit in Centimetern und Sekunden angegeben.

Der Ausdruck für den Reibungskoeffizienten war

$$\eta = \frac{1}{2} m n u l;$$

$m n$ ist die Masse der Volumeinheit, u die mittlere Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung, l die mittlere Wegelänge der Moleküle.

$$\eta = z (M L^{-3} L T^{-1} L) = z (M L^{-1} T^{-1}).$$

Wir haben auch die Reibungskoeffizienten in Milligrammen angegeben, dieselben mit 98,1 multipliziert geben die Zahlenwerte im C. G. S. System, so wird nach Kundt und Warburg

$$\text{für Luft } \eta = 0,000\,188 \quad \frac{G}{CS}$$

$$\text{Wasserstoff } \eta = 0,000\,092\,3 \quad \frac{G}{CS}$$

$$\text{Kohlensäure } \eta = 0,000\,152 \quad \frac{G}{CS}.$$

Wir werden von jetzt an das absolute Maßsystem anwenden und den zu bestimmenden Konstanten die Dimensionen sowie die gewählten Einheiten in der bei dieser Darlegung benutzten Weise angeben. In der Zukunft werden wir das C. G. S. System benutzen.

Dritter Abschnitt.

Von der Wellenbewegung.

Erstes Kapitel.

Theoretische Principien der Wellenbewegung.

§ 123.

Schwingende Bewegung eines Punktes. Wenn ein materieller Punkt A (Fig. 196), welcher durch irgend welche Kräfte in einer bestimmten Lage so festgehalten wird, daß er, sobald er aus derselben fortgeschoben ist, wieder in seine frühere Lage zurückgezogen wird, durch eine äußere Kraft in seiner Gleichgewichtslage nach B entfernt und dann der Wirkung der in die Ruhelage zurückziehenden Kräfte verlassen wird, so wird er zunächst wieder in seine frühere Lage zurückkehren. Da aber Kräfte, welche den Punkt zurückziehen, lange auf ihn wirken, bis er die Lage in A wieder erreicht hat, so ist ihm erteilte Bewegung eine beschleunigte und der Punkt ist in A mit einer gewissen gegen C gerichteten Geschwindigkeit begabt. Infolge dieser Geschwindigkeit muß der Punkt, gerade wie das bewegte Pendel über die vertikale Lage, sich über die Ruhelage hinaus gegen C hin bewegen. Von der Zeit an aber, wo er die Ruhelage nach der andern Seite verlassen hat, wirken die ihn nach A ziehenden Kräfte wieder auf den Punkt ein. Demal aber sind sie der Bewegung entgegengerichtet, bewirken also, daß die Bewegung des Punktes eine verzögerte wird, bis er in dem Abstände C von A auf einen Augenblick in Ruhe kommt, wenn durch die Wirkung der nach A gerichteten Kräfte die dem Punkte auf dem Wege BA erteilte Geschwindigkeit vernichtet ist.

Fig. 196.



Der Abstand AC ist gleich dem Abstände AB , da der bewegte Punkt die Geschwindigkeit in A nur infolge der gegen A gerichteten Kräfte erhalten hatte, und dieselben Kräfte es sind, welche die Bewegung desselben lenken. Von C aus wird dann der betrachtete Punkt gerade so nach A zurückkehren, wie vorher von B , wird ebenso infolge der auf diesem Wege erlangten Geschwindigkeit sich über A hinausbewegen nach B hin, weiter nach B wieder über A nach C und so fort. Kurz, der Punkt wird eine hin und her gehende Bewegung um den Punkt A vollführen, indem er sich gegen A hinziehenden Kräfte sich abwechselnd der nähert und von ihr entfernt.

Eine solche hin und her gehende Bewegung nennt man eine schwingende

dort eintreten, wo ein Punkt aus seiner Gleichgewichtslage entfernt ist, ob in eine neue Gleichgewichtslage übergeführt zu sein; ein specielles Beispiel einer solchen haben wir bereits früher beim Pendel kennen gelernt, welches infolge der Schwerkraft Schwingungen um die Vertikale vollführt. Auf Arten von schwingenden Bewegungen der einzelnen Teile fester, flüssiger und gasförmiger Körper werden wir demnächst zu betrachten haben.

Den Abstand der äußersten Punkte der Bahn des Beweglichen von Ruhelage, die Länge AB , nennen wir die Schwingungsweite oder Amplitude der Schwingung, und die Zeit, welche der Punkt zum Zurücklegen einer ganzen Schwingung gebraucht, das heißt, um den Weg von B nach C wieder zurück zu durchlaufen, die Schwingungsdauer. Den Bewegungszustand des Punktes zu irgend einer Zeit, oder an einer Stelle a der Bahn desselben nennt man die Oscillationsphase, so daß also die Phase den Abstand Aa von der Ruhelage, die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung des Punktes in dem betrachteten Augenblicke bestimmt. Während einer ganzen Oscillation ist der bewegte Punkt in allen möglichen Phasen, d. h., er nimmt alle überhaupt bei den Schwingungen möglichen Bewegungszustände an. Zugleich sieht man, daß die Zeit, welche verfließt bis der Punkt wieder in derselben Phase ist, ebenfalls der ganzen Oscillationsdauer gleich ist. Die um eine halbe Schwingungsdauer von einander entfernten Phasen nennt man entgegengesetzte. Der bewegte Punkt findet sich dann in gleichen, aber der Richtung nach entgegengesetzten Bewegungszuständen; die Abstände von der Ruhelage sind dann aber an verschiedenen Seiten, und die Geschwindigkeiten sind gleich nach entgegengesetzten Seiten gerichtet.

Wir nahmen vorhin an, daß die schwingende Bewegung des Punktes dadurch eingeleitet wurde, daß äußere Kräfte denselben nach B entfernten und dann ihn der Wirkung der nach A gerichteten Kräfte überließen. Ist jedoch klar, daß die schwingende Bewegung auch dadurch eingeleitet werden kann, daß dem Punkt A durch einen Stoß eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit erteilt wird. Er wird sich dann in der Richtung nach B bewegen, bis durch die Wirkung der ihn nach A zurückziehenden Kräfte die dem Punkte erteilte Geschwindigkeit aufgehoben wird, dann mit beschleunigter Bewegung nach A zurückbewegen, darüber hinaus nach C hin und von da an ganz in der vorhin betrachteten Weise über A nach B um die soeben betrachteten Schwingungen zu vollführen.

§ 124.

Gesetze der schwingenden Bewegung eines Punktes. Um die schwingende Bewegung eines Punktes zu bestimmen, ist es notwendig jedem Augenblicke den Ort sowohl als die Geschwindigkeit des Punktes in GröÙe und Richtung nach zu kennen. Wir werden daher eine Gleichung aufzusuchen haben, worin der Abstand des beweglichen Punktes von der Ruhelage, ferner die Geschwindigkeit desselben als abhängig von der Zeit dargestellt wird.

Diese Abhängigkeit wird lediglich davon bedingt, nach welchen Gesetzen die Kräfte, welche den aus der Gleichgewichtslage gebrachten Punkt gegen dieselbe hintreiben, sich mit dem Abstände des Punktes von der Ruhelage ändern. Da wir es nun in unsern weiteren Untersuchungen fast

Schwingungen zu thun haben, welche durch Elasticität bedingt sind, deren Amplituden so klein sind, daß die Elasticitätsgrenzen nicht überschritten werden, so wollen wir hier nur die schwingenden Bewegungen betrachten, bei denen die wirkenden Kräfte in jedem Momente dem augenblicklichen Abstände des Punktes von der Gleichgewichtslage proportional sind. Bezeichnen wir dann die Kraft, welche den Punkt gegen die Gleichgewichtslage hintreibt, wenn er sich im Abstände y von derselben befindet, ψ und mit p eine Konstante, so ist

$$\psi = - p y.$$

Wir müssen der rechten Seite das negative Vorzeichen geben, da die Richtung der wirksamen Kraft immer die entgegengesetzte ist von derjenigen, nach welcher der Punkt aus der Gleichgewichtslage entfernt ist; findet sich der Punkt rechts von A Fig. 196, so wirkt die Kraft nach links und umgekehrt. Die Konstante p in dieser Gleichung ist die Kraft, welcher der Punkt gegen die Gleichgewichtslage hin gezogen wird, wenn der Abstand $y = 1$ ist.

Nennen wir die Masse des beweglichen Punktes m , so wird die Beschleunigung φ , welche derselbe im Abstände y gegen die Gleichgewichtslage hin erfährt,

$$\varphi = - \frac{p}{m} y = - k^2 y.$$

Diese Beschleunigung φ ist gleich dem Quotienten aus der Änderung der Geschwindigkeit dv , welche die Bewegung in der unendlich kleinen Zeit dt erfährt, in welcher der Punkt gerade den Abstand y passiert, und der unendlich kleinen Zeit dt , oder

$$\varphi = \frac{dv}{dt}$$

damit

$$\frac{dv}{dt} = - k^2 y \dots \dots \text{I.}$$

In dieser Form der Gleichung I erkennt man unmittelbar, daß sie dieselbe ist, welche wir § 25 für die Schwingungen des Pendels erhalten, eine Übereinstimmung, die notwendig ist, da wir bei Betrachtung der Schwebelbewegung so kleine Amplituden voraussetzten, daß wir die bewegende Kraft in jedem Momente dem Abstände des Pendels von seiner Gleichgewichtslage proportional setzen konnten. Es ist also dasselbe Gesetz für die Abhängigkeit des Beweglichen von der bewegenden Kraft, welche wir hier wie an jener Stelle zu Grunde legen.

In derselben Weise wie § 25 erhalten wir aus der Gleichung I für die Geschwindigkeit v , welche das Bewegliche im Abstände y von der Gleichgewichtslage besitzt, wenn wir den Abstand des Punktes dort, wo die Geschwindigkeit gleich Null ist, also die Amplitude der Bewegung α bezeichnen,

$$v^2 = k^2 (\alpha^2 - y^2) \dots \dots \text{II.}$$

Um die Abhängigkeit des Abstandes y des Punktes von der Gleichgewichtslage zu erhalten, wollen wir annehmen, der Punkt bewege sich in dem Momente, in welchem er seine Gleichgewichtslage erreicht, so ist

läßt, daß also die Bewegung durch einen kurzen Stoß eingeleitet wird. In dem Ausdrucke für v

$$v = \pm k \sqrt{\alpha^2 - y^2}$$

haben wir dann auf der rechten Seite das positive Vorzeichen zu nehmen, wenn wir die Richtung, nach welcher das Bewegliche aus der Gleichgewichtslage sich zuerst bewegt, als die positive Richtung der y betrachten. Nach der Bedeutung von v

$$v = \frac{dy}{dt}$$

wird dann

$$\frac{dy}{dt} = k \sqrt{\alpha^2 - y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}} = k dt$$

und

$$\int_0^y \frac{dy}{\alpha \sqrt{1 - \frac{y^2}{\alpha^2}}} = \int k dt = kt.$$

Die Summe auf der linken Seite müssen wir von $y = 0$ bis y nehmen, weil wir den Beginn der Bewegung von dem Momente an rechnen, in welchem das Bewegliche die Gleichgewichtslage passiert, also $y = 0$ wenn $t = 0$ ist. Diese Summe ist nach E 8 und E VIII

$$kt = \arcsin \left(\frac{y}{\alpha} \right) - \arcsin \left(\frac{0}{\alpha} \right) = \arcsin \left(\frac{y}{\alpha} \right).$$

Lösen wir die Gleichung nach y auf, so wird

$$y = \alpha \sin kt \dots \dots \text{III.}$$

In dieser Gleichung wächst y mit t von $t = 0$ bis $kt = \frac{\pi}{2}$; ist der Wert von t erreicht, so wird $y = \alpha$ gleich der Amplitude der Bewegung. Wächst t weiter, so nimmt y ab und wird 0, wenn $kt = \pi$ worden ist; bei weiterer Zunahme von t wird, so lange $kt > \pi < 3\frac{\pi}{2}$, y negativ und wächst negativ bis $-\alpha$, welcher Wert für $kt = 3\frac{\pi}{2}$ erreicht wird. Wenn dann kt von $3\frac{\pi}{2}$ bis 2π zunimmt, wird der negative Wert von y kleiner und für $kt = 2\pi$ wird y wieder gleich Null, der Punkt seine Gleichgewichtslage wieder erreicht. Das Bewegliche hat also, die Zeit t einen solchen Wert angenommen, daß $kt = 2\pi$, eine ganze Schwingung zurückgelegt. Da wir nun als Schwingungsdauer jene Zeit bezeichnen, in welcher das Bewegliche eine ganze Schwingung führt, so ist T die Schwingungsdauer der Bewegung. Zwischen T und der Quadratwurzel aus der Beschleunigung k im Abstände 1 von der Gleichgewichtslage besteht somit die Beziehung

$$k = \frac{2\pi}{T}; \quad T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{p}}.$$

Ersetzen wir schliesslich k in der Gleichung für y durch diesen Wert, wird

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Dass diese Gleichung die schwingende Bewegung gerade so ergibt, wie wir sie im vorigen Paragraphen abgeleitet haben, erkennt man unmittelbar. Denn gerade so wie die Abstände y sich ändern, wenn t von 0 bis T wächst, gerade so ändern sie sich jedesmal, wenn t von nT bis $(n+1)T$ wächst, d. h. also die Zeit t um eine ganze Schwingungsdauer zunimmt. Ferner kennt man, dass in zwei Zeitpunkten, welche um eine halbe Schwingungsdauer von einander entfernt sind, die Abstände y auf entgegengesetzter Seite der Gleichgewichtslage einander gleich sind, denn die Werte zweier Sinus, deren Argumente um π verschieden sind, sind der Grösse nach gleich, im Zeichen nach entgegengesetzt.

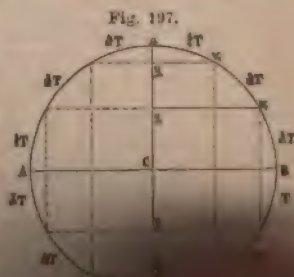
Die Geschwindigkeit v zur Zeit t ist

$$v = k \sqrt{\alpha^2 - y^2} = \alpha \frac{2\pi}{T} \sqrt{1 - \sin^2 2\pi \frac{t}{T}} = \frac{2\pi}{T} \cdot \alpha \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Die Gleichung zeigt, dass, wenn $t = 0$, die Geschwindigkeit ihren grössten Wert hat; dieselbe wird mit wachsendem t kleiner und gleich 0, wenn $t = \frac{1}{2}T$, also zur Zeit, in welcher $y = \alpha$ das Bewegliche seinen grössten Abstand von der Gleichgewichtslage erreicht hat. Wächst t , so wird v negativ, das Bewegliche kehrt gegen die Gleichgewichtslage zurück und zwar, da das negative v wächst, bis $t = \frac{1}{2}T$, $y = 0$ geworden ist, mit wachsender Geschwindigkeit, bis das Bewegliche in die Gleichgewichtslage zurückgekehrt ist. Bei weiterem Wachsen von t bleibt v negativ, bis $t = \frac{3}{4}T$, $y = -\alpha$ geworden, das Bewegliche also den grössten Abstand auf der andern Seite der Gleichgewichtslage erreicht hat. Dann ist $v = 0$ und bei weiterem Wachsen von t wird es wieder positiv; das Bewegliche kommt von der negativen Seite her mit wachsender Geschwindigkeit in die Gleichgewichtslage zurück und hat, wenn es die Gleichgewichtslage erreicht hat, dieselbe Geschwindigkeit wie bei dem Beginne der Bewegung. Auch dies zeigt somit, dass, wie wir es im vorigen Paragraphen ableiteten, das Bewegliche, wenn keine Hindernisse vorhanden sind, unaufhörlich zwischen denselben Grenzen und mit derselben Geschwindigkeit hin und her geht.

Die entwickelte Gleichung setzt uns somit in den Stand, für jeden Moment, wenn wir die wirkenden Kräfte kennen, die Lage und Geschwindigkeit des Beweglichen vollkommen zu bestimmen, sie gibt uns somit unmittelbar das Gesetz der schwingenden Bewegung eines Punktes, wenn auf denselben Kräfte wirken, welche dem Abstände des Punktes aus der Gleichgewichtslage proportional sind.

Die Bewegung eines nach diesem Gesetze schwingenden Punktes können wir uns leicht graphisch darstellen. Sei C Fig. 197 die Gleichgewichtslage des Punktes, der auf der Linie Ca sich bewegt. Beschreiben wir dann mit dem Radius Ca und Cb einen Kreis, dessen



denken uns, daß ein Punkt mit der Geschwindigkeit $\alpha \frac{2\pi}{T}$ diesen durchlaufe, so sind die Projektionen der von dem Punkte in diesem durchlaufenen Bögen auf den Durchmesser Ca die Strecken, die der in der schwingenden Bewegung zurückgelegt hat. Geht der Punkt aus nach oben, so gibt uns die Projektion des Bogens $\frac{1}{2} T$ gleich C nach $\frac{1}{2}$ Schwingungsdauer zurückgelegten Weg u. s. f. Man sieht, daß die in gleichen Zeiten bei der schwingenden Bewegung zurückgelegten Wege sehr verschieden sind. Die den gleichen Bögen angehörigen sind dann den Geschwindigkeiten proportional, welche den Abständen des Punktes von der Gleichgewichtslage entsprechen.

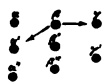
§ 125.

Schwingung von Punktreihen. Entstehung der Wellen.

wir in einer Reihe von Punkten, welche durch Kräfte, die zwischen einzelnen Punkten thätig sind, in einer bestimmten Lage, der Gleichgewichtslage, festgehalten werden, einen Punkt in eine schwingende Bewegung versetzen, so wird dadurch nicht nur das Gleichgewicht eines Punktes gestört, sondern das der ganzen Reihe. Da die Gleichgewichtslage durch die Wirkung der übrigen Punkte bedingt wird, so wird dadurch, daß der eine Punkt seine Lage ändert, zunächst die angrenzenden Punkte gestört werden und von diesen sich die Gleichgewichtsstörung auf immer weitere übertragen.

Wir nehmen an, daß die einzelnen Punkte sich anziehen, und die Anziehungskraft sich ändert mit der Entfernung der Punkte voneinander. Überdies setzen wir voraus, daß der vollständigen Annäherung

Fig. 198.



Punkte abstoßende Kräfte entgegenwirken, die falls mit der Entfernung der Punkte aber nach einem andern Gesetze als

ziehenden Kräfte sich ändern. Nehmen wir an, daß mit einer Annäherung der Punkte die abstoßenden Kräfte viel rascher wachsen als die anziehenden, so ist durch ein System solcher Kräfte die Gleichgewichtslage der Punkte vollständig bestimmt. In dieser sind die an jedem einzelnen Punkt entgegengesetzter Richtung wirkenden Kräfte gleich. Wird nun der Punkt α aus seiner Gleichgewichtslage gebracht und z. B. nach α' verschoben, so wird dadurch der Abstand zwischen α und β größer. Durch die Vergrößerung des Abstandes $\alpha\beta$ in $\alpha'\beta$ werden die auf β von α wirkenden Kräfte geändert; sowohl die anziehenden als die abstoßenden werden kleiner. Da aber die Abstoßungen sehr viel rascher abnehmen als die Anziehungen, so ist der Erfolg dieser Änderungen, daß β jetzt stärker nach α' gezogen wird. Da in der Gleichgewichtslage die Wirkung der an β angrenzenden Punkte sich aufhebt, so muß jetzt, da die Anziehung nach α' zugenommen hat, der Punkt β sich α zu nähern suchen, aber nicht in der Richtung $\alpha\beta$, sondern in einer andern Richtung $\beta\beta'$. Denn mit der Bewegung nach unten hin ändert sich ebenfalls der Abstand $\beta\gamma$, und auch hier wegen der raschern Abnahme der abstoßenden Kräfte die Anziehung

wiegen. Auf den Punkt β wirkt daher eine nach α' und eine nach γ gerichtete Anziehung ein, β wird sich also in der Richtung der Resultierenden nach β' bewegen.

Bewegt sich der Punkt α nach α'' , so muß β aus eben den Gründen folgen und sich nach β'' bewegen, zugleich muß aber γ seine Ruhelage verlassen, da jetzt die Anziehung von β auf γ die Abstofsung überwiegt, und von γ sich nach γ' bewegen.

Wenn demnach α das erste Viertel seiner Oscillation zurückgelegt hat, ist die Bewegung auf der Punktreihe bis zum Punkte δ fortgeschritten, α, β, γ haben ihre Ruhelage verlassen; die Gestalt der Punktreihe ist die Fig. 198 dargestellte.

Wenn α in seiner Bewegung umkehrt und in der folgenden Zeit gegen die Ruhelage sich bewegt, wird sich β zunächst wegen der Geschwindigkeit, welche es in β'' besitzt, noch eine Strecke weiter bewegen, und dann ebenfalls durch die von α und γ ausgeübten Anziehungen zur Ruhelage zurückkehren. Das Gleiche wird etwas später mit γ der Fall sein. Hat α dann die Ruhelage erreicht, so wird β, γ die in Fig. 199 angedeutete Lage haben.

Die Bewegung von γ hat aber während dieser Zeit die Bewegung von δ zur Folge gehabt, und diese wieder die Bewegung von ϵ und ζ , gerade wie sich vorhin β und γ infolge der Bewegung von α bewegten. Der Punkt δ hat in dieser Zeit seinen größten Abstand erreicht, da γ denselben schon überschritten, und in dem in Fig. 199 dargestellten Momente sowohl γ als ϵ den Punkt δ gegen seine Gleichgewichtslage hinziehen. Wenn also α in seiner Ruhelage angekommen ist, hat ein in einem gewissen Abstände von α liegender Punkt seinen größten Abstand erreicht und ist im Begriffe, den Rückweg gegen die Ruhelage anzutreten, und die Bewegung überhaupt hat sich bis zum doppelten Abstände von α bis η fortgepflanzt. Fig. 199 stellt die gegenseitige Lage der Punkte in diesem Augenblicke dar.

Fig. 199.

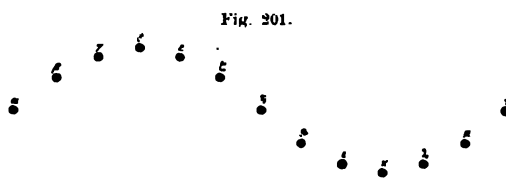
In der darauf folgenden Zeit bewegt sich der Punkt α über die Ruhelage hinaus nach α''' (Fig. 200); die Punkte β und γ folgen; der Punkt δ , der im Augenblicke, als α die Ruhelage passierte, seine rückgängige Bewegung antrat, hat denselben Raum durchlaufen wie in der vorigen Zeit und ist in seine Ruhelage zurückgekehrt. Die folgenden Punkte ϵ, ζ, η befinden sich in derselben Lage und derselben Phase der Bewegung wie β, γ, δ in dem vorhin betrachteten Zeitpunkte, wo α die Ruhelage zurückgekehrt war, δ seine äußerste Lage erreicht hatte.

Fig. 200.

Wie sich aber am Ende des ersten Viertels der Oscillation von α die Bewegung bis δ fortgepflanzt hatte, so hat sie sich jetzt ϑ und ι mittheilt, und der Punkt κ ist im Begriffe, seine Bewegung nach unten hin zu beginnen.

Wenn schliesslich α den letzten Teil seiner Oscillation zurückgelegt hat und wieder in seiner Gleichgewichtslage angekommen ist, so ist Lage der Punkte α bis ν folgende geworden (Fig. 201). Die Punkte haben ihre äusserste Lage überschritten und sind auf dem Rückwege zur Ruhelage; δ ist während der Zeit, welche α brauchte, um von α äussersten zur Ruhelage sich zu bewegen, von der Ruhelage bis zu seinem grössten Abstände fortgeschritten; ϵ und ζ haben die Ruhelage überschritten; η ist wie α von der äussersten Lage in dieselbe zurückgekehrt; ϑ und ι haben ähnliche Wege zurückgelegt wie β und γ ; der Punkt κ , der am Ende der vorigen Zeit seine Bewegung anfangt, hat den grössten Abstand erreicht und λ und μ haben eine Bewegung erhalten, wie β und γ in der zuerst betrachteten, ϵ und ζ in der folgenden und ϑ und ι in der der letzten mittelbar vorhergehenden Zeit. Die Bewegung hat sich also bis Punkte ν fortgepflanzt, der gerade im Begriff steht, seine Bewegung zu beginnen.

Dadurch also, dass einem Punkte α einer Punktreihe, welche durch anziehende und abstossende Kräfte der einzelnen Punkte im Gleichgewichte gehalten wird, eine oscillierende Bewegung erteilt wird, erhalten auch die folgenden Punkte eine oscillierende Bewegung, welche sich von Punkt zu Punkt der Reihe fortpflanzt. Die



die Bewegung des Punktes α fort, so dauert ebenso die Bewegung der folgenden Punkte fort. Von ν an pflanzt sich die Bewegung gerade so weiter fort, während der ersten Oscillation von ν , welche mit der zweiten gleichzeitig ist, um eine der Länge $\alpha\nu$ gleiche Strecke und so weiter. Ebenso wie nach der einen Richtung pflanzt sich die Bewegung auch in der entgegengesetzten in ganz gleicher Weise fort, so dass nach und nach sämtliche Punkte unserer Punktreihe eine oscillierende Bewegung erhalten.

Wenn die Punkte bei ihrer oscillierenden Bewegung die Punkte verlassen, wie wir es der Deutlichkeit wegen in unseren Figuren angenommen haben, so erhält die Punktreihe im Laufe der Bewegung wellenförmige Gestalt, deshalb nennt man die Bewegung eine Wellenbewegung.

Die Strecke, über welche sich die oscillierende Bewegung von einem Punkte aus einer ganzen Oscillation des Punktes α verbreitet, hat die Gestalt einer Welle, deshalb nennt man sie eine Welle oder Wellenlänge. Auf dieser Strecke sind alle Oscillationsphasen, welche der einzelne oscillierende Punkt nach und nach annimmt, neben einander vorhanden, weil jeder Punkt dieser Strecke seine Oscillation um ein wenig später beginnt, und gerade so zurücklegt als der Punkt α .

Die einzelne Welle besteht aus zwei kongruenten Teilen, einem vorderen und einem hintern, dem Wellenberge und dem Wellenthale, in dem homologen Punkte, das heisst diejenigen, welche gleich weit vom Anfang jeder Wellenhälfte entfernt sind, mit gleichen aber entgegengesetzten Geschwindigkeiten begabt sind. Die gleich weit vom Anfang jeder Wellenhälfte liegenden Punkte befinden sich daher

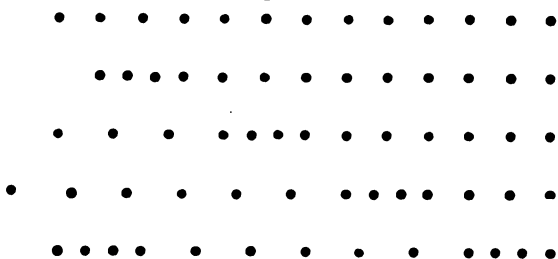
Phasen. Um diesen Gegensatz auszudrücken, ist auch der Name Wellenberg und Wellenthal gewählt worden, jeder der Hälften kann man den Namen Wellenberg oder Wellenthal beilegen.

Bei der fortschreitenden Bewegung teilt sich die Reihe in eine Folge solcher Wellenlängen, und wenn die Verhältnisse in der ganzen Reihe dieselben sind, so ist auch die Länge der Wellen in der ganzen Punktreihe die gleiche. Hat sich demnach die Bewegung in einer Zeit t um die Länge x fortgepflanzt, und ist die Zeit $t = n \cdot T$, wo T wie vorhin die Oscillationsdauer eines der Punkte bedeutet, so hat sich die Länge x in n Teile von der Länge einer Welle zerlegt, in deren jeder alle Punkte sich gerade so bewegen, wie die zwischen α und ν gelegenen Punkte. Da nun unter dieser Voraussetzung auch die Oscillationsdauer immer dieselbe ist, so muß, da während der Zeit T die schwingende Bewegung sich um die Länge einer Welle fortpflanzt, die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Bewegung auf immer weitere Punkte überträgt, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung konstant sein.

Wir haben bisher über die Richtung, in welcher die einzelnen Punkte sich bewegen, gar keine Voraussetzung gemacht, um die Betrachtung ganz allgemein zu halten. Die Richtung wird bedingt durch diejenige, welche der Punkt α anfänglich besitzt, und durch die Kräfte, welche auf die Punkte der Reihe einwirken.

Bewegt sich der Punkt α anfänglich in der Richtung der Punktreihe, so sieht man sofort, daß dann alle Punkte ebenfalls in derselben Richtung hin und hergehen müssen, da dann nur Kräfte auftreten, welche in dieser Richtung wirken. Die Richtung der Bewegung der Punkte fällt dann mit derjenigen, in welcher sich die Bewegung fortpflanzt, zusammen. Bei diesen, den sogenannten longitudinalen Schwingungen der longitudinalen Wellen, tritt eine Gestaltsveränderung der Punktreihe nicht ein, sondern nur eine Verdichtung und abwechselnde Verdünnung, indem die Punkte sich abwechselnd einander nähern und von einander entfernen (Fig. 202).

Fig. 202.



Ist die Bewegung der Punkte senkrecht gegen die Punktreihe, so nennt man die Schwingungen transversale; die Richtung, in welcher die Punkte sich bewegen, ist dann senkrecht gegen die Richtung, in welcher die Bewegung sich fortpflanzt. Eine solche transversale schwingende Bewegung tritt nicht immer dann ein, wenn die ursprüngliche Bewegung des zuerst bewegten Punktes eine transversale ist, sondern nur dann, wenn die Resultierende sämtlicher auf die einzelnen Punkte der Reihe, wenn sie die Gleichgewichtslage verlassen haben, wirkenden Kräfte gegen die Punktreihe senkrecht ist. Wir werden später Fälle der Art zu betrachten haben.

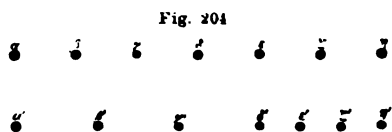
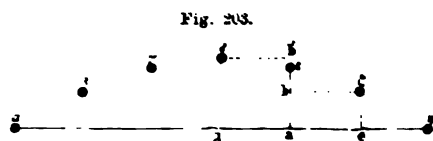
Möglich ist es ferner, daß die longitudinale und transversale Bewegung sich kombiniert und daß die einzelnen Punkte dadurch gerade oder krummlinige Bahnen beschreiben. Wir werden letztere bei einer Wasserwellen finden.

§ 126.

Mathematische Darstellung der Wellenbewegung einer Punktreihe. Um die Bewegung der einzelnen Punkte einer Reihe vollständig darzustellen, müssen wir für jeden Zeitpunkt den Ort jedes Punktes der Reihe, sowie seine Geschwindigkeit der Größe und Richtung nach bestimmen können. Wir müssen demnach auch hier, wie bei der oscillirenden Bewegung eines Punktes, eine Gleichung aufsuchen, welche uns die entsprechenden Größen als abhängig von der Zeit und von ihrer Lage in der Punktreihe wiedergibt, denn nach den Betrachtungen des vorigen Paragraphen hängt der Bewegungszustand eines Punktes der Reihe sowohl von der Zeit als auch von der Lage des Punktes in der Reihe ab. Für einen gegebenen Zeitpunkt ist die Bewegung der Punkte der Reihe je nach ihrer verschiedenen, und für eine gegebene Lage ist sie eine andere zu verschiedenen Zeiten.

Um zu der Gleichung zu gelangen, betrachten wir einen beliebigen Punkt der Reihe, dessen Abstand von dem Anfangspunkt der Bewegung, das heißt von dem Punkte, den wir in eine schwingende Bewegung setzen, gleich x sei, und suchen dessen Bewegung zur Zeit t zu bestimmen. Wir gelangen dazu, indem wir die Kräfte aufsuchen, welche die Bewegung des Punktes bewirken.

Wie die Betrachtungen des vorigen Paragraphen zeigen, werden die Punkte der Reihe nach und nach von der Bewegung ergriffen, und die Folge davon ist, daß die neben einander liegenden Punkte nie gleich weit, sondern einer mehr, der andere weniger von der Gleichgewichtslage entfernt sind. Die Punkte sind deshalb auch relativ gegen einander verschoben, das heißt ihre Stellung gegen einander ist eine andere als die der Gleichgewichtslage entsprechende.



Da wir nun voraussetzen, daß die Punkte sich nur zwischen ihnen thätigen Kräften im Gleichgewicht halten, so sind bei einer solchen Verschiebung die Punkte gegen einander Kräfte ausgeübt, welche die Punkte in ihre relative Gleichgewichtslage zurückzubringen suchen. Wir setzen voraus, daß die Verschiebung der Punkte klein ist, daß wir, wie bei elastischen Kräften, immer die Größe dieser Kräfte der Größe der Verschiebung proportional setzen dürfen.

Es stelle nun $\alpha\delta\eta$ (Fig. 203) die Lage der Punkte in einem bestimmten Zeitpunkt der Punktreihe, welches in Bewegung ist, dar, sei es bei transversaler oder bei longitudinaler Schwingung. Ist die Bewegung transversal, so sind die Abstände der Punkte β, γ, \dots von $\alpha\eta$ in der That dieselben, wie die Abstände der Punkte von der Gleichgewichtslage. Schwingen die Punkte

tellen die Abstände der Punkte von $\alpha\eta$ die Verschiebungen der Punkte der Gleichgewichtslage (Fig. 204) dar, indem die Verschiebungen in Orte der Gleichgewichtslage, z. B. $\alpha\beta' - \alpha\beta$, $\alpha\gamma' - \alpha\gamma$, . . . senkrecht η aufgetragen sind.

Betrachten wir irgend drei neben einander liegende Punkte, z. B. δ , so ist die Verschiebung des Punktes ϵ gegen δ der Differenz der senkrechten Abstände $d\delta - a\epsilon$ und ebenso die Verschiebung von ϵ gegen ξ der Differenz $a\epsilon - c\xi$ proportional. Schwingen die Punkte longitudinal, so sind die Differenzen $\epsilon b'$ und ϵb die Verschiebungen der Punkte gegen einander, wie sich aus der eben angeführten Konstruktion ergibt. Schwingen die Punkte transversal, so wird, wenn wir voraussetzen, daß die Amplituden der Schwingung sehr klein sind, eine merkliche Veränderung in den Abständen der Punkte nicht eintreten, es ist $\delta\epsilon$ von ad nur um eine selbst verschwindende GröÙe verschieden. Es bildet dann aber die Verbindungslinie beider Punkte mit der Verbindungslinie in der Gleichgewichtslage einen Winkel, in derselben Art, wie wir es bei der Torsion fanden. Die Tangente dieses Verschiebungswinkels, wie wir ihn damals nannten, oder da die Winkel so klein sind, daß wir für die Tangente den Bogen einsetzen dürfen, der Verschiebungswinkel selbst, ist gleich den Quotienten aus der Verschiebung der Moleküle und dem Abstände der Moleküle in der Gleichgewichtslage. Der Verschiebungswinkel zwischen δ und ϵ ist $\epsilon\delta b' = \frac{\epsilon b'}{ad}$, zwischen ϵ und ξ ist $\frac{\epsilon b}{ac}$.

Setzen wir für unsere Punktreihe die früher erkannten Gesetze der Elasticität als gültig voraus, so folgt, daß zwischen zwei gegen einander verschobenen Molekülen Kräfte thätig sind, welche sie in die relative Gleichgewichtslage zurückzubringen suchen, und welche der GröÙe der Verschiebung proportional sind. Das Maß dieser Kräfte ist der Elasticitätskoeffizient, die Kraft, mit der die Moleküle gegen ihre Gleichgewichtslage hingetrieben werden, wenn die Verschiebung dem ursprünglichen der Gleichgewichtslage entsprechenden Abstände gleich geworden ist. Bezeichnen wir den Elasticitätskoeffizienten mit c , den der Gleichgewichtslage entsprechenden Abstand der Moleküle mit dx , so ist die einer Verschiebung ξ der Moleküle entsprechende Kraft

$$f = \frac{\xi}{dx} c.$$

Sahen weiter bei Besprechung der Torsionserscheinungen, daß bei einer Verschiebung der Molekülschichten gegen einander ohne Vergrößerung des Abstandes der Schichten, eine die Schichten gegen ihre relative Gleichgewichtslage zurücktreibende Kraft auftritt, welche der GröÙe des Verschiebungswinkels proportional ist. Diese Kraft war für die Einheit des Verschiebungswinkels ein gewisser Bruchteil des Elasticitätskoeffizienten. Wenn nun a eine Konstante, die kleiner als eins ist, so können wir die einer Verschiebungswinkel α entsprechende Kraft

$$f_1 = ac\alpha$$

als Satz dürfen wir direkt auf unsere Punkte voraus, daß zwischen den Punkten

trachteten Punkte eine Reihe bilden, ebensolche Kräfte wirken, wie sie früher als elastische Kräfte erkannt haben.

Da nun in unserer Punktreihe die Verschiebung des Punktes ε gegen δ gemessen nach dem ursprünglichen Abstände der Punkte in der Gleichgewichtslage, resp. bei transversaler Bewegung der Verschiebungsweg gleich $\frac{\varepsilon b'}{ad}$ ist, so ist die Kraft, mit welcher der Punkt in seine Gleichgewichtslage in Bezug auf δ gezogen wird, also nach b' hin

$$a \frac{\varepsilon b'}{ad} \cdot e,$$

wenn wir mit e die Elasticität der Punktreihe bezeichnen, und a die angeführte Konstante ist, welche für longitudinale Schwingungen eins ist.

Die Verschiebung des Punktes ε gegen ζ bewirkt, daß ε gegen δ getrieben wird, gegen die Stelle, in welcher er gegen ζ in seiner Gleichgewichtslage ist; die Größe der Kraft, welche in diesem Sinne wirkt,

$$a \frac{\varepsilon b}{ac} \cdot e = a \frac{\varepsilon b}{ad} \cdot e.$$

Diese beiden Kräfte wirken auf den Punkt ε nach gerade entgegengesetzter Richtung, die ihn wirklich bewegende Kraft ist somit die Differenz beider, somit

$$a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad} \cdot e.$$

Da wir es hier mit molekularen Kräften zu thun haben, welche von Molekülschicht zu Molekülschicht wirken, so wird die Bewegung des Punktes ε durch weiter entfernte Punkte nicht beeinflusst; die soeben abgeleitete bewegende Kraft ist somit die ganze den Punkt ε bewegende Kraft.

Um die durch diese Kraft dem Punkte ε erteilte Beschleunigung zu erhalten, haben wir nur dieselbe durch die Masse m des bewegten Punktes ε zu dividieren, wir erhalten dann

$$a \cdot \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad} \cdot \frac{e}{m}.$$

Anstatt der Masse m des einzelnen Punktes oder der einzelnen Molekülschicht, zu welcher der Punkt gehört, können wir bequemer die Dichtigkeit der Punktreihe einführen, die wir als die Dichtigkeit der Punktreihe bezeichnen wollen. Die Anzahl der Punkte in der Längeneinheit der Reihe ist

$$n = \frac{1}{ad}.$$

Die Dichtigkeit der Punktreihe ist somit

$$n \cdot m = \frac{m}{ad} = d.$$

Führen wir diesen Wert in obigen Ausdruck ein, so wird die Beschleunigung

$$a \cdot \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad} \cdot \left(\frac{m}{ad} \right) \cdot ad = a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad^2} \cdot \frac{e}{d}.$$

Diese Beschleunigung ist diejenige, welche der betrachtete Punkt der Reihe in dem betrachteten Zeitmoment, also zur Zeit t , nachdem die Bewegung in dem Ausgangspunkte derselben begonnen hat, erhält. Dieselbe ist somit gleich $\frac{dv}{dt}$, gleich dem Quotienten aus der in der unendlich kleinen der Zeit t folgenden Zeit dt stattfindenden Änderung der Geschwindigkeit dv und der Zeit dt , es ist also

$$\frac{dv}{dt} = a \frac{\varepsilon b' - \varepsilon b}{ad^2} \cdot \frac{c}{d}.$$

Die Differenz $\varepsilon b' - \varepsilon b$ hängt, wie man schon unmittelbar an der Fig. 203 erkennt, ab von der Lage des Punktes ε in der Reihe. Um das auszudrücken, wollen wir den Abstand des betrachteten Punktes von dem Ausgangspunkte der Bewegung mit x bezeichnen und den Abstand ad der einzelnen Punkte mit dx , sei ferner der Abstand εa des betrachteten Punktes ε von seiner Gleichgewichtslage gleich y . Da nun die in einem bestimmten Momente, also zur Zeit t , vorhandene Verschiebung der einzelnen Punkte aus der Gleichgewichtslage abhängig ist von der Lage des Punktes in der Reihe, also von dem Werte von x , so können wir ganz allgemein y als eine Funktion von x bezeichnen, also

$$y = f(x).$$

Der Abstand des vorhergehenden Punktes δ von der Gleichgewichtslage y ist dann, da dieser Punkt dem Anfangspunkt um dx näher liegt,

$$y' = f(x - dx) = y - dy'.$$

Da man nämlich die Änderung von y , wenn x um dx wächst, mit dem positiven Vorzeichen versteht, so müssen wir die Änderung von y , wenn wir in die Funktion einen um dx kleinern Wert einführen, mit dem negativen Vorzeichen versehen.

Der Abstand des auf ε folgenden Punktes ξ vom Anfangspunkte der Bewegung ist $x + dx$, für den Abstand des Punktes von seiner Gleichgewichtslage $c\xi = y''$ erhalten wir demnach

$$y'' = f(x + dx) = y + dy''.$$

Da nun $\varepsilon b' = y' - y$, $\varepsilon b = y - y''$, so folgt

$$\varepsilon b' - \varepsilon b = (y - dy' - y) - (y - (y + dy'')) = dy'' - dy'.$$

Die Differenz $\varepsilon b' - \varepsilon b$, welcher die Beschleunigung des betrachteten Punktes proportional ist, ist somit gleich dem Unterschiede zwischen den Veränderungen, welche die $f(x)$, die uns die Abstände y zu einer bestimmten Zeit darstellt, erfährt, wenn der Wert x einmal um dx , das andermal 2 dx größer wird. Denn es ist dy' die Änderung, welche y erfährt, wenn wir von δ aus um dx weiter zu ε gehen und dy'' diejenige, wenn wir von ε aus nochmals um dx , also von δ aus um 2 dx zu ξ gehen. Bezeichnen wir diesen Unterschied in den Veränderungen mit d^2y , so wird

$$\frac{dv}{dt} = a \frac{c}{d} \frac{d^2y}{dx^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2},$$

wenn wir den Faktor $a \frac{c}{d} = c^2$ setzen.

Die Gröfse dv im Zähler auf der linken Seite der Gleichung ist Änderung der Geschwindigkeit des bewegten Punktes in der auf die z folgenden unendlich kleinen Zeit dt . Ist v die Geschwindigkeit am Ende der Zeit t , diejenige am Ende der Zeit $t + dt$ gleich v' , so ist

$$dv = v' - v.$$

Zur Zeit t hat nun unser betrachteter Punkt, der durch die Entfernung vom Ausgangspunkte der Bewegung gegeben ist, den Weg y zurückgelegt. Wächst die Zeit um dt , so legt er in dieser den Weg dy zurück. Den ist seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{dy}{dt}.$$

Wächst jetzt die Zeit nochmals um dieselbe Gröfse dt , so legt er in dieser Zeit einen andern Weg dy' zurück, die Geschwindigkeit am Ende der Zeit $t + dt$ ist demnach

$$v' = \frac{dy'}{dt},$$

somit ist

$$dv = \frac{dy' - dy}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

wenn wir auch hier die Differenz der Wege, welche der betrachtete Punkt in den auf einander folgenden Zeiten dt zurückgelegt, mit d^2y bezeichnen. Damit wird dann schliesslich unsere Gleichung für die Beschleunigung unseres betrachteten Punktes

$$\frac{d^2y}{dt^2} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Diese letzte Gleichung bestimmt die Beschaffenheit der von uns gesuchten Gleichung, welche uns für jeden Moment und für jede Lage des Punktes in der Reihe den Abstand desselben von der Gleichgewichtslage anzugeben in den Stand setzt. Sie sagt nämlich direkt aus, daß die Unterschiede der von einem und demselben Punkte in auf einander folgenden Zeiten dt durchlaufenen Räume, dividiert durch das Quadrat der Zeit, proportional sei dem Unterschiede zwischen den Differenzen der in denselben Zeitmomente vorhandenen Abstände der Punkte, welche von dem betrachteten Punkte um dx und um $2dx$ entfernt sind, von der Gleichgewichtslage dividiert durch das Quadrat von dx . Das heisst aber nichts anders, als die Werte von y , welche ein bestimmter Punkt nach und nach annimmt in denselben Momente auf einer gewissen Strecke der Punktreihe einander vorhanden sein müssen. Die Gleichung, welche uns die Lage der Punkte gibt, muß also so beschaffen sein, daß sie uns für einen gegebenen Punkt, also für ein gegebenes x , dieselben Werte von y nach und nach wachsender Zeit liefert, welche sie uns für eine gegebene Zeit für die einander liegenden Punkte, also für ein wachsendes x , ergibt.

Aus dieser Bemerkung ergibt sich, daß die gefundene Gleichung uns noch keine bestimmte Funktion von x und t liefert, denn nach den Entwicklungen der mathematischen Einleitung erkennt man, daß eine Funktion von der Form $y = f\left(t + \frac{x}{c}\right)$ oder $y = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$ oder die Summe zweier solcher Funktionen der gefundenen Bedingung entspricht. Denn bilden wir nach den dort gefundenen

ine beliebige Funktion die in unserer Gleichung stehenden Differentialquotienten, so besteht immer die gefundene Gleichung, welche Funktion wir auch wählen. Es müssen deshalb noch weitere Bedingungen gegeben sein, welche die Natur der Funktion feststellen. In unserm Falle sind dieselben dadurch vorhanden, daß wir die Bewegung des Ausgangspunktes x Bewegung kennen, also die Funktion $y = f(t)$ für x gleich Null. Als diese Bedingung vollkommen genügt, ergibt sich daraus, daß, wenn wir für irgend einen Punkt der Reihe y als Funktion von t kennen, unser erkannte Zusammenhang zwischen t und x genügt, um sie für jeden Wert von x anzugeben.

Für den Ausgangspunkt der Bewegung, für welche x gleich Null ist, haben wir eine einfache schwingende Bewegung vorausgesetzt, welche nach 124 gegeben ist durch

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

wann α die Amplitude und T die Schwingungsdauer der Bewegung ist. Daraus folgt dann, daß die Bewegung unserer Punktreihe dargestellt wird durch

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT} \right) + \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right)$$

Man erkennt sofort, dass das eine Glied auf der rechten Seite die Ausbreitung der Bewegung nach der positiven Seite der x , das andere die Ausbreitung nach der entgegengesetzten Seite darstellt. Für $x = 0$ wird die Summe der beiden Glieder der rechten Seite

$$y = \alpha \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Daß diese Gleichung der für die Beschleunigung abgeleiteten entspricht, folgt zunächst, wenn man die beiden in derselben vorkommenden Differentialquotienten bildet. Da bei der Berechnung der Differentialquotienten nach t die Veränderliche x als konstant zu betrachten ist, so wird nach E IV

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT} \right) + \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right),$$

weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dt} \right) &= - \frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{T^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT} \right) - \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{T} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= - \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot y. \end{aligned}$$

Zur Bildung der Differentialquotienten nach x ist t als konstant zu betrachten, deshalb wird

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{cT} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT} \right) - \frac{\alpha}{2} \frac{2\pi}{cT} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) \\ &= - \frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{cT} \right) + \frac{\alpha}{2} \frac{4\pi^2}{c^2 T^2} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right) \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich aber auch, daß nach der Gleichung für y (stände der neben einander liegenden Punkte jene Werte zu einer gegebenen Zeit haben, welche der einzelne Punkt nach einander durchläuft, die hier dargestellte Bewegung jene ist, welche uns die Betrachtung vorigen Paragraphen lieferten. Da wir zu diesem Nachweis nur die der einen der beiden Richtungen sich fortpflanzende Bewegung betrachten nötig haben, wollen wir zunächst untersuchen, welches der Glieder uns die Fortpflanzung der Bewegung nach der positiven, jene nach der negativen Seite gibt.

Die Bewegung irgend eines Punktes der Reihe wird von dem M ab, in welchem sich die Bewegung bis zu ihm ausgebreitet hat, die wie diejenige des Ausgangspunktes der Bewegung. Denn legen wir Gleichung x einen bestimmten Wert, etwa x_1 bei, so wird die Bewegung dieses Punktes dargestellt durch

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t \pm \frac{x_1}{c}}{T} \right),$$

wo für den betrachteten Punkt auf der rechten Seite der Gleichung ein Vorzeichen zu nehmen ist, wenn der Punkt auf der positiven, das wenn er auf der negativen Seite des Ausgangspunktes der Bewegung ist. Ist $t \pm \frac{x_1}{c} = 0$, so beginnt der betrachtete Punkt seine Bewegung jedesmal, wenn von da ab t um T gewachsen ist, hat er eine Schwingung vollführt.

Nennen wir nun τ die Zeit, welche nach dem Beginne der Bewegung in deren Ausgangspunkt verstrichen ist, bis die Bewegung zu dem betrachteten Punkte gelangt ist, so wird die Bewegung des letztern ebenfalls dargestellt durch

$$y = \frac{\alpha}{2} \sin 2\pi \left(\frac{t - \tau}{T} \right).$$

Es muß somit

$$t - \tau = t \pm \frac{x_1}{c}$$

sein, oder

$$t - \tau = t - \frac{(\pm x_1)}{c}.$$

Daraus folgt, daß wir für ein positives x von den beiden Gliedern des Ausdruckes für y dasjenige wählen müssen, welches x mit dem negativen Vorzeichen enthält, daß somit, wenn wir der Einfachheit wegen α setzen, also annehmen würden, in dem Ausgangspunkte der Bewegung hätten wir dem Punkte die Amplitude 2α erteilt,

$$y = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right)$$

die nach der Seite der positiven x sich fortpflanzende Bewegung darstellt.

Zu irgend einer Zeit $t = nT$ hat der Ausgangspunkt n Schwingungen vollführt, also n mal alle Werte

α angenommen. In demselben Momente liefert aber auch in der Reihe auf der Strecke $nx = n \cdot cT$ unsere Gleichung n mal alle Werte $+\alpha$ und $-\alpha$ neben einander. Denn setzen wir $t = nT$, so wird

$$x = -\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{x}{cT},$$

t für

$$\begin{array}{cccccc} x = 0 & x = \frac{1}{4}cT & x = \frac{1}{2}cT & x = \frac{3}{4}cT & x = cT \\ y = 0 & y = -\alpha & y = 0 & y = \alpha & y = 0 \end{array}$$

f. Die Reihe zeigt also das neben einander, was der Ausgangspunkt Bewegung nach einander zeigt, mit dem Unterschiede nur, daß die Amplitude der Schwingungen nur die Hälfte ist, weil die Bewegung des Ausgangspunktes sich nach beiden Seiten der Reihe mitteilt.

Die Strecke $x = cT$ ist jene, welche wir im vorigen Paragraphen als Wellenlänge der sich fortpflanzenden Bewegung bezeichneten, über die hin die Bewegung sich jedesmal fortpflanzt, wenn der Ausgangspunkt eine Schwingung vollführt. Die Gleichung zeigt, entsprechend den Resultaten des vorigen Paragraphen, daß die Wellenlänge in zwei gleiche Hälften zerfällt, Wellenberg und Wellenthal, denn zwischen 0 und $x = \frac{1}{2}cT$ sind alle Werte von y negativ, die Punkte befinden sich an der einen Seite der Gleichgewichtslage, zwischen $x = \frac{1}{2}cT$ und cT sind alle Werte positiv. Dasselbe wiederholt sich in der ganzen Reihe, überall sind die Werte zwischen $x = 2m \frac{cT}{2}$ und $(2m+1) \frac{cT}{2}$ negativ und zwischen $(2m+1) \frac{cT}{2}$ und $(2m+2) \frac{cT}{2}$ positiv. Der Begriff von cT als einer Wellenlänge entsprechend, wollen wir

$$cT = \lambda$$

2.

Alle um irgend ein Vielfaches von $\frac{\lambda}{2}$ vom Anfangspunkte der Bewegung entfernten Punkte befinden sich in der Gleichgewichtslage, sie befinden sich aber in entgegengesetzter Phase der Bewegung, denn ihre Geschwindigkeiten sind einander gleich, aber entgegengesetzt. Wir erhalten Geschwindigkeiten in dem Quotienten

$$v = \frac{dy}{dt} = \alpha \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Setzen wir $t = nT$ und $x = m\lambda$, so wird

$$v = \frac{dy}{dt} = \alpha \frac{2\pi}{T} \cos 2\pi (n - m)$$

3. wir dagegen $x = (2m +$

$$v = \alpha \frac{2\pi}{T} \cos$$

Ebenso wie für diese Punkte können wir für alle übrigen der Reihe und ebenso für jeden Moment aus dieser Gleichung GröÙe und Richtung der Geschwindigkeit ableiten, so daß also unsere Gleichung für y die Bewegung der Punktreihe in allen ihren Einzelheiten bestimmt.

§ 127.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung. Unsere Entwicklung liefert uns weiter die Geschwindigkeit, mit welcher sich die Bewegung in der Punktreihe ausbreitet. Wie wir schon vorhin bemerkten,

$$\tau = \frac{x}{c}$$

die Zeit, während welcher sich die Bewegung durch die Strecke x fortpflanzt. Die in unserer Gleichung vorkommende GröÙe c

$$c = \sqrt{a \frac{e}{d}}$$

ist somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung hängt somit nicht von der Schwingungsdauer derselben, sondern nur von der Beschaffenheit der Punktreihe, deren Elasticität und Dichtigkeit, sowie von der Richtung der Schwingungen, ob longitudinal oder transversal ab; die für longitudinale Schwingungen ist $a = 1$, für transversale $a < 1$. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist somit in einer Punktreihe überall dieselbe, so lange der Quotient aus Elasticität und Dichtigkeit nicht geändert ist.

Wir machen jedoch darauf aufmerksam, daß dieser Schluss nur unter der ausdrücklichen Voraussetzung richtig ist, daß die Amplituden der Bewegung klein sind gegen die Wellenlänge, wenigstens dann, wenn die Schwingungen transversale sind. Sind die Amplituden nicht klein, so können wir die bei transversalen Schwingungen geweckte Elasticität nicht einfach der Verschiebung der Punkte proportional setzen, es tritt dann die Dehnung der Punktreihe hinzu. In dem Falle hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge ab. Wir werden im zweiten Bande auf diese Frage zurückkommen, wo wir auch Medien eigentümlicher Beschaffenheit kennen lernen werden, in denen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Wellenlänge abhängig ist, auch für Wellen, welche gegen die Amplituden groß sind.

Aus der Beziehung zwischen Wellenlänge und Schwingungsdauer

$$\lambda = c \cdot T$$

erhalten wir weiter auch für die Schwingungsdauer

$$T = \frac{\lambda}{c} = \lambda \sqrt{\frac{d}{ae}},$$

ein Ausdruck, der uns die Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Wellenlänge und der Beschaffenheit der Punktreihe liefert. Gleichwohl erkennen wir, daß zur experimentellen Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit es nur der Messung der Wellenlängen und der Schwingungsdauer bedarf.

§ 128.

Zusammensetzung mehrerer Bewegungen; Interferenz. Werden gleich an verschiedenen Punkten einer Reihe schwingende Bewegungen engt, so pflanzen sich dieselben von jeder Erregungsstelle aus in der Reihentreihe fort; es fragt sich nun, wie wird die Bewegung derjenigen Punkte beschaffen sein, welche von mehreren Bewegungen affiziert werden. Jeder dieser Punkte, an welchem z. B. zwei Bewegungen zugleich ankommen, erhält dann zwei Impulse, es muß somit auch seine Bewegung durch beide Impulse bestimmt werden.

Das Resultat dieses Zusammenwirkens ergibt sich aus dem Grundsatz der Mechanik, daß wenn zwei Kräfte einen Punkt ergreifen, daß in jede so wirkt, wie wenn sie allein vorhanden wäre. Wirken beide Kräfte in derselben Richtung, so summieren sie sich einfach, die Beschleunigung des Punktes ist in jedem Momente gleich der Summe der Beschleunigungen, ebenso sind die Geschwindigkeiten und die durchlaufenen Räume gleich der Summe der einzelnen Geschwindigkeiten und der mit denselben durchlaufenen Räume. Wirken die Kräfte in verschiedenen Richtungen, so erhalten wir die resultierenden Beschleunigungen, Geschwindigkeiten und durchlaufenen Räume nach dem Satze vom Kräfteparallelogramm.

Gerade so müssen wir bei den schwingenden Bewegungen verfahren, die resultierende Bewegung zu erhalten. Setzen wir zunächst voraus,

Bewegungen seien alle gleichgerichtet, so wird die Beschleunigung, welche ein Punkt zur Zeit t erhält, gleich der Summe aller einzelnen Beschleunigungen, es ist deshalb auch die Geschwindigkeit des Punktes gleich der algebraischen Summe aller Geschwindigkeiten, welche ihm infolge jeder einzelnen ankommenden Bewegung erteilt wird. Entgegengesetzt gerichtete Bewegungen sind bei dieser Summe mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen.

Daraus folgt schließlich, daß wenn ein Punkt zur Zeit t infolge der einzelnen ankommenden Bewegungen die Abstände $y_1, y_2, y_3 \dots$ von der Gleichgewichtslage haben würde, sein Abstand Y gleich der Summe aller Einzelabstände sein muß, oder es ist

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots$$

Damit sind wir sofort imstande für den Fall gleichgerichteter Bewegungen die resultierende Bewegung anzugeben. Wir betrachten zunächst Bewegungen gleicher Schwingungsdauer, und nehmen an, daß in einer Reihentreihe zwei Bewegungen zu gleicher Zeit beginnen, deren Anfangspunkt um d von einander entfernt sei, und die sich nach gleichen Richtungen in der Reihe fortpflanzen.

Es sei der Abstand irgend eines Punktes vom Ursprung der ersten Bewegung x , für diesen ist dann die Entfernung von der Gleichgewichtslage zur Zeit t

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Der Abstand des betrachteten Punktes von dem Ausgangspunkte der zweiten Bewegung ist dann, wenn wir annehmen, derselbe wäre um d weiter von dem betrachteten Punkte entfernt, $x + d$. Ist α' die Amplitude der zweiten Bewegung, so wird die Entfernung des betrachteten Punktes von der Gleichgewichtslage, wenn nur diese Bewegung zu ihm käme,

$$y_1 = \alpha' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda} \right).$$

Der resultierende Abstand Y ist die Summe beider, oder

$$Y = y + y_1 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+d}{\lambda} \right);$$

oder auch

$$Y = \left(\alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - \alpha' \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

Bestimmen wir nun zwei Größen A und D so, daß

$$A \cdot \cos 2\pi \frac{D}{\lambda} = \alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}$$

$$A \cdot \sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \alpha' \sin 2\pi \frac{d}{\lambda},$$

so wird der Ausdruck für Y gleich

$$Y = A \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x+D}{\lambda} \right),$$

und man erkennt, daß die resultierende Bewegung eine schwingende Bewegung von gleicher Schwingungsdauer und gleicher Wellenlänge λ ist, welche die einzelnen Bewegungen besaßen. Die Amplitude der schwingenden Bewegung ist gleich A ; die Phase derselben ist gegen die erste der beiden um D , gegen die zweite um $d - D$ verschoben, das heißt, dieselbe findet so statt, als wenn ihr Ausgangspunkt von dem betrachteten Punkt um die Strecke D weiter entfernt wäre, als der Ausgangspunkt der ersten Bewegung.

Die Amplitude A ergibt sich aus den beiden Gleichungen, welche A und D bestimmen, indem wir beide Gleichungen quadrieren und addieren

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda},$$

und für D erhalten wir

$$\tan 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha' \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}}{\alpha + \alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda}},$$

oder auch

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{A} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda}.$$

Gleichung für A zeigt, daß die resultierende Amplitude die Diagonale des Parallelogrammes ist, welches wir aus den einzelnen Amplituden α und α' mit dem Winkel $2\pi \frac{d}{\lambda}$ (Fig. 205) konstruieren, und zwar jene Diagonale, welche den

α und α' eingeschlossenen Winkel $2\pi \frac{d}{\lambda}$ enthält.

Denn es ist

$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 - 2\alpha\alpha' \cos c$$

da der Winkel c Nebenwinkel von $a = 2\pi \frac{d}{\lambda}$ ist, so folgt

$$ab^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha' \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = A^2.$$

erner ist in diesem Parallelogramm der Winkel, den ab und α einschließen, der die Phase bestimmende Winkel $2\pi \frac{D}{\lambda}$, denn es ist

$$ab : \alpha' = \sin c : \sin bac$$

$$\sin bac = \frac{\alpha'}{ab} \cdot \sin c = \frac{\alpha'}{A} \sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin 2\pi \frac{D}{\lambda}.$$

Die resultierende Amplitude sowohl als die Phase der resultierenden Bewegung sind hiernach abhängig von den Amplituden und der Phasendifferenz der gegebenen Bewegungen. Ist die Phasendifferenz d eine beliebige Zahl von ganzen Wellenlängen, so ist

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos 2n\pi = 1$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 + 2\alpha\alpha'; \quad A = \alpha + \alpha'$$

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = \sin 2n\pi = 0; \quad D = 0.$$

also die Phasendifferenz der gegebenen Bewegungen Null oder ein beliebiges Vielfaches einer Wellenlänge, so ist die resultierende Amplitude gleich der Summe der Teilamplituden, und die Phase der resultierenden Bewegung ist dieselbe wie diejenige der Teilbewegungen. Man erkennt die Richtigkeit dieser Folgerung auch leicht aus der Natur der schwingenden Bewegung, denn in dem Falle wirken beide Bewegungen immer in dieselben Weise zusammen, da die Punkte, deren Entfernung von einander eine Wellenlänge ist, immer in der gleichen Phase der Bewegung sich befinden.

Ist $d = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$, so ist

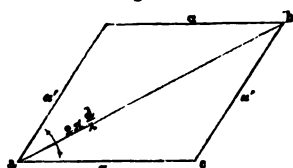
$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos (2n + 1)\pi = -1$$

$$\sin 2\pi \frac{D}{\lambda} = 0,$$

ist

$$A = \alpha - \alpha' \quad D = 0.$$

Fig. 205.



die resultierende Amplitude ist die Differenz der Teilamplituden, die Phase ist, wenn $\alpha > \alpha'$, jene der ersten, wenn $\alpha < \alpha'$ jene der zweiten Bewegung. Denn die Gleichung der resultierenden Bewegung wird

$$Y = (\alpha - \alpha') \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

die Werte von Y bekommen also entgegengesetztes Vorzeichen, je nachdem $\alpha > \alpha'$ oder $\alpha < \alpha'$. Zu gleichen Zeiten t vorhandene entgegengesetzte Werte von Y bedeuten aber entgegengesetzte Phasen oder eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge.

Sind α und α' einander gleich, so wird $A = 0$, die Bewegung hebt sich also auf der ganzen Strecke, auf welcher beide Bewegungen zusammenwirken, auf. In der That erfahren dann alle Punkte zu gleichen Zeiten stets entgegengesetzte an GröÙe gleiche Impulse.

Ist $d = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}$, so ist

$$\cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = \cos (2n + 1) \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 2\pi \frac{d}{\lambda} = \sin (2n + 1) \frac{\pi}{2} = 1$$

$$A^2 = \alpha^2 + \alpha'^2 \tan^2; \quad 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Das Quadrat der resultierenden Amplitude ist gleich der Summe der Quadrate der einzelnen Amplituden und die Tangente des Winkels, welche die Phase der resultierenden Bewegung bestimmt, ist gleich dem Quotienten der beiden einzelnen Amplituden, wobei im Zähler jene steht, welche gegen die erste Bewegung von deren Ausgangspunkt die Abstände x gerechnet sind, um eine ungerade Anzahl von ein viertel Wellenlängen verschoben ist.

An diesen Beispielen ist die Abhängigkeit der resultierenden Amplitude und Phase von den sie bestimmenden Umständen hinreichend deutlich zu erkennen.

Es möge nur noch bemerkt werden, daß der letzte Satz über die resultierende Amplitude und Phase, wenn die einzelnen Bewegungen die Phasendifferenz von $\frac{1}{4}\lambda$ besitzen, uns unmittelbar in den Stand setzt, die resultierende Amplitude und Phase einer beliebigen Anzahl von schwingenden Bewegungen zu bestimmen, wenn wir die einzelnen Amplituden und Phasen kennen.

Haben wir nämlich eine Anzahl Bewegungen, deren erste ist

$$y_1 = \alpha_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

deren andere die Amplituden $\alpha_2, \alpha_3 \dots$ haben und deren Anfangspunkte von dem der ersten um $d_2, d_3 \dots$ entfernt sind, so sind deren Gleichungen

$$y_2 = \alpha_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_2}{\lambda} \right)$$

$$y_3 = \alpha_3 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_3}{\lambda} \right)$$

$$y_n = \alpha_n \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + d_n}{\lambda} \right).$$

Die resultierende Bewegung ist dann

$$Y = y_1 + y_2 + y_3 + \dots y_n =$$

$$\left\{ \alpha_1 + \alpha_2 \cos 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \cos 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \dots \alpha_n \cos 2\pi \frac{d_n}{\lambda} \right\} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\pi}{\lambda} \right) -$$

$$\left\{ \alpha_2 \sin 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \sin 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \dots \alpha_n \sin 2\pi \frac{d_n}{\lambda} \right\} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{\pi}{\lambda} \right).$$

Nun ist

$$-\cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + \frac{1}{2}\lambda}{\lambda} \right),$$

sodafs die abgeleitete Gleichung für Y uns zeigt, dafs wir die durch das Zusammenwirken beliebig vieler schwingender Bewegungen entstehende Resultierende als die Resultierende zweier Wellen darstellen können, welche die Phasendifferenz einer viertel Wellenlänge haben, und deren Amplituden sind

$$A = \alpha_1 + \alpha_2 \cos 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \cos 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \dots \alpha_n \cos 2\pi \frac{d_n}{\lambda}$$

$$B = \alpha_2 \sin 2\pi \frac{d_2}{\lambda} + \alpha_3 \sin 2\pi \frac{d_3}{\lambda} + \dots \alpha_n \sin 2\pi \frac{d_n}{\lambda}.$$

Für die resultierende Amplitude und Phase erhalten wir dann

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}; \quad \tan 2\pi \frac{D}{\lambda} = \frac{B}{A}.$$

Wir erhalten also stets eine schwingende Bewegung, welche mit jener der einzelnen gleiche Schwingungsdauer, somit auch gleiche Wellenlänge hat, deren Amplitude R und Phase D wir berechnen können, wenn wir die Werte von $\alpha_1, \alpha_2 \dots$ sowie von $d_2, d_3 \dots$ kennen. Die resultierende Bewegung ist dann gegeben durch die Gleichung

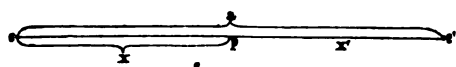
$$Y = R \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x + D}{\lambda} \right).$$

§ 129.

Interferenz von Wellen, die sich in entgegengesetzter Richtung fortpflanzen; Bildung stehender Wellen. Wenn in einer unbegrenzten Punktreihe an einer Stelle eine schwingende Bewegung erregt wird, so pflanzt dieselbe sich nach beiden Seiten fort. Wenn deshalb an zwei Stellen der Ausgangspunkt einer solchen Bewegung vorhanden ist, so pflanzen sich zwischen diesen beiden Stellen die Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen fort. Die im vorigen Paragraphen entwickelten Interferenzgesetze geben uns auch für diesen Fall die resultierende Bewegung als Summe der in jedem Augenblicke vorhandenen Teilbewegung. Es ergibt sich daraus in gewissen Fällen eine Bewegung dieser Strecke der Punktreihe von besonderer Art, deren Beschaffenheit wir hier ableiten wollen, da wir sie später sehr oft zu betrachten haben. Wir nehmen deshalb hier nur den einfachsten Fall.

Es seien c und c' zwei um a von einander entfernte Punkte, in den gleichzeitig eine schwingende Bewegung derselben Schwingungsdauer somit auch derselben Wellenlänge λ und der gleichen Amplitude α beginne. Zur Zeit t wird der Abstand eines von c um entfernten Punktes p von der Gleichgewichtslage gegeben durch

Fig. 206.



$$y_1 = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Infolge der von c' nach p kommenden Bewegung wird der Abstand Punktes von der Gleichgewichtslage, y_2 , gegeben sein durch

$$y_2 = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda} \right),$$

wenn wir den Abstand $\overline{pc'} = x'$ setzen. Für alle Punkte zwischen c und c' ist nun

$$x + x' = a, \quad x' = a - x,$$

somit

$$y_2 = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a-x}{\lambda} \right).$$

Der resultierende Abstand ist somit

$$y = y_1 + y_2 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a-x}{\lambda} \right)$$

Nach der bekannten trigonometrischen Formel

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{1}{2}(p+q) \cos \frac{1}{2}(p-q)$$

können wir schreiben

$$y = 2\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda} \right) \cdot \cos \pi \frac{a-2x}{\lambda}$$

oder auch, da das Vorzeichen des Cosinus nicht mit demjenigen des Bc sich ändert,

$$y = 2 \cos \pi \frac{2x-a}{\lambda} \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{a}{2\lambda} \right).$$

In diesem Ausdrucke für y ist x nicht mehr in der frühern Weise verbunden; es hängt deshalb die Phase der Bewegung nicht mehr, wie der nach einer Richtung fortschreitenden Bewegung von der Lage der Punkte in der Reihe ab. Die für die verschiedenen Punkte zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Bewegungszustände hängen von dem die Zeit enthaltenden Faktor in der Gleichung für y ab, dieser ist aber für alle Werte von x gleiche. Die neben einander liegenden Punkte der Reihe nehmen also nicht nach und nach dieselbe Phase an, sondern ihre Phase ist in derselben dieselbe, sie passieren alle zu derselben Zeit die Gleichgewichtslage und finden sich ebenso alle gleichzeitig an dem Ende ihrer Bahn.

Der Koeffizient

$$2\alpha \cdot \cos \pi \frac{2x-a}{\lambda}$$

bestimmt die Amplitude der Bewegung; er zeigt, daß diese für die verschiedenen Punkte sehr verschieden sein kann. Für gewisse Werte von x ist dieser Koeffizient gleich Null, diese Punkte verlassen also ihre Gleichgewichtslage niemals. An der einen Seite der ruhenden Punkte ist der Wert dieses Faktors positiv, an der andern negativ; die ruhenden Punkte bilden also die Grenze zwischen solchen Strecken der Punktreihe, in deren einer die Punkte alle an der einen, in deren anderer die Punkte an der andern Seite der Gleichgewichtslage sich befinden. Die Punkte jeder zwischen zwei ruhenden Punkten liegenden Strecke sind also immer in derselben Phase, die Punkte zweier benachbarter Strecken in entgegengesetzter Phase. Die Punkte einer Strecke vollführen somit gleichzeitig und in gleicher Phase ihre Schwingungen mit um so kleinerer Amplitude, je näher sie den ruhenden Punkten liegen. Man nennt deshalb die schwingende Bewegung eine stehende und die zwischen zwei ruhenden Punkten enthaltene Strecke eine stehende Welle.

Um den Zustand der Reihe näher zu untersuchen, nehmen wir an, es sei

$$a = n\lambda.$$

Es wird dann

$$y = 2\alpha \cos \pi \left(\frac{2x}{\lambda} - n \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{n}{2} \right)$$

oder

$$y = 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda} \sin 2\pi \frac{t}{T}.$$

Für die Zeiten $t = nT$ und ebenso für die Zeiten $t = (2n + 1) \frac{T}{2}$ wird dieser Ausdruck für alle Punkte gleich Null, es passieren also die Punkte in diesem Momente die Gleichgewichtslage. Die Geschwindigkeit der Bewegung ist

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda} \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

mit für den Moment $t = nT$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2\pi}{T} 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda};$$

derselbe ist für alle Punkte, die zwischen $x = 0$ und $x = \frac{\lambda}{4}$ liegen, positiv, zwischen $x = \frac{\lambda}{4}$ und $x = 3 \frac{\lambda}{4}$ negativ, zwischen $x = 3 \frac{\lambda}{4}$ und $x = 5 \frac{\lambda}{4}$ positiv u. s. f. Auf der ersten Strecke bewegen sich die Punkte nach außen, auf der zweiten nach der andern Seite; für die Punkte $x = \frac{\lambda}{4}, 5 \frac{\lambda}{4} \dots$; die um eine halbe Wellenlänge von einander entfernt sind, ist die Geschwindigkeit gleich 0, sie verlassen die Gleichgewichtslage nicht. sind dies somit die stets ruhenden Punkte, deren Abstand von einander nach eine halbe Wellenlänge ist.

Wächst die Zeit t , so entfernen sich alle Punkte von der Gleichgewichtslage und sie haben zur Zeit $t = (4n + 1) \frac{T}{4}$ den größten Abstand

von der Gleichgewichtslage erreicht. Für diese Zeit ist

$$y = 2\alpha \cos \pi \frac{2x}{\lambda},$$

somit für

$$x = 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{4}, 4\frac{\lambda}{4}, 5\frac{\lambda}{4} \dots$$

$$y = 2\alpha, 0, -2\alpha, 0, +2\alpha, 0 \dots$$

Also auch hier sehen wir wieder, daß die Länge einer stehenden Welle eine halbe Wellenlänge ist.

Wächst die Zeit, so kehren alle Punkte zur Gleichgewichtslage zurück, erreichen sie zur Zeit $(2n+1)\frac{T}{2}$, überschreiten sie nach der andern Seite hin und erreichen dort ihre äußerste Lage zur Zeit $t = (4n+3)\frac{T}{4}$, denn dann ist

$$\sin 2\pi \frac{t}{T} = \sin (4n+3) \frac{\pi}{2} = -1.$$

Die Abstände y werden somit für

$$x = 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{4}, \lambda, 5\frac{\lambda}{4} \dots$$

$$y = -2\alpha, 0, 2\alpha, 0, -2\alpha, 0 \dots$$

Die Punkte der Reihe, welche sich immerfort in der Gleichgewichtslage befinden, nennt man die Schwingungsknoten, und es ist ersichtlich, daß diese deshalb immer in Ruhe sind, weil stets gleichzeitig durch sie nach entgegengesetzten Richtungen ein Wellenberg und ein Wellenthal hindurchgeht. Die mitten zwischen den Schwingungsknoten liegenden Punkte sind Schwingungsmaxima, dort treffen immer gleichzeitig zwei Wellenberge oder Thäler zusammen. Die Gestalt der Punktreihe ist demnach (Fig. 207) zur Zeit $t = 2n\frac{T}{2}$

Fig. 207.



eine gerade Linie MN , zur Zeit $t = (4n+1)\frac{T}{4}$, wenn wir annehmen, daß die Bewegung eine transversale sei, die punktierte Wellenlinie $M'N'$, zur Zeit $(2n+1)\frac{T}{2}$ wieder die gerade Linie MN , und zur Zeit $t = (4n+3)\frac{T}{4}$ die ausgezogene Wellenlinie $M''N''$.

Durch die Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung fortschreitender Wellenbewegungen teilt sich die Punktreihe in lauter Strecken von der Länge einer halben Wellenlänge, in deren jeder alle Punkte in derselben Phase der Oscillation sind, von denen aber die Punkte der abwechselnden Strecken in entgegengesetzter Phase der Bewegung sich befinden. Die Schwingungsdauer einer solchen stehenden Schwingung ist gleich der Oscillationsdauer der beiden Wellenbewegungen, deren Resultierende die stehende Schwingung darstellt.

§ 130.

Zusammensetzung mehrerer Wellenbewegungen, deren Schwingungen nicht gleich gerichtet sind; elliptische Schwingungen. Wir sehen im Bisherigen den besondern Fall der Zusammensetzung der Wellenbewegungen betrachtet, in dem die Vibrationen alle gleich gerichtet sind. können nun ebenso gut in einer Punktreihe sich zwei Bewegungen pflanzen, deren Richtungen nicht zusammenfallen, eine Wellenbewegung longitudinaler Schwingungen und eine transversaler Schwingungen, oder sei zur Fortpflanzungsrichtung der Bewegung senkrechte Schwingungen, welche jedoch irgend einen Winkel mit einander bilden.

Wie wir im § 128 sahen, erhalten wir in diesem Falle die aus dem Zusammenwirken der beiden Bewegungen resultierende Kraft durch den Satz vom Parallelogramm der Kräfte; in jedem Augenblicke wird uns die Resultante des aus den beschleunigenden Kräften der Teilbewegungen konstruierten Parallelogramms der Größe und Richtung nach die resultierende Kraft geben und somit die Geschwindigkeit und die Bahn des bewegten Punktes.

Nehmen wir an, daß die beiden Wellenbewegungen gleiche Oscillationsdauer und somit gleiche Wellenlängen besitzen, so muß die resultierende Bewegung ebenfalls die gleiche Oscillationsdauer haben; die Bahn, welche die Punkte beschreiben, kann aber weder mit der einen noch mit der andern Bewegung zusammenfallen, sie muß jedoch notwendig in die Ebene fallen, welche durch die Richtung der Bewegungen in den einzelnen Wellen gelegt wird. Um die Gestalt der Bahn zu erhalten, wird es am bequemsten sein, von dem mathematischen Ausdrucke für die Bewegung des Punktes infolge jeder einzelnen Bewegung auszugehen und das resultierende Resultat dann näher zu betrachten.

Zugleich ist klar, daß wir die Bahn nur eines Punktes zu bestimmen brauchen, und daß diejenigen aller übrigen Punkte der Reihe damit übereinstimmen. Denn da der Voraussetzung nach jede der Teilbewegungen sich mit gleicher Geschwindigkeit in der Punktreihe fortpflanzt, so sind die Bahnen aller Punkte dieselben.

Nennen wir den Abstand eines Punktes der Reihe, welcher vom Anfangspunkte der Bewegung um x entfernt ist, von seiner Gleichgewichtslage zur Zeit t , y , so haben wir

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (1).$$

Infolge der zweiten Bewegung, wenn sie allein wirkte, würde der Punkt in einer andern Richtung sich von der Gleichgewichtslage entfernen, der Abstand von der Gleichgewichtslage zur Zeit t gleich z ; nehmen wir ferner an, der Anfangspunkt dieser Bewegung sei von dem der ersten um a entfernt, die Bewegung habe aber auch dort im Anfange der Zeit t begonnen, so haben wir für z den Ausdruck

$$z = \beta \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x-a}{\lambda} \right) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

Entwickeln wir aus diesen beiden Ausdrücken für y und z , so gibt uns die

gehörigen Abstände in der einen und in der andern Richtung, oder den Ort des Punktes in jedem Augenblicke, wenn wir den Abstand des Punktes nach der einen Richtung aus einer der obigen Gleichungen bestimmen. Diese Gleichung gibt uns somit die Bahn des bewegten Punktes.

Aus den beiden obigen Gleichungen erhalten wir unmittelbar die beiden folgenden

$$\frac{y}{\alpha} = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

$$\frac{z}{\beta} = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} + \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \quad (4)$$

Multiplizieren wir die Gleichung (3) mit $\cos 2\pi \frac{a}{\lambda}$, so wird

$$\frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

und subtrahieren wir jetzt die Gleichung (5) von (4), so erhalten wir

$$\frac{z}{\beta} - \frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} \quad . \quad . \quad (6)$$

Quadrieren wir die Gleichung (6) und addieren zugleich

$$\left(\frac{y}{\alpha} \right)^2 \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda},$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{z}{\beta} \right)^2 + \left(\frac{y}{\alpha} \right)^2 \left\{ \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} + \cos^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \right\} - 2 \frac{z}{\beta} \cdot \frac{y}{\alpha} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \\ = \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \left\{ \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\}. \end{aligned}$$

oder

$$\left(\frac{y}{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{z}{\beta} \right)^2 - 2 \frac{y}{\alpha} \cdot \frac{z}{\beta} \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda} \quad . \quad . \quad (7)$$

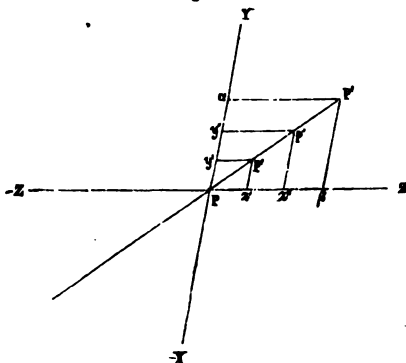
Die Gleichung (7) gibt uns den Abstand des Punktes von der Gleichgewichtslage parallel der Richtung der ersten Bewegung für jeden Wert, den der Abstand des Punktes parallel der zweiten Bewegung erhalten kann. Die analytische Geometrie zeigt, daß alle Punkte, deren zusammengehörige Abstände parallel zweien festen Richtungen, von einem festen Punkte durch die Gleichung (7) dargestellt werden, auf einer bestimmten krummen Linie, der Ellipse liegen, deren Mittelpunkt eben jener feste Punkt ist, von welchem die Abstände y und z gerechnet sind. Wenn sich zwei Wellenbewegungen in einer Punktreihe fortpflanzen, in denen die Schwingungen verschieden gerichtet sind, so bewegen sich demnach die Punkte in Ellipsen um ihre Gleichgewichtslage.

In unseren Ausdruck (7) für die Bahn der Punkte geht auch die Phasendifferenz ein, und je nach dem verschiedenen Werte von a kann die Beziehung zwischen y und z immer eine andere werden; man erhält je nach

erte von a für ein bestimmtes z einen immer andern Wert von y . erfüllen alle diese Werte die Bedingung, daß sie einer Gleichung r Form (7) genügen, die Bahnen der Punkte sind daher immer 1, aber die Lage und Gestalt der Ellipsen ist je nach dem Werte eine andere. Untersuchen wir die Gestalt der Ellipsen für einige von a .

setzen wir voraus, daß die Schwingungsrichtungen einen Winkel φ nander bilden, und daß die g der positiven Abstände z 08) des Punktes P , der um x m Anfangspunkte der Bewe- atfernt ist, von der Ruhelage, echts hin, und die Richtung itiven y nach oben gerechnet d. h. daß die Bewegung in : Phase in beiden Teilbewe- ist, wenn der Punkt sich zu- nach rechts und oben, in ent- setzter, wenn er sich zu- nach rechts und unten bewegt. Phasendifferenz der beiden ierenden Bewegungen gleich 0, er geraden Anzahl von halben Wellenlängen, so ist

Fig. 208.



$$\cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = 1; \quad \sin 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0,$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{2yz}{\alpha\beta} + \frac{z^2}{\beta^2} = 0,$$

$$\frac{y}{a} - \frac{z}{\beta} = 0,$$

$$\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

in diesem Falle stehen also stets die zusammengehörigen Werte von z in dem konstanten Verhältnisse der Amplituden $\alpha : \beta$. Bestimmen nun die den Zeiten t, t', T entsprechenden Abstände z', z'', β und von z', z'', β mit Py parallel $z'p', z''p'', \beta P'$ so, daß

$$z'p' : z'P = z''p'' : z''P = \beta P' : \beta P = \alpha : \beta,$$

die Längen $z'p', z''p''$ etc. die zu diesen Werten von z gehören von y , und die Punkte p', p'', P gehören der Bahn des Punktes aus der Lehre von der Ähnlichkeit der Dreiecke folgt aber, daß die P, p', p'', P' auf einer geraden Linie liegen; die Bahn des Punktes nun eine gerade Linie, welche durch die Gleichgewichtslage des $s P$ geht, deren Richtung zwischen die Richtungen der Teilbe- gen fällt.

für die Amplitude PP' der resultierenden Bewegung erhalten wir em Satze vom Parallelogramm der Kräfte

$$PP' = \sqrt{P\beta^2 + P'\beta^2 - 2P\beta \cdot P'\beta \cdot \cos P\beta P},$$

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \cdot \cos \varphi};$$

für den Winkel, welchen die Bahn des Punktes mit z bildet, wenn wir ihn mit ψ bezeichnen, erhalten wir aus der Proportion

$$PP' : P\beta = \sin P\beta P' : \sin PP'\beta,$$

$$\sin \psi = \frac{a}{A} \cdot \sin \varphi.$$

Größe und Richtung der resultierenden Amplitude hängt somit von der Größe der Teilamplituden ab und von dem Winkel, welchen die Teilbewegungen mit einander bilden. Die resultierende Amplitude erhält den größten Wert für $\varphi = 0$

$$A = \alpha + \beta.$$

Die Bewegungsrichtung aller drei Bewegungen ist dieselbe, und die resultierende Amplitude ist die Summe der Teilamplituden.

Wir hätten in diesem Falle, um die Bahn des Punktes zu erkennen, nicht nötig gehabt, die Gleichung (7) zu entwickeln, da dieses Resultat sich unmittelbar aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt, denn ist $a = 0$, oder $2n \cdot \frac{\lambda}{2}$, so wird

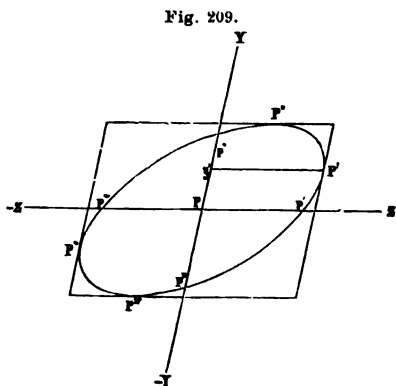
$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

$$z = \beta \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

und daraus

$$\frac{y}{z} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Ist die Phasendifferenz nicht gleich Null, oder ein gerades Vielfaches



einer halben Wellenlänge, so wird die Bahn des Punktes eine Ellipse. Die Bewegungen beginnen dann zu verschiedenen Zeiten, und wachsen nicht wie im vorigen Falle gleichmäßig; bald nimmt y rascher, bald z rascher zu, ja es kann y selbst abnehmen, wenn z wächst. Ist a kleiner als $\frac{1}{2}\lambda$, so hat (Fig. 209) der Punkt P bereits einen Teil seines Weges in der Richtung der z zurückgelegt, wenn die Bewegung nach y beginnt, er befindet sich in p' , denn ist $y = 0$,

so gibt Gleichung (2) oder Gleichung (7)

$$z = \beta \cdot \sin 2\pi \frac{a}{\lambda}$$

und ist a z. B. $= \frac{3}{16}\lambda$, so wird

$$z = \beta \cdot \sin 67^{\circ},5 = 0,923 \beta.$$

Während jetzt der Punkt in der Richtung nach z den letzten Teil seines Weges zurücklegt, bewegt er sich aber schon in der Richtung y ,

beschreibt daher den Weg $p'P'$. Er ist in P' angekommen, hat also in der Richtung z seinen größten Abstand erreicht, wenn nach Gleichung (7)

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + 1 - 2 \frac{y}{\alpha} \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = \sin^2 2\pi \frac{a}{\lambda},$$

$$\frac{y^2}{\alpha^2} - 2 \frac{y}{\alpha} \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} + \cos^2 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0,$$

$$y = y' = \alpha \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda},$$

so bei dem von uns angenommenen Werte $a = \frac{1}{16} \lambda$, $y = \alpha \cdot \cos 67^{\circ}5'$, der gleich $0,382 \alpha$ ist. Während dann der Punkt in der Richtung der y weiter von der Gleichgewichtslage entfernt, kehrt er in der Richtung z von wieder zurück, er beschreibt den Weg $P'P''$ und ist in P'' angelangt, $y = \alpha$ wird, wenn sich der Punkt in der Richtung der z schon wieder auf

$$z = \beta \cdot \cos 2\pi \frac{a}{\lambda} = 0,382 \beta$$

im Anfangspunkte genähert hat.

Von da ab nehmen y und z gleichzeitig ab, z aber, da der Punkt in dieser Richtung der Ruhelage näher ist, rascher als y ; der Punkt bewegt sich, bis $z = 0$ wird, nach p'' , wo $y = 0,923 \alpha$ ist. Weiter bewegt sich der Punkt dann in der Richtung der z nach der negativen Seite bis p''' , während der Abstand y bis zur 0 abnimmt u. s. f., so daß der Punkt sich über p''' , P''' , P^{IV} , p^{IV} wieder nach p' bewegt, wenn y wieder gleich 0 worden ist. Dauern die Impulse nach beiden Richtungen fort, so legt der Punkt in der folgenden Zeit dieselbe Bahn zurück, die, wie Gleichung (7) zeigt, eine Ellipse ist.

Ist $a = \frac{1}{4} \lambda$, so befindet sich der bewegte Punkt nach der Richtung z in seinem äußersten Abstand von der Gleichgewichtslage und beginnt eine zurückgehende Bewegung, wenn er in der Richtung der y seine Bewegung beginnt. Während er dann in der Richtung der z zur Ruhelage zurückkehrt, erreicht er nach y seinen größten Abstand oder für $z = 0$ $y = \alpha$. Wird dann $z = -\beta$, so wird $y = 0$, und wird z wiederum 0, wird $y = -\alpha$, so daß also die zusammengehörigen Werte von y und z für diese vier Stellungen sind

$$y = 0, y = \alpha, y = 0, y = -\alpha, y = 0$$

$$z = \beta, z = 0, z = -\beta, z = 0, z = \beta.$$

Die Ellipse geht demnach in diesem Falle durch die Endpunkte der Amplituden, ihre Lage und Gestalt ist anders als in dem vorigen Falle, wo die Bewegung des Punktes erfolgt in demselben Sinne wie vorher. Es geht dies auch aus der Form hervor, welche die Gleichung der Bahn annimmt,

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1.$$

Die Schwingungsrichtungen bestimmen dann ein Paar konjugierte Durchmesser der Ellipse.

Wenn im besondern in diesem Falle die beiden Amplituden

und die Bewegungsrichtungen zu einander senkrecht sind, so wird die Bahn des Punktes ein Kreis. Denn in dem Falle wird unsere Gleichung der

$$\frac{y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^2} = 1,$$

$$y^2 + z^2 = \alpha^2.$$

Da nun die beiden Richtungen x und y zu einander senkrecht sind, bedeutet α den Abstand des Punktes von dem festen Punkte, von dem die Richtungen y und z gerechnet sind.

Die Punkte der Bahn liegen also alle auf einer Linie, die dadurch stimmt ist, daß der Abstand aller ihrer Punkte von einem festen Punkte eine konstante GröÙe und zwar gleich α ist; das ist aber bekanntliche Eigenschaft des Kreises.

Die Gleichungen (1) und (2) geben auch dieses unmittelbar, daß die Gleichung (7) zu Hülfe genommen wird, denn wenn $\alpha = \frac{1}{2} \lambda$ werden sie

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$z = \alpha \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

und daraus

$$y^2 + z^2 = \alpha^2.$$

Wenn die Phasendifferenz größer ist, ist die Bahn, bis $a = \frac{1}{2} \lambda$ wird, wieder in allen Fällen eine Ellipse, deren Lage und Gestalt le nach dem Bisherigen zu erhalten ist.

Ist $a = \frac{1}{2} \lambda$ geworden, so liefern die Gleichungen (1) und (2) (7) als zusammengehörige Werte y und z

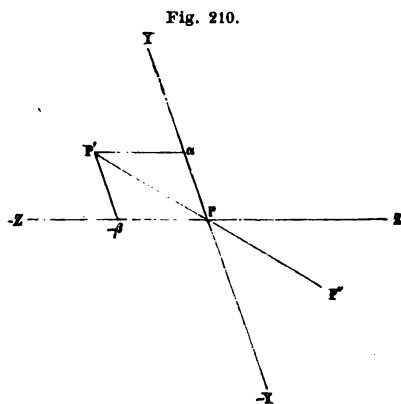
$$y = -\frac{\alpha}{\beta} z.$$

Die Gestalt der Bahn ist wieder eine gerade Linie, welche doch anders liegt, wie in dem Falle wo $a=0$ war. Sie liegt jetzt (Fig. 2 in dem Winkel, den die Richtung der negativen z mit derjenigen positiven y bildet. Denn jetzt gerinnt der Punkt P zugleich sich in der Richtung der negativen z und positiven y zu bewegen, und zwar

$$\frac{y}{\alpha} = -\frac{z}{\beta}$$

ist; er bewegt sich demnach von P nach P' , dann über P nach P'' u. in der Linie $P' P''$ hin und her, so lange die beiden Impulse dauern.

Bei einem noch größern Werte von a geht die Bahn wieder in Ellipse über, in welcher jedoch der Punkt jetzt sich in entgegengesetzter



daß immer

htung bewegt als vorher. Betrachten wir den Fall, wo $a = \frac{1}{4} \lambda$ ist. Dann der Punkt P (Fig. 211) seine Bewegung nach der Richtung y be-
nnt, wenn also

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) = 0,$$

$$z = \beta \cdot \sin \frac{1}{4} \pi = -0,923 \beta.$$

er Punkt P befindet sich in p' .

Während nun z bis $-\beta$ wächst, bewegt sich der Punkt zugleich in
r Richtung der positiven y , bis

$$= -\alpha \cdot \cos \frac{1}{4} \pi = 0,382 \alpha$$

Der Punkt bewegt sich von p'
ch P' .

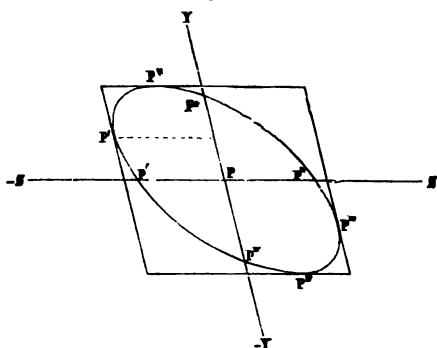
Während sich dann weiter der
stand y vergrößert, nähert sich
r Punkt in der Richtung z wieder
r Ruhelage. Ist $y = \alpha$, so ist
 $= \beta \cdot \cos \frac{1}{4} \pi = -0,382 \beta$, der
unkt befindet sich in P'' , hat also den
eg $P'P''$ durchlaufen. Im weiteren
rlaufe nähert sich der Punkt an-
gs sowohl in der Richtung der y als z der Gleichgewichtslage, bis er in p''
. Dann entfernt er sich in der Richtung der positiven z , während er sich in
r Richtung y dem Ausgangspunkte der Bewegung noch nähert; er bewegt
h nach p''' , P''' u. s. f., so daß der Punkt die Bahnellipse in der Richtung
, P' , P'' , P''' durchläuft, also in entgegengesetzter Richtung wie Fig. 209,
die Phasendifferenz gleich $\frac{3}{4} \lambda$ war.

Zwischen der Phasendifferenz $\frac{1}{2} \lambda$ und λ durchläuft der Punkt die je-
malige Bahnellipse, die nach Lage und Gestalt für jeden Wert von a
rschieden ist, immer in der zuletzt betrachteten Richtung. Die Gestalt
r Ellipse nimmt dabei dieselben Änderungen an, wie in der vorhin be-
achteten Periode der Phasendifferenzen, sie wird anfangs bis $a = \frac{3}{4} \lambda$ ge-
flatter und von da ab bis $a = \lambda$ wieder flacher, bis sie für den letzten
ert der Phasendifferenz wieder eine gerade Linie wird, welche ebenso
gt, wie in dem Falle, wo $a = 0$ war.

Im Falle also die komponierenden Bewegungen gleiche Perioden haben,
nd die Bahnen der einzelnen Punkte der Reihe Ellipsen, und zwar für
le Punkte dieselben Ellipsen. Die Verschiedenheit in den gleichzeitigen
wegungszuständen der einzelnen Punkte der Reihe besteht darin, daß
an verschiedenen Punkten der Ellipse sich befinden und dort mit ver-
chiedener Geschwindigkeit sich bewegen.

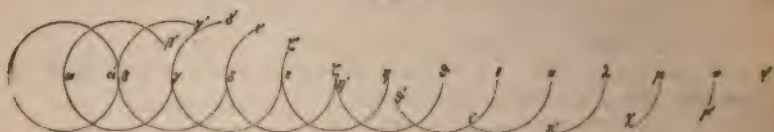
Die Gestalt, welche die Punktreihe infolge der Bewegung der Punkte
nimmt, ist verschieden je nach der Richtung, in der die komponierenden
bewegungen erfolgen. Ist die eine Bewegung longitudinal, die andere
nsversal, so beschreiben die Punkte Ellipsen, deren Ebenen die Richtung,
der die Bewegung sich fortpflanzt, in sich aufnehmen. Die Punkte

Fig. 211.



wird also eine ähnliche Gestalt haben, wie bei einer transversalen Wellenbewegung. Sei z. B. eine Punktreihe zugleich in longitudinale und transversale Schwingungen versetzt; die longitudinale Bewegung sei der transversalen um ein viertel Wellenlänge voraus und die Amplituden haben gleiche Größe, so stellt Fig. 212 die gegenseitige Lage der Punkte in einer

Fig. 212.



Wellenlänge dar. $\alpha, \beta, \gamma \dots \nu$ ist die Lage der Punkte in der Ruhelage. Der Punkt α ist im Begriffe, eine neue Bewegung in transversaler Richtung zu beginnen, in longitudinaler hat er das erste Viertel seiner Oscillation zurückgelegt; er befindet sich in α' . Der Punkt δ hat in longitudinaler Richtung gerade eine Oscillation vollendet, dagegen befindet er sich in transversaler erst am Ende des dritten Viertels einer Oscillation, in seinem größten Abstände nach negativer Richtung. Für den Punkt η' ist, um unsere vorige Bezeichnung beizubehalten, $y = 0, z = -\beta$, für κ ist $y = \alpha, z = 0$ und für ν wieder $y = 0$ und $z = \beta$. Die einzelnen Kreisbögen zeigen die Bahnen der Punkte an, welche von $t = \frac{1}{4} T$ an, in welchen Momente die transversale Bewegung der Punkte ihren Anfang nahm, durchlaufen sind.

Sind beide Bewegungen transversal, so stehen die Ebenen der elliptischen Bahnen auf der Fortpflanzungsrichtung senkrecht, die Reihenfolge der Bahnebenen bildet einen elliptischen Cylinder, dessen Axe die Punktreihe in der Ruhelage ist. Eine auf dem Cylinder gezogene Schraubenlinie, deren Höhe gleich ist der Länge der Welle, nimmt, wie man leicht übersieht, die Punkte in den verschiedenen Phasen auf.

§ 131.

Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge. Wir haben im Bisherigen die Zusammensetzung der Schwingungen in ihrem einfachsten Falle betrachtet, unter der Voraussetzung nämlich, daß die Schwingungen sämtlich dieselbe Periode, dieselbe Schwingungsdauer und somit auch dieselbe Wellenlänge haben. Es fragt sich nun, ob sich in einer Punktreihe gleichzeitig Schwingungen fortpflanzen und zu einer resultierenden Schwingung zusammensetzen können, welche eine verschiedene Schwingungsdauer besitzen, und welches die resultierende Bewegung dann sein wird.

Die Möglichkeit der gleichzeitigen Fortpflanzung von Bewegungen verschiedener Periode ergibt sich unmittelbar aus unserer Ableitung der schwingenden Bewegung in einer Punktreihe im § 126. Wir fanden dort, daß die Beschleunigung eines Punktes in dem Abstände x von dem Ausgangspunkte der Bewegung gegeben ist durch die Gleichung

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \frac{d^2 y}{dx^2},$$

in c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung in der Reihe leitet.

Es können demnach alle die schwingenden Bewegungen in der Punkte gleichzeitig bestehen und sich ausbreiten, welche diesem Beschleunigungssatze entsprechen.

Wenn wir voraussetzen, daß in dem Ausgangspunkte der Bewegung, o für $x = 0$, dieselbe gegeben sei durch

$$y = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

erkannten wir, daß obige Gleichung für die fortgepflanzte Bewegung, o für die eines Punktes, der um x vom Anfangspunkt entfernt ist, auf Gleichung führt

$$y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Setzen wir dagegen jetzt voraus, daß der Ausgangspunkt eine ganze Reihe von Impulsen erhalte von verschiedener Periode, so ist seine Bewegung gegeben durch die Summe

$$Y = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T_1} + 2b \sin 2\pi \frac{t + \tau_2}{T_2} + \dots + 2p \sin 2\pi \frac{t + \tau_n}{T_n},$$

in $T_1, T_2 \dots T_n$ die Schwingungsdauern der verschiedenen Bewegungen und $\tau_2 \dots \tau_n$ die Zeiten bedeuten, um welche die zweite, dritte, n te Bewegung später oder früher beginnt als die erste. Wir werden im nächsten Kapitel zeigen, wie wir imstande sind, dem Ausgangspunkte der Bewegung eine solche zusammengesetzte Bewegung zu erteilen.

Hat der Ausgangspunkt, für den $x = 0$ ist, diese Bewegung, so erhält sich ganz in derselben Weise wie für die einfache Schwingung, daß die Bewegung eines um x von dem Ausgangspunkte entfernten Punktes die Bewegung haben muß

$$= a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1} - \frac{x}{\lambda_1} \right) + b \sin 2\pi \left(\frac{t + \tau_2}{T_2} - \frac{x}{\lambda_2} \right) + \dots + p \sin 2\pi \left(\frac{t + \tau_n}{T_n} - \frac{x}{\lambda_n} \right),$$

man wir mit $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ die Wellenlängen der einzelnen Bewegungen bezeichnen, also setzen

$$\lambda_1 = cT_1, \quad \lambda_2 = cT_2 \dots \lambda_n = c \cdot T_n.$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung für die resultierende Bewegung läßt sich auch sehr leicht noch nachträglich zeigen, indem man aus derselben der schon mehrfach durchgeführten Weise die Quotienten $\frac{dv}{dt}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$ rechnet, man findet, daß aus derselben sich ergibt

$$\frac{dv}{dt} = c^2 \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Schon die Form der Gleichung für die aus dem Zusammenwirken mehrerer Schwingungen verschiedener Periode resultierende Bewegung gibt erkennen, daß dieselbe keine einfach periodische ist, bei der das Begleiche sich ebenso weit und ebenso lange an der einen Seite der

gewichtslage bewegt, als an der andern. Denn es läßt sich kein Wert von T und λ angeben, der für alle Werte von t und x den Abstand Y durch eine einfache Gleichung von der Form

$$Y = A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

mit einem von x und t unabhängigen Werte der Amplitude A wiedergeben ließe. Die Bewegung ist vielmehr eine zusammengesetzt periodische, indem jeder Punkt, während der durch das erste Glied der den Wert von Y gebenden Summe dargestellten hin und her gehenden Bewegung noch nach anderen Perioden bewegt wird. Infolge dessen bewegt sich der Punkt bald rascher bald langsamer nach der einen Seite als nach der andern, bald ist die Amplitude nach der einen Seite größer bald kleiner als nach der andern, je nach der GröÙe der Perioden und der Amplituden der komponierenden Schwingungen. Ein allgemeines Gesetz dieser komplizierten periodischen Bewegungen läßt sich außer dem angegebenen nicht aufstellen; wir wollen nur, um ein Bild derselben zu bekommen, einige Fälle derselben betrachten, und zwar den einfachsten Fall, daß sich zwei Wellen in der Punktreihe fortpflanzen, deren Schwingungsdauern und Wellenlängen sich wie 1 : 2 verhalten. In dem Falle wird, wenn wir die größere der beiden Schwingungsdauern mit T und die größere Wellenlänge mit λ bezeichnen, und gleichzeitig $\tau = 0$ setzen, also annehmen, beide Bewegungen begönnen zu gleicher Zeit, der Ausdruck für Y

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + b \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x}{\frac{1}{2}\lambda} \right)$$

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + b \cdot \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Entwickeln wir die beiden Sinus, so wird

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{x}{\lambda} - a \cdot \cos 2\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \\ + b \cdot \sin 4\pi \frac{t}{T} \cdot \cos 4\pi \frac{x}{\lambda} - b \cdot \cos 4\pi \frac{t}{T} \cdot \sin 4\pi \frac{x}{\lambda},$$

und fixieren wir den Moment, in welchem $t = nT$ ist, somit $\sin 2n\pi = \sin 4n\pi = 0$, $\cos 2n\pi = \cos 4n\pi = 1$, so erhalten wir

$$Y = -a \cdot \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} - b \cdot \sin 4\pi \frac{x}{\lambda}.$$

Hiermit werden dann die Werte von Y für

$x = \frac{1}{8} \lambda \dots$	$Y = -a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{2}{8} \lambda \dots$	$-a \quad \pm 0$
$\frac{3}{8} \lambda \dots$	$-a \sqrt{\frac{1}{2}} + b$
$\frac{4}{8} \lambda \dots$	$\pm 0 \quad \pm 0$
$\frac{5}{8} \lambda \dots$	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{6}{8} \lambda \dots$	$+a \quad \pm 0$
$\frac{7}{8} \lambda \dots$	$+a \sqrt{\frac{1}{2}} + b$
$\frac{8}{8} \lambda \dots$	$\pm 0 \quad \pm 0.$

Fig. 213 zeigt die Wellenform, welche diesen Werten von Y entspricht, und zwar für $b = 2a$; $b = a$; $b = \frac{1}{2}a$.

Die punktierten Linien deuten die einzelnen Wellen an, die ausogenen geben die resultierenden Wellen. Die Figuren zeigen, daß die Bewegung eine doppelperiodische ist, und daß je nach dem Verhältnis der Amplituden die Art der Bewegung eine sehr verschiedene sein kann. Man kann sie im allgemeinen dahin charakterisieren, daß die Bewegung mit der ersten Amplitude der resultierenden Bewegung ihre Periode als charakteristisch ausdrückt, und daß dann durch die übrigen Bewegungen innerhalb dieser Periode wieder periodische Verschiedenheiten auftreten. So wird die Welle (Fig. 213a) als eine solche von der Periode $\frac{\lambda}{2}$ betrachtet, welcher durch die zweite Bewegung innerhalb $2 \cdot \frac{\lambda}{2}$ jedesmal der erste Wellenberg und das letzte Wellenthal verstärkt erscheinen, während die

Fig. 213a.

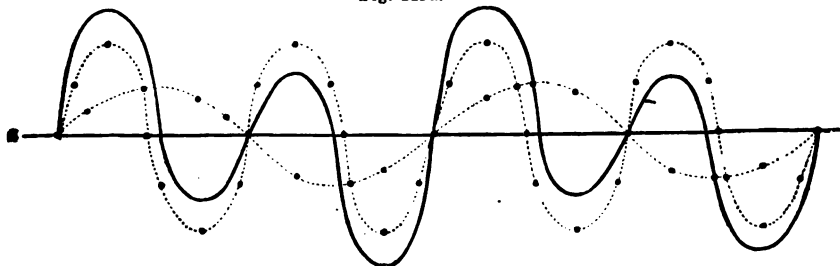


Fig. 213b.

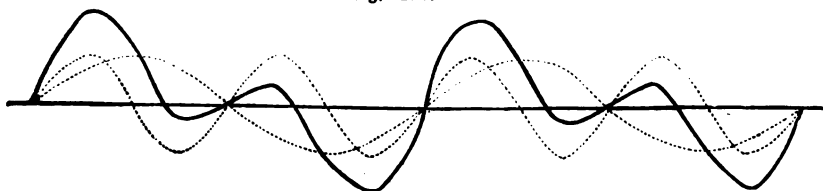
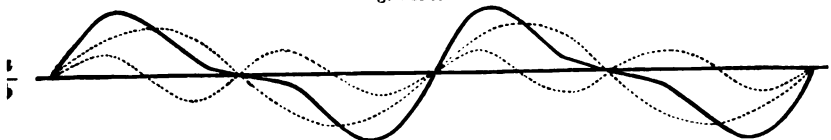


Fig. 213c.



le (Fig. 213c) entschieden als schwingende Bewegung von der Periode λ erscheint, welche von der einfachen Schwingung sich dadurch unterscheidet, daß der schwingende Punkt mit großer Geschwindigkeit sich nach positiven Seite von seiner Gleichgewichtslage entfernt, dann aber sehr langsamer sich derselben wieder nähert und sich über dieselbe hinaus zu seinem größten Abstände an der negativen Seite bewegt.

In derselben Weise setzen sich die Bewegungen zusammen, wenn die komponierenden Wellen in weniger einfachem Verhältnis stehen; in jedem Falle kann man in der angegebenen Weise die resultierende Bewegung charakterisieren.

Mit einer Verschiebung der Phase der einen der komponierenden Wellen ändert sich die resultierende Welle ebenfalls, wenn auch im übrigen komponierenden Bewegungen ganz ungeändert bleiben. Die oben für resultierende Bewegung hingeschriebene Gleichung läßt das auch sofort kennen; wird die zweite Bewegung um ein viertel Wellenlänge verschoben, so wird der Ausdruck für Y

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + b \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{\frac{1}{2}T} - \frac{x}{\frac{1}{2}\lambda} - \frac{1}{4} \right) \\ = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - b \cdot \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

wird die zweite Bewegung um eine halbe Wellenlänge verschoben, so

$$Y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) - b \cdot \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Darnach sind die Werte von Y für diese beiden Fälle folgende, wir wieder den Moment $t = nT$ fixieren,

	Phasendifferenz = $\frac{1}{8}\lambda$	= $\frac{1}{4}\lambda$
$x = \frac{1}{8}\lambda \dots$	$Y = -a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$-a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} + b$
$\frac{2}{8}\lambda \dots$	$-a \pm b$	$-a \pm 0$
$\frac{3}{8}\lambda \dots$	$-a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$-a \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{4}{8}\lambda \dots$	$0 - b$	0 ± 0
$\frac{5}{8}\lambda \dots$	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$+a \sqrt{\frac{1}{2}} + b$
$\frac{6}{8}\lambda \dots$	$+a \pm b$	$+a \pm 0$
$\frac{7}{8}\lambda \dots$	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \pm 0$	$+a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} - b$
$\frac{8}{8}\lambda \dots$	$\pm 0 + b$	$\pm 0 \pm 0$

Die Figuren 214a und 214b stellen diese Bewegung dar, erstere die Differenz $\frac{1}{8}\lambda$, letztere für $\frac{1}{4}\lambda$, unter der Annahme, daß $b = a$. Die Zeichnungen zeigen also, wie sich die Fig. 213c dargestellte Bewegung durch eine Verschiebung der einen Bewegung ändert.

Fig. 214a.

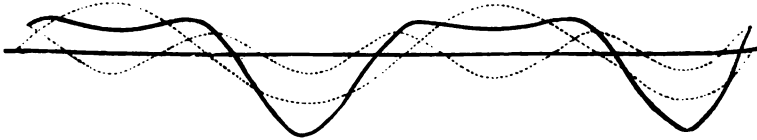
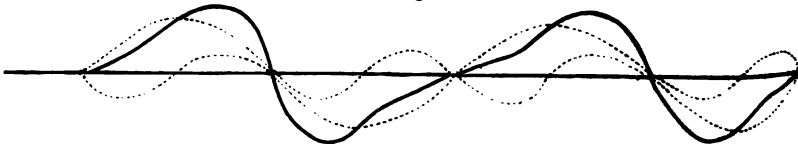


Fig. 214b.



Wie man sieht, ist Fig. 214b gewissermaßen das Umgekehrte von Fig. 213c, die Punkte der Reihe bewegen sich sehr langsam nach oben, dagegen sehr rasch nach unten, während bei einer Verschiebung um $\frac{1}{8}\lambda$

viertel Wellenlänge der kleinern Bewegung die Form der Schwingung eine ganz andere wird; der schwingende Punkt bewegt sich aus der Gleichgewichtslage mit großer Schnelligkeit zu seiner einen äußersten Lage, bewegt sich mit derselben Geschwindigkeit von dort zurück bis zu einer ersten größten Ausweichung nach der andern Seite, kehrt langsam bis zu einem gewissen Abstände von der Gleichgewichtslage zurück, entfernt sich wieder bis zu einem dem vorherigen gleichen Abstände und schwingt dann mit großer Schnelligkeit wieder bis zu dem äußersten Abstände an der andern Seite der Gleichgewichtslage.

In ganz gleicher Weise würde man verfahren, um die Wellenformen zu erhalten, wenn drei oder mehr Schwingungen verschiedener Wellenlängen sich in der Punktreihe ausbreiten, die Form der Wellen wird dann immer komplizierter, indem jede einzelne Bewegung in der resultierenden als bestimmte Periode auftritt. Wir werden später derartig komplizierte Schwingungen kennen lernen.

Ebenso wie gleich gerichtete Schwingungen verschiedener Wellenlänge können auch verschieden gerichtete Schwingungen verschiedener Wellenlänge sich zusammensetzen. Die resultierende Bewegung unterscheidet sich dann in doppelter Weise von den im vorigen Paragraphen erhaltenen, indem einmal die von den Punkten der Reihe beschriebenen Kurven nicht mehr Ellipsen, sondern kompliziertere Linien sind und ferner indem im allgemeinen die von den einzelnen Punkten nach einander und die von den auf einander folgenden Punkten der Reihe gleichzeitig beschriebenen Kurven verschieden sind. Dafs letzteres der Fall ist, ergibt sich daraus, dafs bei gleichzeitiger Ausbreitung von Schwingungen verschiedener Periode die einzelnen Punkte von den komponierenden Wellen nicht immer in derselben Phase getroffen werden. Denken wir uns z. B. in einer Punktreihe zwei zu einander senkrechte transversale Schwingungen fortgepflanzt, deren Phase nur sehr wenig verschieden ist, so dafs durch den Unterschied der Phase der Charakter der Kurven nicht alteriert wird, dafs dieselben Ellipsen bleiben; nehmen wir z. B. an, die Schwingungsdauern der Punkte verhalten sich wie 100 : 101 und die beiden Bewegungen beginnen gleichzeitig. Ist die Amplitude beider Bewegungen gleich, so wird die erste Schwingung im Anfangspunkte eine lineare sein, welche mit jeder der komponierenden einen Winkel von 45° bildet. Bei der zweiten Schwingung ist die eine der andern aber schon 0,01 Schwingung voraus, die Bahn des Punktes wird schon elliptisch, und nach 19 Schwingungen ist die Phasendifferenz der Schwingungen gleich $\frac{3}{6}$ Oscillation, die Bahn des Punktes wird eine Ellipse wie Fig. 209. Nach 25 Schwingungen ist die Phasendifferenz $\frac{1}{4}$ Oscillation, die Bahn wird ein Kreis, nach 50 Oscillationen ist sie $\frac{1}{2}$ Oscillation, die Bahn wird wieder eine Linie, welche zu der ersten Schwingung senkrecht steht; kurz man sieht, dafs nach 100 Schwingungen der Punkt nach und nach alle die Bahnen durchlaufen hat, welche wir im vorigen Paragraphen besprochen haben. Alle diese Bahnen, welche der erste Punkt nach einander durchläuft, sehen wir dann in den ersten 100 Wellenlängen gleichzeitig neben einander. Denn jeder Punkt durchläuft nach einander dieselben Bahnen wie der erste Punkt. Macht nun der erste Punkt der 100. Welle die erste Schwingung, so findet in der 75. Welle die 25. Schwingung statt, diese schwingt also geradeso wie der Anfangspunkt bei der 25. Schwingung etc.

Die hierdurch dargestellte Kurve zeigt Fig. 215 α . Der schwingende Punkt bewegt sich vom Anfangspunkte aus gleichzeitig nach y und z , aber schneller nach z als nach y , denn es ist $z = a$, wenn $y = a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$. Indem y nun von $a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ bis a wächst, nimmt z von a bis 0 ab; nimmt y dann wieder bis $a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}$ ab, so wächst z negativ wieder bis a und wird wieder mit y gleich 0. Diese Hälfte der Kurve besteht also aus zwei kongruenten Bögen. Ganz ebenso ist die andere Hälfte der Kurve für die negativen Werte von y beschaffen.

Ist die zweite Bewegung der ersten um den achten Teil ihrer Schwingung voraus, so haben wir, da wir mit λ die Wellenlänge der Schwingungen oder größern Periode bezeichnet haben, für d einzusetzen $\frac{1}{8} \lambda$. Damit wird die Gleichung der resultierenden Kurve, indem wir für $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ diesen Wert einsetzen,

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2y}{a} \sqrt{a^2 - y^2} + \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot \left(1 - 2 \frac{y^2}{a^2}\right).$$

Fig. 215.

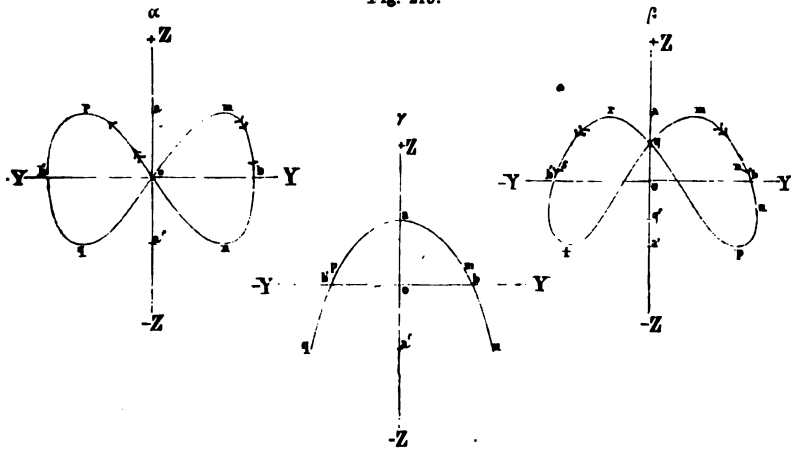


Fig. 215 β zeigt die durch diese Gleichung dargestellte Kurve; wir erhalten der Kurve entsprechend aus der Gleichung die Werte

$$z = a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ für } y = 0$$

$$z = a \quad \text{„} \quad y = \pm a \cdot \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}} = \pm 0,38268 a$$

$$z = 0 \quad \text{„} \quad y = \pm \frac{1}{2} a \sqrt{2 \pm \sqrt{2}} = \pm 0,92385 a \text{ und } \pm 0,38268 a$$

$$z = -a \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \text{„} \quad y = \pm a$$

$$z = -a \quad \text{„} \quad y = \pm \frac{a}{2} \cdot \sqrt{1 + 2\sqrt{2} - 1} = 0,75698 a.$$

Wie man sieht, unterscheidet sich diese Kurve von der vorigen nur dadurch, daß der Schnittpunkt der einzelnen Kurvenäste nach der Seite der positiven z verschoben ist, und die Kurve in ihren beiden Hälften mehr abgeflacht ist. Je mehr die zweite Bewegung der ersten voraus ist, um so weiter rückt der Schnittpunkt nach oben, bis er für ein Vorausseilen um $\frac{1}{4}$ Schwingung in den Wert $z = a$ fällt, wo dann gleichzeitig die Kurve die Gestalt Fig. 215 γ annimmt, der Punkt bewegt sich in der Linie qaw hin und her. Die Gleichung der Kurve erhalten wir, wenn wir in Gleichung (4) $d = \frac{1}{4} \lambda$ setzen

$$z = a \left(1 - 2 \frac{y^2}{a^2} \right).$$

Darnach ist

$$\begin{aligned} z &= a & \text{für } y &= 0 \\ z &= 0 & \text{„ } y &= \pm a \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \\ z &= -a & \text{„ } y &= \pm a, \end{aligned}$$

wie es auch obige Kurve zeigt.

Nimmt die Phasendifferenz der Bewegungen weiter zu, so tritt zunächst wieder die Kurve Fig. 215 β auf; sie behält diese Gestalt, jedoch so, daß der Punkt q immer näher an 0 heranrückt, bis die zweite Bewegung der ersten um $\frac{1}{2}$ Schwingung voraus, d also $\frac{1}{2} \lambda$ wird. Der Unterschied gegen vorhin ist nur der, daß der Punkt die Kurve in entgegengesetzter Richtung durchläuft. Ist $d = \frac{1}{2} \lambda$, so tritt wieder die Kurve Fig. 215 α auf, welche von dem Punkte aber in entgegengesetzter Richtung durchlaufen wird wie vorher, als $d = 0$ war.

Bei noch weiterer Zunahme der Phasendifferenz tritt wieder die Kurve Fig. 215 β auf, aber in umgekehrter Lage, wir erhalten z. B. die Kurve für $d = \frac{5}{6} \lambda$, wenn wir uns Fig. 215 β und für $d = \frac{2}{3} \lambda$, wenn wir uns Fig. 215 γ einfach auf den Kopf gestellt denken.

Sind die Schwingungsverhältnisse der beiden Bewegungen nicht genau 1 : 2, sondern etwa 50 : 99, so durchläuft jeder Punkt nach und nach die soeben abgeleiteten Bahnen, und ebenso sehen wir dann in der Punktreihe innerhalb 50λ alle die Kurven neben einander.

Sind die Verhältnisse der Schwingungsdauern weniger einfach, so werden die Kurven verwickelter, ihre Bestimmung gelingt indes immer auf dem angedeuteten Wege.

§ 132.

Schwingungen eines Systems von Punkten. Wenn in einem im Raum verteilten System von Punkten das Gleichgewicht eines Punktes gestört wird, so muß auch das aller übrigen gestört werden, wenn wir voraussetzen, daß auch hier, wie in den in den vorigen Paragraphen betrachteten Punktreihen, das Punktsystem durch anziehende und abstößende Kräfte, welche zwischen den einzelnen Punkten thätig sind, im Gleichgewicht gehalten wird. Man kann jedes System von Punkten, welche irgendwie im Raume verteilt sind, als aus Punktreihen zusammengesetzt betrachten, die man erhält, wenn man durch irgend einen Punkt des Raumes nach allen möglichen Richtungen gerade Linien legt. Diese Linien laufen

an dem Punkte aus, wie die Radien einer Kugel von dem Mittelpunkte, und jeder dieser unendlich vielen Radien stellt eine Punktreihe dar. Wird der erste Punkt in eine oscillierende Bewegung versetzt, so pflanzt sich diese in allen den Punktreihen nach den bisherigen Gesetzen fort, da der Punkt allen Reihen gleichzeitig angehört.

Je nach der Art und Weise, wie die Punkte im Raum verteilt sind, kann die Fortpflanzung der Bewegung im Systeme verschieden sein. Wie wir sahen, hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung nur ab von dem Quotienten $\sqrt{\frac{e}{d}}$, der Elasticität der Punktreihe und ihrer Dichtigkeit. Sind nun die Punkte in dem Systeme so verteilt, daß nach den einzelnen Richtungen hin auf der ganzen Länge der Radien dieser Quotient denselben Wert hat, wie wir es bei Betrachtung der Punktreihen voraussetzen, so nennt man das System ein homogenes. In einem solchen System pflanzt sich eine Wellenbewegung nach jeder Richtung hin mit konstanter Geschwindigkeit fort, auf der ganzen Länge jedes Radius ist die Wellenlänge dieselbe. Die schwingende Bewegung in einem solchen Systeme können wir unmittelbar mit Hilfe unserer Entwicklungen über die Schwingungen von Punktreihen erhalten.

Behalten auf den einzelnen Radien in verschiedenen Entfernungen vom Mittelpunkte Elasticität und Dichtigkeit der Punktreihen nicht denselben Wert, ändert sich die Elasticität allein oder die Dichtigkeit, oder ändern sich beide in einem verschiedenen Verhältnisse, so ist das Punktsystem ein nicht homogenes oder ein heterogenes.

In einem solchen System pflanzt sich die Bewegung in verschiedenen Entfernungen nicht mit gleicher Geschwindigkeit fort, die Wellenlängen sind nicht auf der ganzen Länge der Radien gleich, sondern ändern sich überall dort, wo auf denselben eine Änderung der Elasticität oder Dichtigkeit eintritt, denn überall dort findet eine Änderung des Quotienten $\sqrt{\frac{e}{d}}$ statt.

Die homogenen Punktsysteme können entweder isotrop oder anisotrop sein. Isotrope Punktsysteme sind solche, bei denen für sämtliche Schwingungen der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ derselbe ist, also nicht nur auf jedem Radius des Systems für sich betrachtet, sondern auch auf allen verschiedenen Radien, einerlei nach welcher Richtung auf demselben die Schwingungen erfolgen. Gleichartige Schwingungen, also auf allen Radien longitudinale, oder auf allen Radien transversale, pflanzen sich nach allen Richtungen mit derselben Geschwindigkeit fort. Ein derartiges Punktsystem würden wir z. B. erhalten, wenn wir nach drei zu einander senkrechten Richtungen des Raumes die Punkte in ganz gleichen Abständen verteilt denken und annehmen, daß überall in gleichen Abständen die Punkte mit gleichen Kräften auf einander wirken. Die Punkte würden also auf Ecken von Würfeln liegen, welche im ganzen System gleiche Seiten haben.

Ist der Quotient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ nicht nach allen Richtungen hin derselbe, so nennt man das System ein anisotropes oder heterotropes, es ist das der Fall, wenn die Dichtigkeit der verschiedenen Punktreihen oder die Elasticität

cität derselben verschieden ist, wenn also die Punkte in einer Richtung sich näher liegen oder mit stärkerer Kraft in ihrer Gleichgewichtslage gehalten werden als in einer andern, oder auch, wenn in einer und derselben Reihe der Wert von e verschieden ist, je nach der Richtung, nach welcher der Punkt aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist. In jeder Punktreihe pflanzt sich dann eine gegebene Schwingung mit konstanter Geschwindigkeit fort, welche aber von Punktreihe zu Punktreihe verschieden ist.

Betrachten wir die Fortpflanzung der Wellenbewegung in isotropen Mitteln etwas genauer und nehmen wir an, die Schwingungen haben überall in Bezug auf die Punktreihen die gleiche Richtung.

Bezeichnen wir wie früher die Oscillationsdauer der schwingenden Bewegung mit T und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung mit c , so hat sich nach Verlauf der Zeit T die schwingende Bewegung allen Punkten einer Kugel mitgeteilt, welche mit dem Radius $R = cT$ um den Anfangspunkt α der Bewegung beschrieben wird, da sich in diesem Systeme die schwingende Bewegung nach allen Richtungen mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzt. Die auf der Kugelfläche befindlichen Punkte beginnen gerade ihre schwingende Bewegung, während der Punkt α eine ganze Schwingung vollbracht hat, und die Punkte, welche die einzelnen Radien der Kugel bilden, sich in den verschiedensten Oscillationsphasen befinden, diejenigen, welche um $\frac{cT}{4}$ von α entfernt sind, haben $\frac{1}{4}$ ihrer

Schwingung vollbracht, die um $\frac{cT}{2}$ entfernten die Hälfte u. s. f. Man ersieht, wie alle Punkte, welche auf einer um α beschriebenen Kugel liegen, in der gleichen Phase sich befinden.

Der Bewegungszustand, der innerhalb der Kugel, die mit dem Radius $R = cT$ beschrieben war, am Ende der Zeit T stattfindet, pflanzt sich in der folgenden Zeit T in der Richtung der Radien weiter fort, so daß am Ende der Zeit $2T$ alle Punkte einer Kugel vom Radius $2cT$ an der Bewegung teilnehmen. Die Punkte, die auf der Fläche dieser Kugel liegen, sind im Begriffe, ihre schwingende Bewegung zu beginnen, und die Punkte auf der Kugel vom Radius cT haben ihre erste Oscillation zurückgelegt. Die Punkte, welche in der von diesen beiden Kugeln eingeschlossenen Schale sich befinden, haben alle einen größeren oder kleineren Teil einer Oscillation zurückgelegt; sie befinden sich in derselben Phase, wie die entsprechend liegenden Punkte innerhalb der Kugel vom Radius cT zur Zeit T . Die von α um $\frac{1}{4} cT$ entfernten Punkte haben $\frac{1}{4}$, die um $\frac{1}{2} cT$ entfernten $\frac{1}{2}$ Undulation zurückgelegt.

Die Punkte innerhalb der Kugel vom Radius cT befinden sich, wenn die Erregung im Mittelpunkt der Bewegung fortdauert, in denselben Oscillationsphasen wie zur Zeit T , jetzt aber bei Zurücklegung ihrer zweiten Oscillation.

In der folgenden Zeit T pflanzt sich der Bewegungszustand der Kugelschale, die zwischen den Kugeln vom Radius $2cT$ und cT erhalten ist, in der Richtung der Radien auf die Punkte fort, welche weniger als $3cT$ vom Punkte α entfernt sind; eine Kugel vom Radius $3cT$ ist die Grenze der Bewegung. Dort beginnen die Punkte ihre erste Oscillation, während sie auf der Kugelfläche, welche zur Zeit $2T$ die Grenze der Bewegung

er, ihre zweite Oscillation beginnen; alle zwischen diesen Kugeln befindlichen Punkte haben grössere oder kleinere Teile ihrer Oscillation vollführt, nach ihren Abständen vom Anfangspunkte oder von der Kugel, die in der vorigen Zeit die Grenze der Bewegung bildete.

Man sieht, wie nach und nach der Raum rings um den Punkt α sich in eine Reihe von Kugelschalen teilt, deren Dicke jedesmal gleich cT ist, und in denen die gleichweit von der Grenze der Schalen entfernten Punkte den gleichen Phasen der Oscillation sich befinden. Jeder Radius, den man von dem Punkte α nach der äussersten Grenze der Bewegung zieht, lässt sich ebenso in eine Anzahl Wellenlängen theilen, wie wir es früher für die einzelnen Punktreihen gesehen haben. Deshalb nennt man auch hier die Dicke der einzelnen Kugelschalen, welche durch Kugeln vom Radius cT und $(n - 1)cT$ begrenzt werden, die Wellenlänge, und diese Kugelschalen selbst Wellen.

Es geht demnach aus dem Gesagten hervor, dass in einem isotropen Punktsystem die schwingende Bewegung sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzt.

Hört nach einiger Zeit die schwingende Bewegung des Punktes α auf, so gelangen dadurch auch die auf α folgenden Punkte auf allen einzelnen Radien zur Ruhe, da die schwingende Bewegung des Punktes α es ist, welche die Bewegung der folgenden Punkte veranlasst, indem er bei seiner Bewegung die folgenden Punkte nach sich zieht. Dadurch entsteht neben der äussern Grenze der Wellenbewegung eine innere, an der die Bewegung der Punkte aufhört.

Diese innere Grenze muss ebenso eine Kugel sein, deren Mittelpunkt α ist und deren Radius stetig mit der Zeit t gerade so wächst, wie der Radius der äussern Grenze. Daraus folgt, dass von der Zeit an, wo α aufhört sich zu bewegen, eine Kugelschale die sämtlichen bewegten Punkte umfaßt, deren Dicke gleich ist ct , wenn wir mit t die Zeit bezeichnen, während welcher der Punkt α sich bewegte. Zur Zeit ℓ werden die Grenzen dieser Kugelschalen die beiden Kugeln vom Radius $c\ell$ und $c(\ell - t)$ sein, erstere die äussere, letztere die innere. Mit wachsender Zeit erweitert sich diese Schale immer mehr, aber die Dicke derselben ist immer

$$c\ell - c(\ell - t) = ct,$$

also konstant.

In nicht isotropen Systemen kann eine Wellenbewegung sich auch nicht in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, dort hängt der Abstand, bis zu welchem sich in den verschiedenen Richtungen die Bewegung in gleichen Zeiten überträgt, ab von der Dichtigkeit der einzelnen Radien sowie von der Elasticität dieser Reihen. Um demnach die Grenzen der Bewegung in diesem Falle zu erhalten, müssen wir das Gesetz kennen, nach welchem sich die Eigenschaften der Punktreihen ändern. Wir werden später, in der Lehre vom Lichte, die Fortpflanzung von schwingenden Bewegungen in diesen Systemen zu betrachten haben.

Die nicht homogenen Punktsysteme können wir als eine Verbindung einander grenzender homogener Punktsysteme ansehen. Die Fortpflanzung der schwingenden Bewegungen in denselben können wir demnach auf die Fortpflanzung der Bewegung in homogenen Punktsystemen zurückführen,

nur ist es notwendig, die Änderungen zu untersuchen, welche die seigende Bewegung erfährt beim Übergange aus einem homogenen System ein anderes ebenfalls homogenes System.

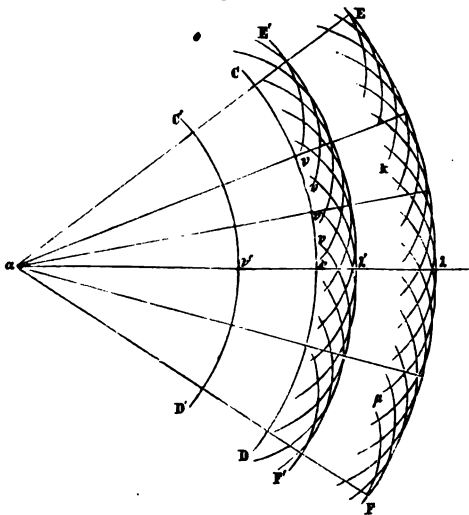
§ 133.

Huyghensches Princip. Man kann sich von der Fortpflanzung einer Wellenbewegung noch eine etwas andere Vorstellung bilden, die zuerst von Huyghens angewandt ist und die auf dem von uns in der Vorlesung bereits zum Teil ausgesprochenen und angewandten Princip der Komposition kleiner Bewegungen beruht. Dieses Princip läßt sich vollständig so ausdrücken: Ein Punkt eines Systemes, der durch mehrere Impulse bewegt wird, vollführt eine Bewegung, die sich als Resultante nach dem Satz des Parallelogramms der Kräfte bestimmen läßt. Wenn durch die Bewegung dieses Punktes auch benachbarte Punkte des Systemes bewegt werden, so, als besäße der ursprünglich bewegte Punkt nur diese Teilbewegungen, so bewegen sich dieselben, als ob sie nur diese Teilbewegungen ausführen.

Wenn nun in einem Punktsystem eine Wellenbewegung vorhanden ist und die Bewegung bis zu einer gewissen Fläche fortgeschritten ist, so bewegen sich die Punkte irgend eines nicht in dieser Fläche liegenden Punktsystems die Resultante aller jener Teilbewegungen, welche die verschiedenen Punkte der Welle zu ihm hinsenden.

Sei CD (Fig. 216) die äußere, $C'D'$ die innere Grenze einer Welle, welche von dem Punkte α ausgegangen ist. Wir können

Fig. 216.



Punkte, welche zwischen den Grenzen CD und $C'D'$ liegen, als neue Wellenmittelpunkte betrachten, von denen sich eine schwingende Bewegung nach allen Richtungen hin fortpflanzt, gerade so, als ob sie von dem Punkte α ausgingen.

Diese von den Punkten ausgehenden Bewegungen sind bei der Voraussetzung, daß das System ein isotropes ist, ebenso kugelförmig, wie die Flächen, deren Schnittlinien CD und $C'D'$ sind.

Von dem Punkte ν auf der inneren Kugelfläche $C'D'$ geht sich z. B. die Bewegung einer Zeit t auf der Kugelfläche CD aus, deren Radius $\nu\lambda = c \cdot t$ ist, worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung bedeutet.

Gleiches gilt für alle Punkte der Kugelfläche $C'D'$, von denen Bewegungen in der Form von kugelförmigen Wellen ausgehen, deren Radien gleich $c \cdot t$ sind.

Die äußere Grenze, bis zu der sich auf diese Weise die Wellenbewegung fortgepflanzt hat, wird die Fläche sein, welche alle diese einzelnen Kugeln berührt, welche also alle diese Kugeln einhüllt. Diese Fläche ist offenbar eine Kugel EF , welche den Punkt α zum Mittelpunkt hat, und deren Radius gleich ist $\alpha v + c \cdot t = \alpha \lambda$. Denn die von α am weitesten entfernten Punkte der einzelnen Kugeln sind diejenigen, wo deren Radien $\nu \lambda$ mit dem Radius αv gerade Linien bilden; diese liegen aber auf einer Kugelfläche, deren Radius gleich $\alpha \lambda$ ist.

Gleiches gilt auch von den Bewegungen aller übrigen zwischen CD und $C'D'$ liegenden Punkte, auch von diesen gehen Bewegungen nach allen Richtungen aus, und der Schwingungszustand der auf irgend einer zwischen CD und $C'D'$ liegenden Kugelfläche befindlichen Punkte hat sich auf eine um $c \cdot t$ von α weiter entfernte Kugelfläche übertragen. Die äußere Grenze der Welle ist demnach die Kugelfläche $E'F'$, welche mit dem Radius $\alpha v' + \nu' \lambda'$ um α beschrieben ist, da diese Kugelfläche alle diese einzelnen Kugeln berührt, welche von allen ν' der Kugelfläche $C'D'$ mit den Radien $\nu' \lambda'$ beschrieben werden.

Wir erhalten somit durch Anwendung der Huyghensschen Konstruktion, indem wir jeden Punkt einer Welle als Bewegungsmittelpunkt ansehen, von dem aus sich die Bewegung weiter fortpflanzt, ganz dieselbe Wellenfläche, als wenn wir von dem bewegenden Mittelpunkte α aus in der Richtung der Radien fortgeschritten wären.

Wir haben jedoch nicht nur zu zeigen, daß die jedesmalige Begrenzung der Welle nach dieser Konstruktion dieselbe ist, als wenn wir eine einfache Verbreitung nach den durch den Bewegungsmittelpunkt gelegten Radien annehmen, sondern auch nachzuweisen, daß die Bewegung der einzelnen Punkte in diesen abgeleiteten Wellen dieselbe ist, wie nach unserer ersten Vorstellung und somit die dort stillschweigend gemachte Voraussetzung der geradlinigen Verbreitung von Wellen in einem Punktsystem zu rechtfertigen.

Sei zu dem Ende die um den Mittelpunkt α beschriebene Kugel $ABCD$ die Wellenfläche zu irgend einer Zeit t , und μ ein Punkt des Systems, der eine Strecke δ von dem Punkte ν auf dem Radius αv entfernt liegt. (Fig. 217.)

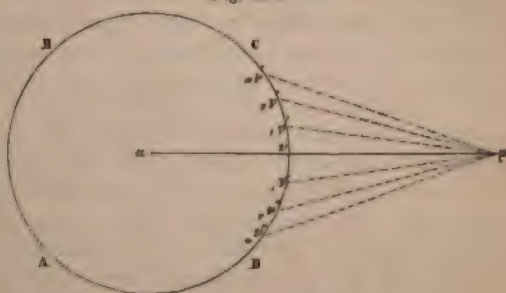
Der Punkt μ hat, wenn die Bewegung sich fortpflanzt, nach einer gewissen Zeit τ zunächst eine Bewegung durch die von ν in der Richtung des Radius αv sich fortplanzende Bewegung. Nehmen wir an, daß der Punkt ν am Ende

zur Zeit t oder im Beginne der Zeit τ seine Bewegung gerade beginnt, so ist die Phase der Oscillation des Punktes μ bestimmt durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{\delta}{\lambda} \right),$$

Wenn wir mit a die Amplitude, mit T die Oscillationsdauer und mit λ die Wellenlänge der schwingenden Bewegung bezeichnen.

Fig. 217.



Nach unserer Annahme sind alle Punkte der Wellenfläche Mittelpunkte der Bewegung, von denen sich Schwingungen nach allen Richtungen hin fortpflanzen. Zur Zeit τ ist daher von allen Punkten der Wellenfläche $ABCD$ eine Bewegung auf den Punkt μ übertragen. Da aber die Abstände der einzelnen Punkte ν' von μ unter sich sowohl als von ν verschieden sind, so sind die gleichzeitig in μ ankommenden Bewegungen zu verschiedenen Zeiten von der Welle $ABCD$ ausgegangen, es folgt daraus, daß die Phasen aller gleichzeitig auf den Punkt μ wirkenden Bewegungen unter sich sowohl als von der von ν ausgehenden Bewegung verschieden sind. Nennen wir den Abstand eines Punktes ν' von μ nun δ' , so erhalten wir als Abstand des Punktes μ von der Gleichgewichtslage infolge dieser Bewegung

$$y' = a \cdot \sin 2\pi \left(\frac{\tau}{T} - \frac{\delta'}{\lambda} \right)$$

und als Phasendifferenz der beiden Bewegungen die Differenz

$$\frac{\delta' - \delta}{\lambda}$$

Je nach der Lage des Punktes ν' hat diese Differenz immer andere Werte, sie wächst stetig, je weiter der Punkt ν' von ν entfernt liegt, so daß also gleichzeitig Bewegungen in allen möglichen Phasen auf den Punkt μ einwirken. Um die Resultierende aus diesen sämtlichen Bewegungen zu erhalten, denken wir uns durch Kreise, deren Mittelpunkte auf $\alpha\mu$ liegen, und die zu $\alpha\mu$ senkrecht sind, die Wellenfläche CD in eine Reihe von Zonen $\nu', \nu'', \nu''', \nu''''$ zerlegt, so zwar, daß die Abstände der auf einander folgenden Punkte ν von μ sich immer um $\frac{1}{2}\lambda$ unterscheiden, so daß also

$$\nu'\mu - \nu'\mu = \nu'\mu - \nu\mu = \nu''\mu - \nu''\mu = \nu''\mu - \nu\mu = \frac{1}{2}\lambda.$$

Die sämtlichen Bewegungen, welche von den auf der zunächst um ν liegenden Zone befindlichen Punkten ausgehen, treiben zur Zeit τ den Punkt μ nach derselben Richtung, da die Phasendifferenz dieser Bewegungen kleiner als $\frac{1}{2}\lambda$ ist. Die von den Punkten der zweiten Zone $\nu', \nu'', \nu''', \nu''''$ ausgehenden Bewegungen treiben den Punkt μ dagegen nach entgegengesetzter Richtung, da alle Strahlen dieser Zone gegen die entsprechend liegenden der vorigen, zunächst um ν liegenden Zone um eine halbe Wellenlänge verschoben sind. Die von der dritten Zone ausgehenden Bewegungen sind gegen die der ersten um eine ganze Wellenlänge verschoben, sie besitzen also keine Phasendifferenz gegen jene und bewegen demnach den Punkt μ wieder in demselben Sinne. Ihnen entgegen wirken aber die Strahlen der vierten Zone, welche eine Phasendifferenz von $\frac{1}{2}\lambda$ mit den von den Punkten der dritten Zone herrührenden Bewegungen besitzen.

Ebenso ist es mit allen folgenden Zonen, so daß die abwechselnden Zonen stets Bewegungen in μ erzeugen, welche eine Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge besitzen, welche sich also gegenseitig schwächen.

Die resultierende Bewegung in μ wird also wesentlich von der Amplitude abhängig sein, welche jede der Zonen in μ erzeugt. Diese aber hängt von zwei Umständen ab, einmal nämlich von der Anzahl der in jeder Zone schwingenden Punkte, und dann von der Neigung der in jeder Zone statt-

adenden Schwingungen gegen die in μ , durch den Punkt ν des Radius regte Schwingung. Denn betrachten wir nur transversale Schwingungen, kann z. B. von der sechsten Zone her nur die Komponente in Betracht kommen, welche zu $\nu\mu$ senkrecht ist. Zur Berechnung der Resultierenden fassen wir also die Summe der von allen Zonen kommenden Schwingungen auf, jede multipliciert mit dem Cosinus des Neigungswinkels, den sie mit der Schwingung bei ν bildet. In dieser Form würde die Lösung des Problems die größte Schwierigkeit bieten. Glücklicherweise kann man das Problem auch anders anfassen, indem man nur die Wirkungen der unmittelbar benachbarten Zonen vergleicht, also die der zweiten mit jenen der ersten und dritten, die der vierten mit jeden der dritten und fünften. Da

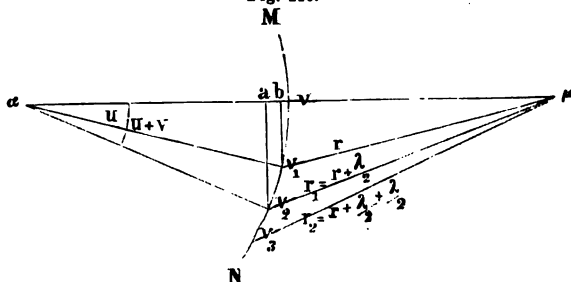
die Neigungen der unmittelbar benachbarten Zonen nur äußerst wenig verschieden sind, können wir bei dieser Betrachtungsweise die Verschiedenheit derselben vernachlässigen und die von jeder Zone in μ erregte Bewegung der Gröfse der Zone, der Anzahl der

ihr schwingenden Punkte, proportional setzen. Wir haben deshalb nur die Gröfse der einzelnen Zonen zu berechnen; sei zu dem Ende MN der Durchschnitt durch ein Stück der primären Welle, welche nach μ ihre Schwingungen sendet, und seien $\nu_1 \nu_2, \nu_2 \nu_3$ die Durchschnitte durch zwei benachbarte Zonen, so daß die Abstände ihrer Grenzen von μ sich um $\frac{\lambda}{2}$ unterscheiden, so daß also

$$r_1 = r + \frac{\lambda}{2}, r_2 = r_1 + \frac{\lambda}{2}$$

sein. Denken wir uns den Durchschnitt um $\alpha\mu$ als Axe rotiert, so beschreibt der Bogen MN das betreffende Stück der primären Welle, und der Bogen ν_2 die zwischen r und $r + \frac{\lambda}{2}$ liegende Zone. Um die Gröfse derselben zu erhalten, denken wir uns bei ν_1 ein unendlich kleines Stück des Schnittes, dessen Länge im Bogenmafs wir mit du bezeichnen, dessen Länge in Linienmafs also $a \cdot du$ ist, wenn wir den Radius der primären Welle mit a bezeichnen. Der Abstand dieses Elementes von der Drehungsaxe ist $\nu_1 b$, die Gröfse der von demselben beschriebenen Zone somit gleich $2\pi \cdot \nu_1 b \cdot a \cdot du$. Wenn wir jetzt den Winkel $\nu_1 \alpha \mu$ gleich u , so ist $\nu_1 b = a \cdot \sin u$ und mit die Gröfse der von dem Element du beschriebenen Zone $2\pi a^2 \sin u du$. Das Element du des Durchschnittes $\nu_1 \nu_2$ beschreibt eine solche Zone, und die Summe aller dieser Elementarzonen ist die gesuchte Zone. Die einzelnen Elementarzonen erhalten wir, wenn wir in dem eben abgeleiteten Ausdrucke nach und nach für u alle Werte einsetzen von $u = \nu_1 \alpha \mu = u$ bis $u = \nu_2 \alpha \mu = u + v$, wenn wir den Winkel $\nu_1 \alpha \nu_2 = v$ setzen. Wir schreiben diese Summe schreiben, wenn wir die Gröfse der Zone gleich Z_n setzen

Fig. 218.



$$Z_n = \int_u^{u+v} 2\pi a^2 \cdot \sin u \, du = 2\pi a^2 \int_u^{u+v} \sin u \, du$$

und erhalten dann in oft gemachter Anwendung der Regeln der mathematischen Einleitung

$$Z_n = 2\pi a^2 \{ \cos u - \cos(u+v) \}.$$

Setzen wir den Abstand der primären Welle von μ gleich b , also $\alpha\mu = a + b$, so ist nach einem bekannten Satze der Trigonometrie

$$r^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b) \cdot \cos u$$

$$\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = (a+b)^2 + a^2 - 2a(a+b) \cdot \cos(u+v)$$

$$\left(r + \frac{\lambda}{2}\right)^2 - r^2 = r\lambda + \frac{\lambda^2}{4} = 2a(a+b) \{ \cos u - \cos(u+v) \}$$

$$\cos u - \cos(u+v) = \frac{1}{2a(a+b)} \left(r\lambda + \frac{\lambda^2}{4}\right),$$

so daß schließlich die gesuchte GröÙe der Zone wird

$$Z_n = \frac{\pi a}{a+b} \left(r\lambda + \frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Die GröÙe der folgenden Zone erhalten wir aus diesem Ausdruck sofort, indem wir für r einsetzen $r_1 = r + \frac{\lambda}{2}$, dieselbe wird damit

$$Z_{n+1} = \frac{\pi a}{a+b} \left(r\lambda + 3\frac{\lambda^2}{4}\right)$$

und die GröÙe der auf diese folgenden Zone, wenn wir zu r nochmals addieren, also

$$Z_{n+2} = \frac{\pi a}{a+b} \left(r\lambda + 5\frac{\lambda^2}{4}\right).$$

Wir sehen also, daß die GröÙen der auf einander folgenden Zonen nicht gleich sind, daß aber

$$Z_{n+1} = \frac{1}{2}(Z_n + Z_{n+2}),$$

oder die GröÙe jeder einzelnen Zone ist genau gleich der halben Summe der vorhergehenden und der nachfolgenden Zone. Mit diesem Satze ist unsere Aufgabe gelöst, denn es folgt nach der vorhin gemachten Bemerkung, daß die Wirkung der zweiten Zone durch die halbe erste und halbe dritte, die der vierten durch die halbe dritte und halbe fünfte Zone aufgehoben wird, und so fort über die ganze primäre Welle, soweit von derselben Bewegung nach μ kommt. Es bleibt somit nur die von der halben unmittelbar um v liegenden Zone ausgehende Bewegung übrig; die Bewegung des Punktes μ ist also ganz dieselbe, als wenn nur in der Richtung $\alpha v \mu$ die Bewegung sich fortgepflanzt hätte, also in der Richtung des durch a und gelegten Radius.

Wir gelangen demnach durch die Huyghenssche Konstruktion zu denselben Resultaten wie nach der im vorigen Paragraphen dargelegten

anschauung über die Fortpflanzung der Wellenbewegung; wir werden daher in spätern Fällen sowohl die eine als die andere Anschauungsweise anwenden können.

§ 134.

Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen; Reflexion der Wellen. Ein nicht homogenes Punktsystem können wir, wie bereits erwähnt, als aus homogenen Punktsystemen zusammengesetzt ansehen. In den einzelnen Teilen des Systems wird daher die Fortpflanzung der Wellenbewegung denselben Gesetzen folgen, wie in einem homogenen System. Die Bewegung wird sich in kugelförmigen Wellen fortpflanzen, wenn die einzelnen Systeme isotrop sind, in anders geformten, wenn sie anisotrop sind. Um demnach die Fortpflanzung der Wellen in nicht homogenen Systemen vollständig zu bestimmen, haben wir nur die Erscheinungen zu untersuchen, welche beim Übergange einer Wellenbewegung aus dem einen Punktsysteme in ein anderes sich darbieten.

Wenn eine Wellenbewegung sich in einem homogenen Mittel, das selbst in einem von gleichförmiger Dichte und Elasticität fortpflanzt, so kann sie niemals zurückkehren, vielmehr läßt sie beim Übergange auf neue Schichten die vorhergehenden in absoluter Ruhe zurück. Ebenso wie eine Kugel, wenn sie auf eine zweite von gleicher Masse stößt, an diese ihre ganze Geschwindigkeit abgibt und nach dem Stosse in Ruhe zurückbleibt, so überträgt auch jeder schwingende Punkt auf den ihm an Gröfse genau gleichen folgenden seine ganze Geschwindigkeit. In der Ruhelage angekommen, verläßt er dieselbe daher nicht mehr, wenn nicht ein neuer Impuls von dem bewegenden Mittelpunkt her ihn trifft. Die Wellenbewegung schreitet daher in einem homogenen Punktsystem einfach voran, ohne je zurückzukehren.

Anders jedoch, wenn eine Wellenbewegung die Grenze zweier verschiedener Punktsysteme trifft. Wenn eine Kugel auf eine zweite stößt, welche mehr oder weniger Masse als die erste besitzt, so bleibt sie in beiden Fällen nach dem Stosse noch in Bewegung. Hat die zweite Kugel mehr Masse als die erste, so wird die erste Kugel zurückgeworfen, die getroffene Kugel bewegt sich vorwärts, die stoßende ihrer frühern Bewegung entgegen zurück. Hat die zweite Kugel eine geringere Masse, so fährt die stoßende Kugel fort, sich in gleichem Sinne wie vorhin zu bewegen. So muß es auch bei der Wellenbewegung sein, wo die Bewegung der einzelnen Punkte Folge der Einwirkung der benachbarten Punkte ist. Kommt eine Bewegung an der Grenze zweier Mittel an, so wird die Bewegung in das zweite Mittel übergehen und dort eine Wellenbewegung erzeugen, die sich nach den für dieses System gültigen Gesetzen fortpflanzt. Zugleich bleiben aber auch die in der letzten Schicht des ersten Mittels liegenden Punkte in Bewegung.

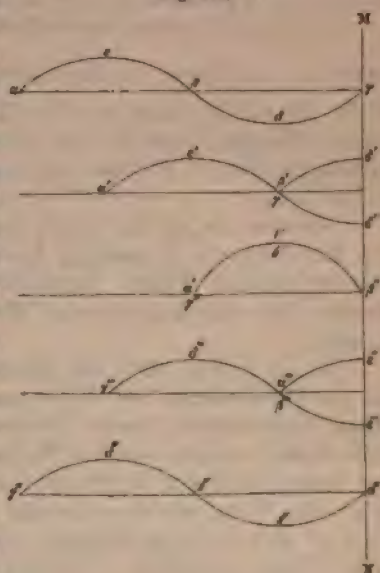
Ist das zweite System weniger dicht, so werden die in der Grenzschicht liegenden Punkte einfach ihre Bewegung fortsetzen, nur wird die Amplitude der folgenden Bewegung kleiner sein. Dadurch werden die Mittelpunkte neuer Wellen, welche sich rückwärts im ersten System ausbreiten, und da die Bewegungen der Mittelpunkte dieser neuen Wellen so erfolgen, als wären sie Folge neuer Impulse von unten,

ein Wellenberg fort. Nach einer weitem $\frac{1}{4}$ Undulation befindet sich die reflektierte Thal in $\gamma^{IV} \delta^{IV} \beta^{IV}$ und ihm folgend der vollständig reflektierte Berg $\beta^{IV} \epsilon^{IV} \alpha^{IV}$.

Gerade also wie in der ankommenden Wellenbewegung das Wellenthal dem Wellenberg vorausgeht, so auch im reflektierten, die Bewegung ist in der reflektierten Welle dieselbe, wie wenn sie ungestört, nur mit kleinerer Geschwindigkeit fortgeschritten wäre. Gerade wie das Wellenthal fortschreitend die nächsten Strecke der Punktreihe ein Wellenthal und der Wellenberg ein Wellenberg erzeugt, so erzeugt auch bei der Reflexion das ankommende Wellenthal ein rückkehrendes Wellenthal und der ankommende Wellenberg einen zurückkehrenden Berg.

Anders verhält es sich, wenn das zweite Mittel eine grössere Dichtigkeit besitzt. Die bei der longitudinalen Schwingung sich gegen das zweite bewegenden Punkte werden zurückgestoßen, und die sich von der Wand entfernenden zurückgezogen, in dem ersten Falle also wird die ankommende Welle in die entgegengesetzte verwandelt; so auch bei der transversalen Schwingung; die sich in dem einen oder anderen Sinne von der Gleichgewichtslage bewegenden Punkte werden von den Punkten des zweiten Mittels zurückgezogen, als wenn die beiden Schichten gleiche Dichtigkeit hätten. Die Wirkung des dichteren Mittels ist dieselbe, als wenn die in der ersten Schicht befindlichen Punkte, weil ihre Bewegung gehemmt wird, einen ihrer ursprünglichen entgegengesetzten Impuls erhalten hätten. Dadurch werden sie die Punkte einer neuen, in dem Augenblicke, wo die erste ankommt, beginnen Bewegung, welche der Richtung nach der ankommenden entgegengesetzt ist. Die ankommende entgegengesetzte Welle pflanzt sich in dem ersten Medium rückwärts fort.

Fig. 220.



stellt demnach $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 220) eine an der Grenze zweier Mittel, das erste rechts von MN dichter ist, ankommende Welle dar, so wird die ankommende Wellenthal als Wellenberg reflektiert; nach der Zeit von einer Undulation ist daher die Stellung der Punkte zwischen β' und der Grenze gegeben, die durch die Differenz der ankommenden und reflektierten Wellen bestimmt, das Wellenthal hat eine viel kleinere Tiefe, als es bei der Fortpflanzung der Bewegung haben würde. Nach einer folgenden Schwingungszeit ist der aus dem ankommenden Thal reflektierte Wellenberg die Stellung $\gamma''\delta''\beta''$ fortgepflanzt, und ebenso ist der Wellenberg γ bis $\alpha''\epsilon''\beta''$ vorgerückt, an der Wand bildet sich ein aus beiden resultierender stärkerer Wellenberg. In der folgenden Zeit rückt der Wellenberg nach $\gamma'''\delta'''\beta'''$, der ankommende ist zur Hälfte in $\alpha'''\epsilon'''$,

zur Hälfte als Thal reflektiert $\beta''\epsilon''$, an der Wand besteht ein Berg von geringerer Höhe. Nach weiterm Verlauf einer $\frac{1}{2}$ Undulationszeit ist schließlich der aus dem Wellenthal reflektierte Wellenberg nach $\gamma''\delta''\beta''$ vorgedrückt und der zuletzt an der Grenze angekommene Wellenberg ist als Wellenthal reflektiert und hat die Lage $\beta''\epsilon''\alpha''$.

Während also bei der ankommenden Bewegung das Wellenthal dem Wellenberge vorausging, geht in der reflektierten umgekehrt der Wellenberg dem Wellenthal voraus. Die reflektierte Bewegung hat also mit der ankommenden entgegengesetzte Phasen; bei ungestörter Fortpflanzung wäre das ankommende Thal in der nächsten Strecke wieder Anlaß zur Bildung eines Thales geworden, hier hat es einen Berg hervorgerufen. Durch die Reflexion ist also der reflektierte Strahl gegen den einfallenden um eine halbe Wellenlänge verschoben.

Die in beiden Fällen reflektierten Bewegungen sind demnach ebenfalls in gleichen Abständen von der Grenze in entgegengesetzter Phase, wo in dem ersten Wellenthal ist, ist in dem zweiten Wellenberg und umgekehrt.

Es folgt also, wenn eine Wellenbewegung an der Grenze zweier Systeme ankommt, in denen der Koeffizient $\sqrt{\frac{e}{d}}$ verschiedene Werte hat, so bewirkt sie immer, daß von der Grenzstelle aus sich zwei Wellensysteme weiter bewegen, eine in das erste Mittel zurück, eine reflektierte oder zurückgeworfene Welle, und eine zweite, welche in dem zweiten Mittel sich weiter bewegt.

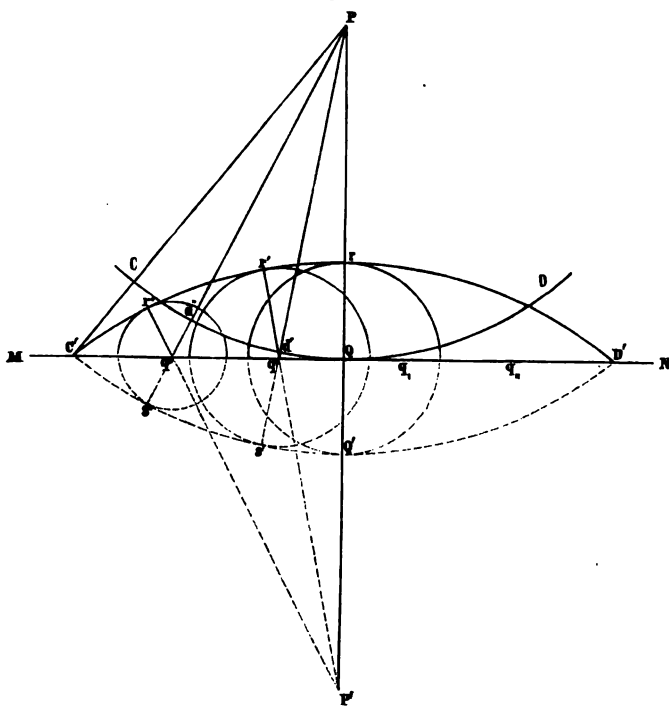
Nehmen wir an, die beiden Punktsysteme seien isotrop, so erhält man mit Hülfe der Huyghensschen Konstruktion leicht die fortschreitende und zurückgeworfene Welle. Beginnen wir mit der letztern und setzen wir voraus, daß eine kugelförmige Welle an der ebenen Grenze zweier Mittel antreffe.

Es sei P (Fig. 221) der Mittelpunkt der Welle im ersten Mittel, CB sei ein Durchschnitt der Welle und MN ein Durchschnitt der das erste Mittel begrenzenden Ebene. Ferner sei PQ senkrecht zu MN , also Q der erste Punkt, welcher von der Wellenbewegung getroffen wird. Jeder Punkt der Grenze wird ein Mittelpunkt einer neuen in das erste Mittel zurückkehrenden Welle, sowie er von der ankommenden Bewegung getroffen wird. Es wird sich demnach zunächst von dem Punkte Q eine Bewegung in das erste Mittel ausbreiten. Da nun, wie wir sahen, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle in einem elastischen Punktsystem nur abhängt von dem Quotienten $\sqrt{\frac{e}{d}}$, so verbreitet sich die zurückgeworfene Welle mit eben derselben Geschwindigkeit, mit welcher sich die einfallende Welle verbreitet; in der Zeit also, in welcher von den Punkten D oder C , von denen wir der Symmetrie halber annehmen, daß sie gleichweit von Q entfernt sind, sich die schwingende Bewegung bis D' oder C' fortgepflanzt hat, wo also von diesen Punkten aus die Wellenbewegung reflektiert zu werden beginnt, pflanzt sich von Q aus die Bewegung bis zu einer Halbkugel fort, deren Radius $Qr = CC'$ ist. Die neben Q liegenden Punkte der Grenzschicht q', q'', q, q'' werden immer später von der Wellenbewegung getroffen, und zwar so viel später, als die Bewegung der ankommenden Welle braucht, um die Strecke Qq', Qq'' zu durchlaufen. In derselben

in welcher sich die Bewegung von Q bis zu einer Halbkugel vom Radius Qr fortpflanzt, verbreitet sie sich von q' bis zu einer Halbkugel vom Radius $q'r' = Qr - q'd$ von q'' bis zu einer Halbkugel vom Radius $= Qr - q''d''$ und so von allen übrigen Punkten bis zu einer Halbkugel deren Radius um die Länge kleiner ist als Qr , welche die Wellenung noch hat durchlaufen müssen, um den betreffenden Punkt in gungen zu versetzen.

ie Grenze, bis zu der sich demnach die Wellenbewegung in dem Mittel rückwärts ausgebreitet hat, ist die Fläche, welche alle diese n Kugeln berührend umhüllt. Es ist leicht ersichtlich, daß diese $C'r''r'D'$ eine Kugeloberfläche sein muß, deren Mittelpunkt P' ebenso

Fig. 221.



unter MN liegt, als der Punkt P , von welchem die ankommende ausging, vor MN liegt. Denn [denken wir uns, daß die Welle un-
 rt hätte fortschreiten können, so geben die andern Hälften der
 s um $Q, q', q'' \dots$ beschriebenen Kugeln, nach der Huyghensschen
 ktion, die Wellenfläche $C'Q'D'$, bis zu der sich die Bewegung in
 n Zeit fortgepflanzt hätte, in der sie in der Richtung PC sich bis
 rtpflanzt. Die diese Kugeln nach der einen Seite einhüllende Fläche
 , wie wir sahen, eine Kugel vom Radius $PC' = PQ = PD'$. Die
 welche diese Kugeln von der andern Seite einhüllt, muß daher eine
 von demselben Radius sein, die ihre Konvexität jedoch nach der

entgegengesetzten Seite richtet, deren Mittelpunkt also in P' liegt, so daß $P'Q = P'r$, oder da $Qr = Q'Q$, $P'Q = PQ$ ist.

Von einer ebenen Grenze zweier Punktsysteme wird demnach eine ankommende Welle gerade so reflektiert, als ginge sie von einem Mittelpunkt aus, welcher ebenso weit hinter dieser Grenze, wie der Mittelpunkt der ankommenden Welle vor der Grenze liegt.

Dieser Satz läßt sich in etwas anderer Form aussprechen, in welcher er in manchen Fällen leichter angewandt wird.

Aus der Gleichheit $P'Q = PQ$ folgt, daß die Dreiecke $P'C'Q$ und $PC'Q$, $P'q''Q$ und $Pq''Q$, $P'q'Q$ und $Pq'Q$ etc. sich decken und daraus, daß die Winkel

$$\begin{aligned} P'q''Q &= Pq''Q, \\ P'q'Q &= Pq'Q \text{ etc.}, \end{aligned}$$

oder da die Winkel $P'q''Q = r''q''C'$ und $P'q'Q = r'q'C'$ sind als Scheitelwinkel, daß die Winkel

$$\begin{aligned} Pq''Q &= r''q''C', \\ Pq'Q &= r'q'C', \end{aligned}$$

oder die Winkel, unter welchen die Radien der ankommenden und reflektierten Welle die Grenzfläche schneiden, einander gleich sind. Nach unserer ersten Anschauung von der Art der Fortpflanzung der Wellenbewegung in einem Punktsystem waren die Radien der Wellenfläche die einzelnen Punktreihen, in welchen sich die Bewegung fortpflanzte. Nennen wir mit Rücksicht darauf die Radien die Wellenstrahlen, so können wir obigen Satz auch so aussprechen, daß bei der Reflexion einer Wellenbewegung die reflektierten Strahlen und die ankommenden mit der reflektierenden Fläche gleiche Winkel bilden.

Man bezeichnet gewöhnlich die Vertikale, welche in dem Punkte der Trennungsfläche beider Mittel errichtet wird, als das Einfallslot und den Winkel, welchen der ankommende Wellenstrahl mit demselben bildet, als Einfallswinkel, den hingegen, welchen der reflektierte Strahl mit ihm einschließt, als Reflexionswinkel.

Sind nun die Winkel, welche der ankommende und der reflektierte Strahl mit der reflektierenden Fläche einschließen, einander gleich, so sind es auch diejenigen, welche sie mit dem Einfallslot bilden, woraus dann folgt, daß eine Wellenbewegung so reflektiert wird, daß der einfallende und reflektierte Strahl mit dem Einfallslot in einer Ebene liegen, und daß der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist.

Diese Form unseres Satzes ist besonders bequem, um die Gesetze der Reflexion an krummen Flächen zu erhalten. Wir können diese als eine stetige Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, deren Normalen nicht wie bei einer Ebene einander parallel, sondern immer anders gerichtet sind. Für jede noch so kleine Ebene gilt unser Reflexionsgesetz; kennt man daher das Gesetz, nach welchem die Normalen der auf einander folgenden kleinen Ebenen geneigt sind, so hat man darin zugleich an allen Punkten die Richtung, nach welcher ein einfallender Strahl und somit eine ankommende Wellenbewegung reflektiert wird.

Ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in dem ersten System v und dem zweiten v' , so verhalten sich die Strecken, durch welche sich die Wellenbewegung in gleichen Zeiten fortpflanzt, wie v zu v' .

Der Radius Dr der Kugel, über welche sich die Wellenbewegung im zweiten Mittel ausbreitet, während dieselbe im ersten sich von C fortpflanzt, ist daher

$$Dr = CC' \cdot \frac{v'}{v}.$$

Von den zwischen D und C' gelegenen Punkten verbreiten sich falls Wellenbewegungen in das zweite Mittel, aber um so später, als selbst von der fortschreitenden Wellenbewegung getroffen werden. Irigend einem Punkte d' beginnt sich die Bewegung erst zu verbreiten, als die Bewegung im ersten Mittel bis $c'd'$ fortgeschritten ist. Hat sich die Bewegung im ersten Mittel bis C' fortgepflanzt, so hat sich von d' die Wellenbewegung im zweiten Mittel über eine Kugel ausgebreitet, deren Radius ϱ glei-

$$\varrho = c' C' \cdot \frac{v'}{v}.$$

Diese Grenze, bis zu der sich die Bewegung im zweiten Mittel ausgebreitet hat, wenn sie im ersten Punktsystem bis C' fortgeschritten ist, ist dann die Fläche, welche alle Kugeln, die um die verschiedenen Punkte d' beschrieben sind, berührt.

Diese Fläche erhalten wir, wenn wir durch C' eine Tangente an um D beschriebenen Halbkreis ziehen und durch diese eine zur $C'Dr$ senkrechte Ebene legen. Denn diese Ebene berührt nicht nur um D mit dem Radius Dr beschriebene Kugel, sondern auch sämtliche um die Punkte d' beschriebenen Kugeln. Ziehen wir von d' aus $d'r'$ senkrecht zu $C'r$, so sind die Dreiecke $d'r'C'$ und $C'r'D$ ähnlich, somit

$$d'r' : Dr = C'd' : C'D.$$

Ebenso sind aber auch die Dreiecke CDC' und $c'd'C'$ ähnlich, somit

$$C'd' : C'D = c'C' : CC'.$$

Da nun ferner

$$Dr = CC' \cdot \frac{v'}{v},$$

so ist

$$d'r' : CC' \cdot \frac{v'}{v} = c'C' : CC',$$

oder

$$d'r' = C'c' \cdot \frac{v'}{v},$$

das heißt die von d' auf $C'r$ herabgelassene Senkrechte ist der Radius der Kugel, die mit dem Radius ϱ um d' beschrieben ist, oder $C'r$ ist Tangente an dem Durchschnitt der Kugel mit der Ebene NDP und somit die $C'r$ gelegte Ebene Tangentialebene an die um d' beschriebene Kugel. Es gilt es für alle um die Punkte d' beschriebenen Kugeln.

Bezeichnen wir nun die Winkel CDC' und $DC'r$, welche die ankommende und die in das zweite System übergegangene Welle mit der Grenzfläche bilden, mit φ und φ' , so haben wir

$$\sin \varphi = \frac{CC'}{CD},$$

$$\sin \varphi' = \frac{Dr}{CD} = \frac{\frac{v'}{v} \cdot CC'}{CD},$$

und daraus

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi'} = \frac{v}{v'}.$$

Der Winkel, welchen die in das zweite Mittel übergegangene Welle mit der Grenzfläche bildet, ist also ein anderer als derjenige, welchen die ankommende Welle mit der Grenzfläche bildet, oder was dasselbe ist, die in das zweite Mittel übergegangenen Wellenstrahlen bilden mit dem Einfallslot andere Winkel als die ankommenden Strahlen. Da aber das Verhältniß $\frac{v}{v'}$ für zwei Mittel konstant ist, so folgt, daß die ankommende Welle unter einem Winkel ankommen kann, unter welchem sie will, sie bewegt sich stets unter einem solchen Winkel gegen die Grenzfläche weiter, daß das Verhältniß der Sinus des Winkels, unter welchem sie ankommt, und des Winkels, unter dem sie weiter geht, konstant ist. Zugleich sieht man, daß der einfallende und gebrochene Wellenstrahl und das Einfallslot in derselben Ebene liegen.

Jede an der Grenzfläche ankommende kugelförmige Welle können wir als eine Reihenfolge sehr kleiner Ebenen betrachten, die alle verschieden gegen die Grenzfläche geneigt sind, deren Neigung gegen die Grenzfläche aber bestimmt wird durch den Winkel, welche die zu ihnen gehörenden Wellenstrahlen, die einzelnen Radien, mit dem Einfallslot bilden. Mit Hilfe des obigen Satzes ist es leicht, die fortgepflanzte Welle im zweiten Punktsystem zu konstruieren.

Wir erhalten als unmittelbare Folge aus unserem Satze, daß beim Übergange einer Wellenbewegung aus einem Punktsystem in ein zweites, für welches der Quotient $\sqrt{\frac{c}{d}}$ kleiner ist als für das erste, der Winkel, welchen der in das zweite Mittel übergegangene Strahl mit dem Einfallslot bildet, kleiner ist als der Winkel, welchen der ankommende Wellenstrahl mit demselben einschließt. Ist dagegen dieser Quotient größer für das zweite als für das erste Mittel, so ist der Winkel, welchen der in das zweite Mittel übergegangene Strahl mit dem Einfallslot bildet, größer. Beim Übergange einer Wellenbewegung aus einem Mittel in ein zweites werden daher die einzelnen Wellenstrahlen stets gebrochen; beim Übergange in ein Mittel von größerer Dichtigkeit werden sie zum Einfallslot hingebrochen, beim Übergange in ein Mittel von geringerer Dichtigkeit werden die Strahlen vom Einfallslot fortgebrochen.

Jede krumme Fläche können wir, wie schon bemerkt wurde, als eine Reihenfolge unendlich kleiner Ebenen betrachten, welche in steter Folge

gegen einander geneigt sind. Für krumme Begrenzungen zweier Mittel muß daher das Brechungsgesetz dasselbe sein; um den Weg der einzelnen Strahlen zu bestimmen, muß man aber das Gesetz kennen, nach welchem die einzelnen, unendlich kleinen Ebenen oder deren Einfallslote gegen einander geneigt sind¹⁾.

Zweites Kapitel.

Von der Wellenbewegung fester Körper.

§ 136.

Schwingende Bewegung einzelner Teile fester Körper infolge der Elasticität. Die im vorigen Kapitel aus den früher erkannten Gesetzen über die Wirkung von Kräften theoretisch abgeleiteten Bewegungserscheinungen können wir in der mannigfachsten Weise in den Körpern hervorbringen. Alle Körper bestehen nach den Entwicklungen des § 46 aus kleinen Teilen, welche durch anziehende und abstoßende zwischen ihnen thätige Kräfte entweder allein wie bei den festen Körpern oder mit Hilfe äußerer Kräfte wie bei den flüssigen und gasförmigen Körpern im Gleichgewicht gehalten werden.

Durch eine Änderung der auf die Körper wirkenden Kräfte wird stets auch eine Änderung dieses Gleichgewichtszustandes herbeigeführt.

¹⁾ Die in diesem Kapitel vorgetragenen Sätze finden sich vorzugsweise in den Abhandlungen von *Fresnel* und andern über die Undulationstheorie des Lichtes zuerst in ähnlicher Form entwickelt. Es gilt das besonders von der Ableitung der Gleichungen für die schwingende Bewegung § 123 bis § 130. Dieselben befinden sich in:

Fresnel, Mémoire sur la diffraction de la lumière. Mémoires de l'Acad. de France Tome V. Poggend. Ann. Bd. XXX. Oeuvres complètes. T. I.

Die Sätze über Interferenz der Wellen § 128 in derselben Abhandlung von *Fresnel*, und *Schwerd*, die Beugungserscheinungen des Lichtes. Mannheim 1853.

Die stehenden Wellen durch Interferenz entgegengesetzter Wellenzüge leitet *Fresnel* ähnlich ab in seiner Abhandlung über die Doppelbrechung des Lichtes: Mémoires de l'Acad. de France. Tome VII. Poggend. Ann. XXIII. Oeuvres complètes. T. II. p. 479 ff.

Auf die elliptischen Schwingungen machte zuerst aufmerksam *Fresnel* in seiner Abhandlung über Reflexion des polarisierten Lichtes: Annales de chim. et de phys. XLVI. Poggend. Ann. XXII. *Airy*, Über die Doppelbrechung im Bergkrystall im 4. Bande der Transactions of the Cambridge Philosophical society. Poggend. Ann. XXIII. Die von uns gegebene Ableitung ist im wesentlichen die von *Neumann* in der Abhandlung über die Reflexion an Metallen. Poggend. Ann. XXVI. Man sehe darüber auch *Beer*, Einleitung in die höhere Optik. Braunschweig, 1853. Die Zusammensetzung von Schwingungen verschiedener Wellenlänge ist besonders von *Lissajous* studiert und für akustische Zwecke nutzbar gemacht. Annales de chim. et de phys. 3. Sér. t. LI.

Die Fortpflanzung der Wellen in Punktsystemen und das Huyghenssche Princip ist zuerst von *Huyghens* in seinem Werke Traité de la lumière, Leiden 1690, entwickelt, ebenso die Ableitung des Reflexions- und Refraktions-Gesetzes. Vollständiger von *Fresnel* in der erwähnten Abhandlung über die Beugung des Lichtes und in einem Zusatz derselben: Erklärung der Refraktion des Lichtes, nach der Undulationstheorie. Auf den Unterschied der Reflexion an dichten und dünnern Systemen machte zuerst *Thomas Young* aufmerksam. On the theory of light and colours. Philosoph. Transact of the Royal Society for 1802.

treten Gestaltsänderungen der festen Körper oder Bewegungen in den festen oder gasförmigen Körpern hervor, welche wir in dem zweiten Abschnitte ausführlich betrachtet haben.

Beschränken wir uns zunächst auf die festen Körper, so sahen wir, wie Stäbe durch angehängte Gewichte verlängert, oder durch Druck verkürzt wurden, wie durch Drehung um eine im Innern derselben liegende Achse die einzelnen Schichten der Stäbe gegen einander verschoben wurden, oder wie durch Biegung denselben eine andere Gestalt gegeben werden konnte.

Zugleich sahen wir aber stets bei der Änderung des Gleichgewichtsstandes eines Körpers eine Reaktion auftreten, die uns zeigte, daß in Folge dieser Änderung eine gewisse Spannung zwischen den Molekülen des Körpers auftritt, durch welche sie sich bestreben, in die Gleichgewichtslage zurückzukehren. Diese Rückkehr trat ein, wenn die Änderung in den wirkenden Kräften aufhörte; überschritt die Verlängerung oder Verkürzung des Stabes infolge der angebrachten Gewichte nicht die Elasticitätsgrenze, so kehrte der Stab nach Abnahme der Gewichte zu seiner ursprünglichen Gestalt zurück, war die Biegung nicht so stark, daß die Teilchen eine neue Gleichgewichtslage angenommen hatten, so nahm der Stab seine ursprüngliche Gestalt wieder an.

Vorzüglich bei dieser Rückkehr in den Gleichgewichtszustand treten uns aber Bewegungen auf, welche wir damals, wo wir unser Augenmerk auf den endlichen Zustand der Körper richteten, außer Acht ließen, deren Natur zu erkennen uns aber nach dem Vorigen leicht ist.

Wenn wir einen Stab von gegebener Länge und gegebenem Querschnitt durch ein Gewicht verlängerten, so ergab der Versuch, daß seine Verlängerung proportional war der wirksamen Kraft. Diese Verlängerung war ein endlicher Zustand, in welchen der Körper durch die dauernde Wirkung der Kraft übergeführt wurde, er trat ein, wenn die durch die Entfernung der Teile von einander auftretende Elasticitätskraft dem ziehenden Gewichte gleich wurde. Die Verlängerung ist eine Entfernung der einzelnen Schichten des Stabes von einander, deshalb sind die Entfernungen den Verlängerungen proportional, das heißt, bei doppelter, dreifacher, überhaupt n -facher Verlängerung des Stabes haben sich auch die einzelnen Schichten des Stabes um die doppelte, dreifache, überhaupt n -fache GröÙe von einander, oder um dasselbe ist, von ihrer Gleichgewichtslage entfernt.

Da nun die Verlängerungen des Stabes den spannenden Gewichten proportional sind, und da bei dem endlichen Zustande die Kräfte, mit denen die einzelnen Schichten sich rückwärts anziehen, den spannenden Gewichten GröÙe genau gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt sind, so folgt, daß die Kraft, mit der irgend eine Schicht des Stabes, wenn sie außerhalb der Gleichgewichtslage sich befindet, gegen diese hingezogen wird, dem Abstände derselben von der Gleichgewichtslage proportional ist.

Bei der Rückkehr jeder Schicht in ihre Gleichgewichtslage ist daher Bewegung derselben eine beschleunigte, in derselben angekommen, besitzt sie eine gewisse Geschwindigkeit, vermöge welcher sie sich über die Gleichgewichtslage hinaus bewegt. Wenn sie dieselbe überschritten hat, werden aber die Kräfte in entgegengesetztem Sinne auf sie ein und verlangsamen so allmählich die der Schicht vorher erteilte Geschwindigkeit.

Dann aber tritt, da jetzt wieder dieselben Elasticitätskräfte auf die Schicht einwirken, eine rückgängige Bewegung ein, bei der sich dasselbe wiederholt; die Schicht erhält also eine schwingende Bewegung. Da das Gesetz, nach welchem die wirkenden Kräfte mit der Entfernung der Schicht von der Gleichgewichtslage sich ändern, dasselbe ist, welches wir der Ableitung der schwingenden Bewegung von Punkten zu Grunde legten, so können wir die dort erhaltenen Resultate unmittelbar auf die so entstehenden Schwingungen der festen Körper übertragen.

Ganz das Gleiche gilt von den Bewegungen, welche ein Körper, der durch Biegung oder Torsion aus seiner Gleichgewichtslage gebracht ist, bei der Rückkehr in dieselbe vollführt; auch in diesem Falle ist die Biegung und Torsion der wirkenden Kraft, also die bei der Biegung oder Torsion auftretende elastische Kraft dem Abstände der einzelnen Teile von der Gleichgewichtslage proportional. Bei der Rückkehr in dieselbe muß demnach der Körper schwingende Bewegungen vollführen, welche den vorhin entwickelten Gesetzen folgen.

§ 137.

Longitudinale Schwingungen der Stäbe. Wenn man einen Stab in seiner Mitte oder an einem oder beiden Enden festhält und ihn an einem Ende rasch mit einem Hammer schlägt, oder seiner Länge nach mit der Hand, nachdem sie mit etwas Kolophonium eingerieben ist, oder mit einem nassen Tuche stark reibt, so geraten die Teile des Stabes in longitudinale Schwingungen, das heißt sie bewegen sich in der Richtung der Längsaxe des Stabes hin und her. Bei dieser Bewegung ändert der Stab seine äußere Gestalt nicht merklich, sondern es bilden sich in seinem Innern nur abwechselnde Verdichtungen und Verdünnungen, die sich in der § 125 dargestellten Weise durch den Stab verbreiten, in einem begrenzten Stabe an der Grenze reflektiert werden und dadurch zu stehenden Schwingungen des Stabes Anlaß geben.

Die longitudinalen Schwingungen eines Stabes sind nicht unmittelbar sichtbar, indes hat Savart¹⁾ sie auf folgende Weise sichtbar gemacht. Er befestigte Glas- oder Metallstäbe von verschiedenen Dimensionen auf einer 80 Kilogramm schweren Bleimasse. Ein Sphärometer mit horizontaler Schraube wurde mit dem einen Ende des Stabes zur Berührung gebracht und die Stellung der Schraube abgelesen, dann wurde die Schraube zurückgedreht und der Stab in Schwingungen versetzt. Darauf wurde die Schraube dem Stabe wieder vorsichtig genähert und bei einer bestimmten Stellung zeigte sich, daß die Schraube von dem Stabe in bestimmten Zwischenräumen gestossen wurde, ein Beweis, daß der Stab sich in seiner Längsrichtung abwechselnd ausdehnte und zusammenzog.

Es bedarf übrigens nicht einmal solcher Methoden, um die longitudinalen Schwingungen wahrnehmbar zu machen; sie sind am deutlichsten zu erkennen durch den Ton, welchen sie hervorbringen. Diesen können wir jedoch erst im nächsten Abschnitte betrachten, in welchem wir auch die meisten der sofort abzuleitenden Gesetze experimentell nachweisen werden.

¹⁾ Savart in Annales de chim. et phys. LXV. p. 337.

Über die Fortpflanzung der Bewegung in einem unbegrenzten Stabe haben wir hier nichts hinzuzufügen, sie muß nach den Gesetzen erfolgen, welche wir § 126 ff. ganz allgemein über die Fortpflanzung schwingender Bewegungen in Punktreihen abgeleitet haben. Zwar haben wir es hier nicht mit einfachen Punktreihen zu thun, indes kann man die dort abgeleiteten Gesetze deshalb einfach übertragen, weil alle Punkte einer zur Längsaxe parallelen Schicht dieselbe Bewegung haben, wir also die Stäbe als ein Bündel paralleler Punktreihen betrachten können.

Auch für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in einem solchen Stabe muß der § 127 entwickelte Ausdruck gelten

$$c = C \cdot \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Setzen wir für e , die Elasticität, den Elasticitätsmodulus E der betreffenden Substanz und für d die Masse der Längeneinheit des Stabes von der Einheit des Querschnittes ein, auf welche sich auch der Elasticitätskoefficient bezieht, so ist nach unserer Ableitung des § 126 die konstante GröÙe $= C\sqrt{a} = 1$ zu setzen, da die dort von uns mit e bezeichnete GröÙe, die bei longitudinaler Bewegung der Punkte der Reihe geweckte Elasticität, den Elasticitätskoefficienten des betreffenden Materials bedeutet. Für einen Stab vom Querschnitt q wird demnach¹⁾

$$c = \sqrt{\frac{Eq}{dq}} = \sqrt{\frac{E}{d}}.$$

Da somit aus dem Ausdruck für die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der Querschnitt verschwindet, so folgt, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Schwingungen von dem Querschnitte der Stäbe, in denen sie stattfinden, unabhängig ist.

Daß in der That die rechte Seite der Gleichung eine Geschwindigkeit darstellt, ergibt sich auch aus der Bestimmung der Dimension des Ausdruckes. Wir haben für die Elasticitätskoefficienten nach S. 553

$$E = z_1 (ML^{-1}T^{-2}),$$

für die Dichtigkeit

$$d = z_2 (ML^{-3}),$$

somit

$$\frac{E}{d} = z (L^2 T^{-2}),$$

oder die Quadratwurzel des Ausdruckes ist eine Geschwindigkeit.

Man findet häufig den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit longitudinaler Schwingungen in etwas anderer Form. Setzen wir für E seinen Wert nach § 48 indes in den Kräfteinheiten des absoluten Maßes, so ist

$$E = g \frac{P}{q\delta},$$

wenn P das an den Stab vom Querschnitte q gehängte Gewicht bedeutet, welches demselben die in Bruchteilen der ursprünglichen Länge ausgedrückte

¹⁾ Man sehe auch *Poisson* in Mémoires de l'Acad. Royale de France VIII. p. 444.

Verlängerung δ erteilt. Nehmen wir an, das Gewicht P sei das eines Stabes des gleichen Materials vom Querschnitt q und der Länge l , so ist

$$P = qdl,$$

somit

$$E = g \frac{qd}{q\delta} l = g \frac{d}{\delta} l,$$

und

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}} = \sqrt{\frac{gl}{\delta}}.$$

Setzen wir schliesslich die Länge l gleich der Längeneinheit, und bezeichnen mit δ_1 die Verlängerung des Stabes durch ein Gewicht P , welches gleich dem eines Stabes von dem gleichen Material, dem gleichen Querschnitt q und der Längeneinheit ist, so ist

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta_1}}.$$

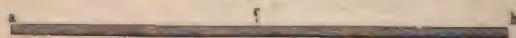
Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in einem Stabe ist demnach gleich dem Quotienten aus der Quadratwurzel, aus der Beschleunigung bei dem freien Fall und der Quadratwurzel aus der in Bruchteilen der Stablänge gegebenen Verlängerung, welche er durch das Gewicht eines Stabes gleichen Materials, gleichen Querschnitts und der Einheit der Länge erfährt. Letztere Verlängerung können wir auch als jene bezeichnen, welche ein Stab von der Länge eins durch ein seinem eigenen gleiches Gewicht erfährt.

Wir werden im nächsten Abschnitte in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in langen Stäben den experimentellen Beweis für die Richtigkeit dieser Ausdrücke erhalten.

§ 138.

Longitudinale Schwingungen begrenzter Stäbe. Wird an irgend einer Stelle eines begrenzten Stabes eine longitudinale Schwingung hervorgerufen, so breitet sich dieselbe durch den Stab aus bis zu den Enden desselben; an den Enden wird die Bewegung reflektiert und durchläuft dann den Stab nach entgegengesetzter Richtung. Da die Reflexion an beiden Enden des Stabes erfolgt, so pflanzen sich kurze Zeit nach Beginn der Schwingungen in dem Stabe Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen fort; es müssen sich somit in dem Stabe stehende Wellen bilden. Die Stäbe geraten also in Schwingungen, deren Dauer von der Länge und dem Material, aus welchem die Stäbe gemacht sind, abhängig ist, und ausserdem von der Art, wie die Stäbe befestigt sind. Wir wollen zunächst einen Stab betrachten, der wie *ab* (Fig. 223) nur in seiner Mitte leicht gehalten wird, im übrigen aber und besonders an seinen Enden frei ist. Wir nehmen an, das Ende *b* sei etwa durch Klopfen mit einem Hammer oder dadurch, dass der Stab mit einem feuchten Tuche von der Mitte gegen *b* hin gestrichen wird, in eine schwingende

Fig. 223.



Bewegung versetzt, deren Amplitude α und deren Schwingungsdauer T sei. Die Bewegung pflanzt sich dann durch den Stab bis zu dem Ende a fort, wird dort reflektiert und kehrt in dem Stabe gegen b zurück. Da die Dichtigkeit der Luft gegenüber derjenigen des festen Körpers eine sehr kleine ist, wird die Amplitude der Bewegung bei der Reflexion so wenig geschwächt, daß wir dieselbe auch für die gegen b zurückkehrende Bewegung gleich α setzen können. Die Reflexion geschieht ferner, da das zweite Mittel ein dünneres ist, ohne Umkehr des Vorzeichens der Schwingungen. Die stetig von b ausgehenden und die von a reflektierten Schwingungen sind es dann, welche sich in dem Stabe zu stehenden Wellen zusammensetzen.

Rechnen wir die Zeit t von dem Momente an, in welchem das Ende b eine Schwingung beginnt, so wird zur Zeit t die Bewegung einer Moleküllschicht, welche von b um die Strecke x entfernt ist, durch folgende Gleichungen gegeben sein. Erstens ist der Abstand y_1 der Moleküllschicht von der Gleichgewichtslage durch die bei b erregte Bewegung

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

Die Bewegung, welche von b ausgeht, wird bei a reflektiert, nachdem sie die Länge l des Stabes durchlaufen hat, sie hat dann noch, um zu der betrachteten um x von b entfernten Moleküllschicht zu gelangen, den Weg $l - x$ zurückzulegen. Da sie nun bei a ohne Änderung des Vorzeichens reflektiert wird, so ist der Abstand y_2 der betrachteten Schicht von der Gleichgewichtslage zur Zeit t infolge dieser Bewegung

$$y_2 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda} \right),$$

die resultierende Bewegung ist deshalb

$$Y = y_1 + y_2 = 2\alpha \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right).$$

Die Gleichung zeigt, daß die Bewegung diejenige stehender Wellen von der Schwingungsdauer T ist. Die Anzahl der sich auf dem Stabe ausbildenden stehenden Wellen hängt ab von der Länge des Stabes und der Schwingungsdauer T . Welche stehende Wellen sich auf dem Stabe überhaupt ausbilden können, ergibt sich aus der Bedingung, daß jedenfalls an den Enden des Stabes ein Schwingungsmaximum sein muß, das heißt also, daß dort die Amplitude der Bewegung jedenfalls den größten Wert 2α haben muß. Da die Amplitude der Bewegung der verschiedenen durch den Abstand x vom Ende b gegebenen Moleküllschichten durch den Faktor

$$2\alpha \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda}$$

gegeben ist, so folgt, daß

$$\cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda} = \pm 1 \text{ sein muß für } x = 0 \text{ und } x = l.$$

Es muß somit

$$\cos 2\pi \frac{l}{\lambda} = \pm 1; \quad 2\pi \frac{l}{\lambda} = n\pi, \quad l = n \frac{\lambda}{2},$$

es muß also die Länge des Stabes irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge sein. Oder es können nur solche Schwingungen in dem Stabe zu stehenden Wellen Anlaß geben, deren Oscillationsdauern so sind, daß während einer oder zwei oder irgend einem Vielfachen einer halben Oscillationsdauer die Bewegung sich durch die ganze Länge des Stabes fortpflanzt.

Die langsamsten Schwingungen, welche der Stab annehmen kann, sind somit solche, für welche $l = \frac{1}{2} \lambda$. Da nun, wenn c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung im Stabe ist, somit

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}},$$

zwischen λ und T die Beziehung besteht

$$\lambda = cT = T \cdot \sqrt{\frac{E}{d}},$$

so folgt für die Dauer der langsamsten Schwingungen

$$T = \frac{2l}{c} = 2l \sqrt{\frac{d}{E}}.$$

Die Schwingungsdauer des Stabes ist also gleich der doppelten Länge des Stabes dividiert durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Stabe; sie ist deshalb unabhängig von der Größe und der Form des Querschnitts, sie wird nur bedingt von der Länge, dem Elasticitätskoeffizienten und dem spezifischen Gewichte des Materials, aus dem der Stab besteht.

Die in einer Sekunde von dem Stab vollführte Anzahl von Schwingungen ist

$$N = \frac{1}{T} = \frac{c}{2l} = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

sie ist also gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der doppelten Länge des Stabes.

Die Bewegung, welche die einzelnen Teile des Stabes vollführen, ergibt sich aus der Betrachtung der Werte y , wenn wir den Moment fixieren, in dem

$$\sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right) = 1.$$

Dann ist

$$y = 2\alpha \cos 2\pi \frac{l-x}{\lambda};$$

somit ist für

$$\begin{array}{llllll} x=0 & x=\frac{1}{4}l=\frac{1}{8}\lambda & x=\frac{1}{2}l=\frac{1}{4}\lambda & x=\frac{3}{4}l=\frac{3}{8}\lambda & x=l=\frac{1}{2}\lambda \\ y=2\alpha & y=\alpha\sqrt{2} & y=0 & y=-\alpha\sqrt{2} & y=-2\alpha \end{array}$$

Die Mitte des Stabes ist somit ein Knotenpunkt, der stets in Ruhe bleibt, und die beiden Hälften des Stabes schwingen jede wie eine halbe stehende Welle, so daß die beiden Hälften stets in entgegengesetzter Weise schwingen.

Gibt man den erregten Schwingungen die halbe Dauer, so kann ebenfalls der Stab in stehende Schwingungen geraten. Es ist dann $l = \lambda$

$$T_1 = \frac{\lambda}{c} = \frac{l}{c} = \frac{2l}{2c}.$$

Die Bewegung des Stabes erhalten wir wieder, indem wir die Werte von y betrachten, wenn der von der Zeit abhängige Koeffizient der Gleichung für $y = 1$ ist.

Dann wird, da jetzt $l = \lambda$ für

$$\begin{array}{llllll} x = 0 & x = \frac{1}{4}l = \frac{1}{4}\lambda & x = \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}\lambda & x = \frac{3}{4}l = \frac{3}{4}\lambda & x = l = \lambda \\ y = 2\alpha & y = 0 & y = -2\alpha & y = 0 & y = 2\alpha. \end{array}$$

In dem Stabe sind somit zwei Knotenpunkte in $\frac{1}{4}l$ und $\frac{3}{4}l$; das zwischen den beiden Knotenpunkten liegende Stück schwingt als eine stehende Welle, und die beiden Viertel zwischen den Knotenpunkten und den Enden als halbe stehende Wellen; diese beiden halben stehenden Wellen sind unter sich in gleicher Phase, das zwischen den Knotenpunkten liegende Stück ist in gerade entgegengesetzter Phase.

Die Schwingungszahl ist in diesem Falle die doppelte von vorher

$$N_1 = 2 \frac{c}{2l}.$$

Allgemein können in dem Stabe stehende Wellen existieren, deren Schwingungsdauern T_n und Schwingungszahlen N_n sind

$$T_n = \frac{2l}{n \cdot c} \quad N_n = n \frac{c}{2l},$$

woin n jede ganze Zahl sein kann. Es entstehen dann in dem Stabe n Knotenpunkte, von denen die den Enden nächsten von den Enden um $\frac{l}{2n}$ entfernt sind, und welche überhaupt im Stabe einen Abstand von $\frac{l}{n}$ besitzen. Einer Ableitung im einzelnen wird es nach dem Vorigen nicht bedürfen.

Mit denselben Schwingungszahlen kann ein Stab schwingen, wenn seine beiden Enden fest eingeklemmt sind, jedoch ist der Bewegungszustand oder die Verteilung der Bewegung in dem Stabe dann eine ganz andere. Es folgt das schon daraus, daß in dem Falle die Enden des Stabes, da sie fest eingeklemmt sind, stets in Ruhe sein müssen. Um die Bewegung des Stabes zu erhalten, nehmen wir an, es sei an irgend einer Stelle des Stabes etwa durch Reiben eine schwingende Bewegung erzeugt, und es sei durch im Abstände d von dem Ende b ein Schwingungsmaximum entstanden. Wir rechnen die Zeit t von dem Beginne der Schwingungen an dieser Stelle. Von hier aus pflanzt sich die Bewegung im Stabe nach beiden Seiten fort, wird an den Grenzen a und b reflektiert und geht von diesen Enden im Stabe wieder zurück. Da die beiden Stabenden als fest ausgesetzt werden, so geschieht die Reflexion so, wie an einem Mittel in unendlich großer Dichtigkeit; somit tritt ein Wechsel des Vorzeichens der Bewegung oder Verlust einer halben Wellenlänge an beiden Enden ein, die reflektierte Amplitude hat aber merklich dieselbe GröÙe als die ankommende.

Die Bewegung, welche eine um x von b entfernte Molekülschicht in jeder der beiden zu ihr kommenden erhält, ist durch folgende beiden Gleichungen gegeben. Erstens für die an b reflektierte Bewegung

$$y_1 = -\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right);$$

zweitens für die an a reflektierte

$$y_2 = -\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l-d}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda} \right);$$

somit wird die resultierende Bewegung

$$y = y_1 + y_2 = -2\alpha \cos 2\pi \frac{l-d-x}{\lambda} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right).$$

Die in dem Stabe möglichen Bewegungen ergeben sich wieder aus den für Stabenden vorhandenen Bedingungen, daß für diese stets $y = 0$ sein muß. Es muß deshalb für $x = 0$ und für $x = l$ der Wert von y immer sein, oder es muß

$$\cos 2\pi \frac{l-d}{\lambda} = 0 \quad \cos 2\pi \frac{d}{\lambda} = 0,$$

oder es muß sowohl

$$2\pi \frac{l-d}{\lambda} = (2n+1) \frac{\pi}{2}; \quad l-d = (2n+1) \frac{\lambda}{4},$$

als auch

$$2\pi \frac{d}{\lambda} = (2n+1) \frac{\pi}{2} \quad d = (2n+1) \frac{\lambda}{4},$$

worin n jede ganze Zahl sein kann. Der Abstand der Stelle des Stabes, an welchem ein Schwingungsmaximum vorhanden ist, muß demnach zwischen beiden Stabenden ein ungerades Vielfaches von einer viertel Wellenlänge entfernt sein. Daraus folgt, daß die Länge des Stabes selbst irgend eine Anzahl von halben Wellenlängen sein muß. Ist die Zahl derselben n , so folgt wie vorhin für die Schwingungsdauer T_n und Schwingungszahl

$$T_n = \frac{1}{n} \frac{2l}{c} \quad N_n = n \frac{c}{2l}.$$

Die Verteilung der Bewegung im Stabe ist für die einzelnen n leicht zu erhalten. Ist $n = 1$, so ist $l = \frac{1}{2}\lambda$; $d = \frac{1}{4}\lambda$. Es wird dann wenn das von der Zeit abhängige Glied der Gleichung ± 1 ist, sein

$$\begin{array}{cccccc} x = 0 & x = \frac{1}{4}l = \frac{1}{8}\lambda & x = \frac{1}{2}l = \frac{1}{4}\lambda & x = \frac{3}{4}l = \frac{3}{8}\lambda & x = l \\ y = 0 & y = +\alpha\sqrt{2} & y = +2\alpha & y = +\alpha\sqrt{2} & y = 0 \end{array}$$

Der Stab schwingt somit als eine stehende Welle, deren Knotenpunkte die Endpunkte des Stabes sind.

Ist $n = 2$, so ist $l = \lambda$ und d entweder gleich $\frac{1}{4}\lambda$ oder $\frac{3}{4}\lambda$; sei wir $d = \frac{1}{4}\lambda$, so wird, wenn der von der Zeit abhängige Faktor gleich ist, aus

$$y = -2\alpha \cos 2\pi \frac{\frac{3}{4}l - x}{\lambda} = -2\alpha \cos 2\pi \frac{\frac{3}{4}l - x}{\lambda}$$

$$\begin{array}{cccccc} \text{für } x = 0 & x = \frac{1}{4}l = \frac{1}{4}\lambda & x = \frac{1}{2}l = \frac{1}{2}\lambda & x = \frac{3}{4}l = \frac{3}{4}\lambda & x = l \\ y = 0 & y = 2\alpha & y = 0 & y = -2\alpha & y = 0 \end{array}$$

Der Stab erhält in der Mitte einen Knotenpunkt, jede Hälfte schwingt eine stehende Welle.

Ist $n = 3$, so zerfällt der Stab in drei stehende Wellen, die Knotenpunkte liegen in $\frac{1}{3}$ der Stablänge von den Enden und von einander. Wenn zerfällt der Stab in n stehende Wellen und die Knotenpunkte in $\frac{1}{n}$ Stablänge von den Enden und von einander.

Die Schwingungszahlen werden andere, wenn wir den Stab an einem Ende etwa bei a fest einklemmen, dagegen das Ende b freilassen. Betrachten wir das Ende b als den Ursprung der Bewegung, so werden die Auslenkungen für eine Moleküllschicht im Abstände x von b , da die von b kommenden Bewegungen bei a mit Wechsel des Vorzeichens reflektiert werden,

$$y_1 = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

$$y_2 = -\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} - \frac{l-x}{\lambda} \right),$$

wird die resultierende

$$y = y_1 + y_2 = 2\alpha \cdot \sin 2\pi \frac{l-x}{\lambda} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{l}{\lambda} \right).$$

Die in dem Stabe möglichen Bewegungen erhalten wir auch hier wieder unter den Bedingungen für die Enden des Stabes. Am Ende b , also wo $x = 0$ ist, müssen die Amplituden den größten Wert haben, da das Ende a , am Ende a , wo $x = l$ ist, muß y zu allen Zeiten gleich Null sein. Letzteres ist schon nach der Form der Gleichung erfüllt. Zur Bestimmung der Beziehung zwischen l und λ haben wir daher nur zu bedingen, daß

$$\sin 2\pi \frac{l}{\lambda} = \pm 1$$

$$2\pi \frac{l}{\lambda} = (2n + 1) \frac{\pi}{2}; \quad l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4}.$$

Es können demnach nur solche stehende Wellen in dem Stabe bestehen, welche die Länge des Stabes eine viertel Wellenlänge oder ein ungerades Vielfaches von einer viertel Wellenlänge ist. Da auch hier die Auslenkung besteht $\lambda = cT$, so folgt für die Schwingungsdauer und Schwingungszahl

$$T_n = \frac{4l}{(2n + 1)c} \quad N_n = (2n + 1) \frac{c}{4l}.$$

Die langsamsten Schwingungen sind jene, für welche $n = 0$, also $l = \frac{1}{4}\lambda$ ist, deren Schwingungsdauer ist

$$T = \frac{4l}{c}.$$

Die langsamsten Schwingungen eines an einem Ende festen, an dem andern freien Stabes haben also die doppelte Dauer, als wenn der Stab an beiden Enden frei oder an beiden Enden fest ist.

In dem Falle nehmen die Werte von y , wenn der von der Zeit t abhängige Faktor der Gleichung gleich 1 ist, ab von $y = 2\alpha$. Wenn $x = l$ ist, wenn $x = l$ ist. Der Stab schwingt dann als eine halbe Welle.

Die nächst rascheren Schwingungen sind jene, für welche $n = 1$ ist, deren Dauer ist

$$T = 3 \frac{4l}{c}.$$

Man findet leicht, daß dann in $\frac{1}{3}$ des Stabes vom freien Ende ein Knotenpunkt vorhanden ist, so daß $\frac{2}{3}$ des Stabes als eine stehende Welle und das letzte Drittel am freien Ende als eine halbe stehende Welle schwingt.

Dann können Schwingungen im Stabe bestehen, deren Anzahl die fünffache, siebenfache etc. ist, so daß die überhaupt möglichen Schwingungszahlen sich verhalten, wie die Reihe der ungeraden Zahlen. Bei der fünffachen Schwingungszahl entstehen in dem Stabe drei, bei der siebenfachen fünf, überhaupt bei der $(2n + 1)$ fachen $2n - 1$ Knotenpunkte, es entstehen n ganze und eine halbe stehende Welle. Einer Ableitung im einzelnen wird es nicht bedürfen.

Die soeben als möglich erkannten Teilungen der Stäbe bei longitudinalen Schwingungen sind ziemlich schwierig herzustellen; man kann sie dadurch hervorrufen, daß man die vorher bestimmten Stellen festhält, indes gelingt es selten, willkürlich eine ganz bestimmte Teilung des Stabes mit vielen Knotenpunkten zu erhalten. Die Teilung tritt aber häufig auch ohne Festhalten der verschiedenen Stellen ein durch fortgesetztes Reiben des Stabes der Länge nach oder mehrfaches Schlagen an seinen Enden; wir werden im nächsten Abschnitt das an den verschiedenen Tönen erkennen, welche der Stab gibt.

Die in dem letzten Paragraphen für an beiden Enden feste Stäbe abgeleiteten Sätze gelten unmittelbar auch für zwischen zwei festen Punkten ausgespannte Saiten, da dieselben nichts anders sind, als Stäbe von sehr geringem Querschnitt.

§ 139.

Transversale Schwingungen der Saiten. Spannt man eine dünne, inöglichst vollkommen biegsame Schnur von großer Länge aus und versetzt dieselbe durch rasches Auf- und Abbewegen des einen Endes in transversale Schwingungen, so sieht man, wie diese an der Stelle, an der man sie hervorbrachte, verschwinden, sofort aber an immer anderen Stellen derselben auftreten; sie pflanzen sich als Wellenberg und Wellenthal auf der Schnur fort, nach und nach erhalten immer andere Teile der Schnur die Gestalt einer Welle, wie wir sie in dem vorigen Kapitel bei den transversalen Schwingungen einer Punktreihe abgeleitet haben.

Die transversalen Schwingungen einer Schnur bestehen in auf- und abgehenden gegen die Längsrichtung senkrechten Bewegungen der einzelnen Punkte, sie haben demnach eine Gestaltsänderung derselben zur Folge, welche unmittelbar sichtbar ist und bei nicht zu raschen Bewegungen recht gut beobachtet werden kann.

Die Gesetze der Fortpflanzung transversaler Wellen in dünnen Schnüren oder Saiten, die an sich nicht elastisch aber durch Gewichte schwach gespannt sind, so daß jeder Punkt eine bestimmte Ruhelage hat, müssen mit den im vorigen Kapitel abgeleiteten Gesetzen über die Fortpflanzung transversaler Wellen in Punktreihen übereinstimmen, so lange die Schnüre oder Saiten eine so geringe Dicke haben, daß wir annehmen dürfen, alle Puncte

des Querschnittes bewegen sich ganz in gleicher Weise und die Auslenkungen seien so klein, daß wir die bei einer Ausbiegung stattfindende Verlängerung vernachlässigen können. An Stelle der durch die Verschiebung der Punkte in einer elastischen Punktreihe geweckten elastischen Kraft tritt einfach die Spannung der Saite.

Um das zu zeigen, können wir direkt die Entwicklungen des § 126 anwenden, welche uns die Beschleunigung eines Punktes in einer schwingenden Punktreihe lieferten. Ist $\alpha\eta$ (Fig. 224) ein Stück der schwingenden Saite, etwa eine halbe Wellenlänge, und sind $\alpha, \beta, \gamma \dots$ benachbarte Querschnitte einer an einem Ende befestigten, durch an dem andern Ende angehängten Gewicht p gespannten Saite, so wird auch hier infolge der Spannung jeder einzelne Querschnitt nach beiden Seiten gegen die benachbarten Querschnitte hingezogen und zwar mit einer den Einheiten des absoluten Systems ausgedrückten der Spannung gp gleichwertigen Kraft. Der Querschnitt ϵ wird demnach einerseits gegen δ , andererseits gegen ζ mit der Kraft gp hingezogen; infolge dessen suchen sich die Punkte in ihre relative Gleichgewichtslage zu ziehen, in welcher sie alle in einer geraden Linie, der Ruhelage der Saite sich befinden. Die Gleichgewichtslage von ϵ in Bezug auf ζ ist b , in Bezug auf δ ist b' . Die Kraft, mit welcher der Punkt nach b getrieben wird, ist gleich der zu ϵb parallelen Komponente der Spannung, also gleich $gp \sin \epsilon \zeta b$; und ebenso ist die ihn nach b' treibende Kraft gleich $gp \sin \epsilon \delta b'$. Die den Punkt ϵ nach der Gleichgewichtslage, also gegen a hintreibende Kraft ist somit

$$gp (\sin \epsilon \zeta b - \sin \epsilon \delta b').$$

Es ist

$$\sin \epsilon \zeta b = \frac{\epsilon b}{\epsilon \zeta}; \quad \sin \epsilon \delta b' = \frac{\epsilon b'}{\epsilon \delta},$$

da wir, da ausdrücklich vorausgesetzt wurde, daß wir die Verlängerung der Saite vernachlässigen dürfen, $\epsilon \zeta = \epsilon \delta = ad$ setzen dürfen. Die den Querschnitt ϵ gegen a treibende Kraft ist somit

$$gp \cdot \frac{\epsilon b - \epsilon b'}{ad}.$$

Beschleunigung wird deshalb, wenn m die Masse des Querschnittes ist,

$$\frac{gp}{m} \cdot \frac{\epsilon b - \epsilon b'}{ad},$$

oder auch, wenn d die Masse der Längeneinheit der Saite ist,

$$\frac{gp}{d} \cdot \frac{\epsilon b - \epsilon b'}{ad^2}.$$

Wir erhalten somit ganz denselben Ausdruck wie § 126, mit dem Unterschiede nur, daß an Stelle der Elasticität ae , welche in der Punktreihe durch die Verschiebung der Punkte geweckt wird, die Spannung gp tritt. Bezeichnen wir mit α die Amplitude und mit T die Schwingungszahl der erregten Bewegung, ferner mit λ die Wellenlänge, so ergibt sich ebenfalls auch aus einer der im § 126 gemachten identisch gleichen Ent-

Fig. 224.



wicklung zur Zeit t nach Beginn der Schwingung für den Abstand y Punktes, welcher vom Ausgangspunkt der Bewegung um die Strecke x entfernt ist:

$$y = \alpha \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Ist c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung, so ist auch $\lambda = cT$ und

$$c = \sqrt{\frac{g p}{d}}.$$

Ist q der Querschnitt und s das spezifische Gewicht der Saite, so ist

$$d = q s,$$

somit

$$c = \sqrt{\frac{p \cdot g}{q \cdot s}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung ist demnach Quadratwurzel aus dem spannenden Gewichte direkt, derjenigen aus dem Querschnitt der Saite und ihrem spezifischen Gewichte umgekehrt proportional. Die Gebrüder W. und E. H. Weber haben durch Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen auf dünnen Schnüren die volle Einstimmung der Theorie mit der Erfahrung nachgewiesen.

Sie wandten zu ihren Versuchen eine runde aus sehr feinem Wollfaden auf Maschinen geklöppelte Schnur an, welche sehr gleich biegsam, wenig elastisch war und bei einer Länge von 16,058 52,612 Gramm wog. Dieselbe wurde dadurch horizontal aufgespannt, man sie an ihrem einen Ende mit einer Schraube und mit ihrem

Ende an einem Rade befestigte (Fig. 225). Das Rad hatte einen Durchmesser von über 30 Centimeter und war in sehr genau gearbeiteten Axen aufgehängt, recht frei beweglich zu machen. Die Schnur bei a in einem Abstände von 14,4 Centimeter der Axen der Rolle befestigt, so daß sie die Tangente des Rades zog. Bei b war eine Klemme befestigt, an der sich ein Körbchen befand, das die spannenden Gewichte aufzunehmen

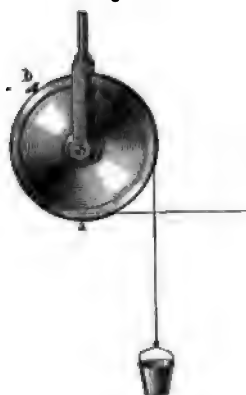


Fig. 225.

Die Wellen wurden 15 Centimeter von der Schnur durch einen raschen Stoß erregt, man sah sie dann zu dem einen Ende der Schnur hinlaufen und als reflektierte Wellen, die Berge in Täler und umgekehrt, da die Schnur bei b war, also an ein dichteres Mittel grenzte, zurückkehren.

Die Zeit, welche die Welle brauchte, um die Schnur zu durchlaufen, wurde mittels einer Uhr gemessen, welche noch $\frac{1}{10}$ einer Sekunde und stets die Zeit beobachtet, in welcher die vom Rade ausgehende Welle einmal oder zweimal oder viermal zum Rade zurückkehrte.

Die Versuche ergaben erstens, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen unabhängig ist von der Größe der Wellen, denn stets bei

¹⁾ Euler in den Actis Petropolitanis pro 1779 Tom. I. Petrop. 1783

Die Welle dieselbe Zeit zum Durchlaufen der Schnur, mochte sie durch ein kurzes und schwaches Schnellen mit dem Finger oder durch ein längeres und stärkeres Schlagen erzeugt werden. Im erstern Falle muß die Welle kürzer sein, wie es auch die Beobachtung ergab.

Ferner fanden die Gebrüder Weber, daß die Wellen, wie es auch unsere Theorie verlangt, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen, wenn man die Schnur 2, 3, 4 . . mal zu durchlaufen, brauchte die Welle auch doppelte, drei- und vierfache Zeit.

Nach diesen Versuchen machten sie genaue Messungen und fanden die genaueste die von Euler gegebene Formel bestätigt. Die Schnur wurde nach einander durch drei verschiedene Gewichte gespannt, nämlich 610,5 — 2027,5 — 4226,4 Gramm¹⁾.

Es ergab sich, daß im ersten Falle die Welle einen Raum von 33,244^m 46 Sechzigstel, im zweiten denselben Raum in 24,8 Sechzigstel und im dritten Falle in 16,25 Sechzigstel Sekunden durchlief. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten oder die in diesen drei Fällen in einer Sekunde durchlaufenen Räume sind demnach

$$\text{im ersten Falle } c_1 = \frac{60 \cdot 33^m,244}{46} = 43^m,361,$$

$$\text{im zweiten Falle } c_2 = \frac{60 \cdot 33^m,244}{24,8} = 80^m,429,$$

$$\text{im dritten Falle } c_3 = \frac{60 \cdot 33^m,244}{16,25} = 122^m,713.$$

Um diese Zahlen mit unserer Formel zu vergleichen, haben wir in unserer Formel

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot p}{q \cdot s}}$$

für p die betreffenden spannenden Gewichte; für $q \cdot s$ das Gewicht der Längeneinheit der Schnur und für g die Beschleunigung der Schwere, 9,808 anzusetzen.

Das Gewicht der ganzen Schnur von 16,622 Meter Länge war 52,612 Gramm, daher das Gewicht der Längeneinheit

$$q \cdot s = \frac{52,612}{16,622}$$

und setzen wir die betreffenden Zahlenwerte in die Formel ein, so wird

$$c_1 = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 610,5 \cdot 16,622}{52,612}} = 43^m,483,$$

$$c_2 = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 2027,5 \cdot 16,622}{52,612}} = 79^m,254,$$

$$c_3 = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 4226,4 \cdot 16,622}{52,612}} = 114^m,434.$$

¹⁾ Wellenlehre, auf Experimente gegründet etc. von den Brüdern E. H. und F. Weber. Leipzig 1825. p. 464 ff.

Man sieht, die Übereinstimmung zwischen den beobachteten und rechneten Zahlen ist so groß, daß sie der schönste Beweis für die Richtigkeit der Theorie sowie für die Genauigkeit der Messungen ist.

Vergleichen wir den Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen mit dem für die longitudinalen Wellen, so ergibt sich eine merkwürdig einfache Beziehung¹⁾.

Für die longitudinalen Wellen hatten wir

$$c = \sqrt{\frac{E}{d}}$$

oder da für longitudinale Schwingungen einfach $d = s$, wenn wir das spezifische Gewicht bezeichnen,

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

für die transversalen

$$c' = \sqrt{\frac{g \cdot p}{q \cdot s}},$$

daraus ergibt sich

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{g \cdot p}{q \cdot s}} : \sqrt{\frac{E}{s}} = \sqrt{\frac{g \cdot p}{q \cdot E}}.$$

Wir sahen früher, daß die Längenzunahme C eines Stabes von Länge l , dem Querschnitt q , durch ein Gewicht p , wenn E der Elasticitätsmodulus ist, gleich ist

$$C = \frac{1}{E} \frac{g p l}{q},$$

demnach

$$\frac{C}{l} = \delta = \frac{g p}{q E}.$$

Es folgt also

$$\frac{c'}{c} = \sqrt{\delta}$$

oder das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen und derjenigen der longitudinalen Wellen in einem durch Spannung elastischen fadenförmigen Körper ist gleich der Quadratwurzel aus der Längenerweiterung, welche die Längeneinheit des Körpers durch das spannende Gewicht erfährt, vorausgesetzt, daß durch dasselbe die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird.

§ 140.

Stehende Schwingungen von fadenförmigen durch Spannung elastischen Körpern. Wenn man eine gespannte Saite in irgend einer Weise, etwa durch Zupfen an einer Stelle in Schwingungen versetzt, pflanzen sich diese Schwingungen bis an die Enden fort, werden dort, die Enden der Saiten stets fest sein müssen, mit Umkehr des Vorzeichens reflektiert und pflanzen sich dann in der Saite rückwärts fort. Die entgegenkommenden Schwingungen müssen stehende Wellen liefern, deren Schwingungsdauer von der Größe der Spannung, der Länge und dem Querschnitt der Saite und dem spezifischen Gewichte des Materials abhängig ist.

¹⁾ Poisson, Mémoires de l'Académie de France. Tome VIII. p. 422 und 423.

Die in der Saite möglichen Schwingungen und deren Dauer ergeben sich ganz genau in derselben Weise, wie wir die Schwingungen longitudinal hringender Stäbe erhielten, welche an beiden Enden fest sind. Wir gehen durch eine der im § 138 für den Fall der festen Enden durchgeführten wörtlich gleiche Entwicklung zu dem Resultate, daß in einer gespannten Saite alle jene Schwingungen stehende Wellen veranlassen können, für welche die Länge der Saite irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge ist. Da, wenn T die Schwingungsdauer, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und λ die Wellenlänge der Bewegung ist,

$$T = \frac{\lambda}{c},$$

folgt, da l immer gleich $n \frac{\lambda}{2}$, somit

$$\lambda = \frac{2l}{n}$$

, worin n jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe sein kann, daß die möglichen Schwingungsdauern gegeben sind durch

$$T = \frac{2l}{nc}.$$

Die Schwingungszahlen, welche gleich dem reciproken Werte der Schwingungsdauern sind, werden deshalb

$$N = n \frac{c}{2l}.$$

Die langsamsten Schwingungen sind jene, für welche n gleich 1 ist, bei denen schwingt die ganze Saite als eine stehende Welle zwischen den festen Endpunkten hin und her. Die Schwingungsdauer ist dann

$$T = \frac{2l}{c} = 2l \sqrt{\frac{q \cdot s}{g \cdot p}}.$$

Dieselbe ist somit der Länge der Saite und der Quadratwurzel aus dem Querschnitte und dem specifischen Gewichte der Saite direkt, der Quadratwurzel aus der Spannung derselben umgekehrt proportional. Nehmen wir, wie meistens der Fall ist, an, daß die Saite einen kreisförmigen Querschnitt vom Radius r hat, so ist $q = r^2 \pi$, und wir können setzen

$$T = 2lr \sqrt{\frac{\pi \cdot s}{g \cdot p}},$$

da die Schwingungsdauer der Saite ist ihrem Durchmesser direkt proportional.

Dieses aus der Theorie sich ergebende Resultat ist von den Gelehrten Weber¹⁾ experimentell geprüft worden durch direkte Messung der Schwingungsdauer der Schnur, welche ihnen zu den im vorigen Paragraphen erwähnten Versuchen gedient hatte. Der Ausdruck für die langsamsten Schwingungen

$$T = \frac{2l}{c}$$

¹⁾ Wellenlehre, auf Experimente gegründet von E. H. und W. Weber. 1825. p. 466.

zeigt, daß die Schwingungsdauer gleich der Zeit ist, in welcher die fortschreitende Bewegung, aus welcher die stehende Schwingung entstanden ist, die doppelte Länge der Schnur durchlaufen würde.

Diese Zeit war in den Weberschen Versuchen resp. 46 — 24,8 — 16,25 Tertian (Sechzigstel Sekunden). In dem ersten der drei Fälle, in welchen die Schnur mit 610,5 Gramm gespannt war, erhielten sie als Schwingungsdauer

$$T = 46,375 \text{ Tertian} = 0,773 \text{ Sekunden}$$

als Mittel aus vielen Versuchen; eine Zahl, welche sich nicht um ein Hundertstel des beobachteten Wertes von dem aus der Theorie folgenden unterscheidet.

Eine weitere experimentelle Bestätigung dieses Satzes werden uns besonders für kürzere und stärker gespannte Saiten im nächsten Abschnitt die durch die Schwingungen der Saiten entstehenden Töne liefern.

Ist n größer als 1, so teilt sich die Saite in mehrere für sich schwingende durch ruhende Knotenpunkte von einander getrennte Teile. Ist $n = 2$, so entsteht ein Knotenpunkt in der Mitte und jede Hälfte der Saite schwingt für sich; ist $n = 3$, so entstehen zwei Knotenpunkte, die je $\frac{1}{3}$ der Saitenlänge von einander entfernt sind.

Man kann die Teilung der Saite bei transversalen Schwingungen leicht hervorrufen und beobachten.

Man unterstützt die Saite ab (Fig. 226) in einem Punkte c , so daß die Länge bc gleich $\frac{1}{n}$ der Länge der Saite ist, z. B. $\frac{1}{4}$, und hängt dann auf die Saite eine Anzahl sogenannter Reiterchen, kleiner leichter Haken von Papier. Streicht man dann die Saite in der Nähe von b oder zupft man sie irgendwo zwischen b und c , so werden die Reiterchen überall von der

Fig. 226.



Saite abgeworfen, nur an den Stellen der Schwingungsknoten bei d und e bleiben sie hängen, ohne eine bedeutende Bewegung zu zeigen.

Es folgt daraus, daß die Saite sich in eine Anzahl für sich schwingender Stücke, ac , cd , de , eb geteilt hat, welche durch nicht bewegte Punkte, die Schwingungsknoten, getrennt sind. Wendet man möglichst biegsame Fäden bei diesen Versuchen an, so findet man die Lage der Knoten, also die Teilung der Saite genau der Theorie entsprechend, man findet immer $n - 1$ Knotenpunkte, welche um $\frac{1}{n}$ der Saitenlänge von den Enden der Saite und von einander entfernt sind.

Der in Fig. 226 dargestellte Versuch ist auch deshalb interessant, weil er zeigt, daß bei einer gespannten Saite der Knotenpunkt die Quelle der Bewegung für dieselbe werden kann. Der Punkt c (Fig. 226) ist durch einen Steg unterstützt, und trotzdem pflanzt sich die Bewegung durch ihn hindurch auf den andern Teil der Saite fort. Man sieht leicht, daß diese Ausbreitung der Bewegung über c hinaus durch die periodischen longitudinalen Impulse veranlaßt wird, die der Punkt c infolge der Bewegung des Stückes bc erfährt.

Die Teilung der Saiten und die Entstehung der stehenden Wellen aus der Interferenz der fortgepflanzten und reflektierten Wellen läßt sich sehr schön durch eine von Melde¹⁾ zuerst benutzte Versuchsanordnung zeigen, welche Fig. 227 darstellt. Auf einem Fußbrett ist vertikal eine gebogene Ablamelle, eine sogenannte Stimmgabel *S* (Fig. 227) aufgestellt. Die beiden Zinken der Gabel trägt ein kleines Hütchen *h*, durch welches ein Seidenfaden gezogen ist, welcher an dem in der Biegung der Gabel befestigten Orbel *w* befestigt ist. Das Hütchen *h* befindet sich vertikal über dem Stiele der Gabel, so daß, wenn die Gabel um den Stiel gedreht wird, das in dem Hütchen befindliche Ende des Fadens sich in der Drehungsaxe befindet. Das andere Ende des Fadens ist an dem auf dem Holzstabe *BB* befindlichen Schieber *K* befestigt. Der Holzstab *BB* wird von dem hinter der Stimmgabel befindlichen Brette getragen; derselbe ist dort auf eine Achse gesetzt, so daß er in vertikaler Ebene drehbar, in jeder Neigung gegen den Horizont festgeklammert werden kann.

Ist der Faden am Stabe horizontal ausgespannt, und ist die Stimmgabel, wie es die Figur zeigt, so aufgestellt, daß die beiden Zinken in der durch den Faden gelegten Vertikalebene sich befinden, so sieht man bei

Fig. 227.

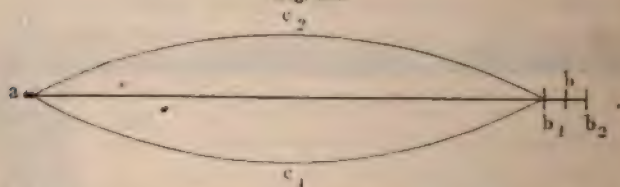


der bestimmten Spannung des Fadens denselben in der Form einer stehenden Welle schwingen, wenn man die Zinken der Gabel in Schwingung versetzt. Die Schwingungen der Gabel kann man entweder dadurch hervorbringen, daß man in der Nähe ihres obern Endes die Gabel mit einem Linbogen in einer dem gespannten Faden parallelen Richtung streicht, oder daß man, in der Weise, wie wir es später bei dem Vokalapparate von Helmholtz beschreiben werden, die Zinken zwischen die Arme eines Elektromagneten stellt, der in rascher Folge periodisch magnetisiert wird. Die Bildung dieser stehenden Schwingung ergibt sich am einfachsten folgender-

¹⁾ Melde, Poggend. Ann. Bd. CIX und CXI.

mafsen. Ist Fig. 228 ab der Faden, welcher bei b an der Stimmgabel befestigt ist, so bewegt sich, wenn die Gabel schwingt, der Befestigungspunkt b zwischen b_2 und b_1 hin und her. Wenn sich der Punkt nach b_1 bewegt hat, ist der Abstand ab_1 kleiner als die Länge des Fadens, der Faden ist nicht mehr gespannt und die Teile des Fadens sinken durch ihr Gewicht hinab. Das Hinabsinken beginnt bei b , und bei einer gewissen Spannung des Fadens wird es sich bis a fortgepflanzt haben, wenn b bis b_2 gekommen ist. Geht nun b zurück bis b_2 , so verlängert sich der Abstand ab und der Faden nähert sich, indem die Teile desselben nach und nach emporgezogen werden, wieder der geraden Linie, die er bei der angenommenen Spannung des Fadens erreicht, wenn b in b_2 angekommen ist. Geht nun der Befestigungspunkt das zweite Mal von b_2 nach b , so muß der dann nicht mehr gespannte Faden sich krümmen, aber, da seine Teilchen mit einer gewissen Geschwindigkeit in die Gleichgewichtslage eintreten, jetzt nach oben hin, und der Faden nimmt bei der vorausgesetzten Spannung die Lage ac_2b_1 an, wenn der Befestigungspunkt sich bis b_1 bewegt hat. Geht b_1 dann wieder bis b_2 zurück, so kommt der Faden wieder in die Lage ab_2 . Es ergibt sich somit, daß der Faden eine ganze Schwingung macht, wenn die Gabel zwei Schwingungen vollführt.

Fig. 228.



Die Entstehung der schwingenden Bewegung der Saite bei dieser Anordnung ist ganz analog der in Fig. 226 dargestellten, denn auch hier ist der Punkt b für diese Bewegung ein Knotenpunkt, gerade wie der durch den Steg gestützte Punkt der Saite Fig. 226, und wie dort sind es auch hier die longitudinalen Impulse, welche die schwingende Bewegung veranlassen.

Vermindert man die Spannung der Saite auf $\frac{1}{4}$ derjenigen, welche sie bei dem ersten Versuche hatte, so pflanzt sich die Bewegung in ihr nur halb so rasch fort; da die nur von der Bewegung der Gabel abhängige Schwingungsdauer aber dieselbe bleibt, so zerlegt sich die Saite in zwei schwingende Abteilungen, welche durch einen Knotenpunkt in der Mitte von einander getrennt sind. Die Amplituden der Schwingungen sind bei diesen Versuchen so groß, daß die Teilung der Saite in ihre Abteilungen weithin sichtbar ist.

Vermindert man die Spannung auf $\frac{1}{9}$ der anfänglichen, so pflanzt sich die durch die erste Schwingung der Gabel erzeugte Halbwelle nur durch $\frac{1}{3}$ der Saite fort, und der Faden zerlegt sich infolge der Interferenz der von b ausgehenden und von a reflektierten Schwingungen in drei stehende Wellen, deren jede $\frac{1}{3}$ der Fadenlänge hat.

Bei hinreichend langen Fäden kann man die Teilung derselben noch beträchtlich weiter treiben.

Da die Anzahl der stehenden Wellen in einem solchen Faden der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung umgekehrt proportional ist, kann man durch Anwendung verschiedener Fäden von ungleichem Querschnitt und verschieden dichtem Material die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Schwingungen unmittelbar anschaulich machen.

Eine derartige Bildung der stehenden Wellen tritt nicht nur ein, wenn die Ebene der Gabelzinken der durch den Faden gelegten Vertikalebene parallel ist, sondern auch wenn die Gabel zu dieser Ebene senkrecht steht. Die Schwingungen der Gabel, die dann senkrecht zur Längsrichtung des Fadens geschehen, übertragen sich dann unmittelbar als Transversalschwingungen auf den Faden; bei der Kleinheit der Exkursionen der Gabel gegenüber denen des Fadens verhält sich aber auch dann das an der Gabel befestigte Ende im allgemeinen wie ein Knotenpunkt. Bei gleicher Spannung des Fadens ist aber in diesem Falle die Anzahl der stehenden Wellen immer die doppelte von der bei der vorhin besprochenen Befestigungsweise. Der Grund hierfür liegt darin, daß jetzt die Schwingungen der Saite jener Gabel isochron sind, indem jede Schwingung der Gabel eine Schwingung des Fadens veranlaßt, während, wie wir vorhin sahen, bei der andern Befestigungsweise zwei Schwingungen der Gabel erforderlich waren, um eine ganze Schwingung des Fadens zu geben. Ist demnach bei beiden Befestigungen die Spannung des Fadens und damit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieselbe, so muß bei der zweiten Stellung der Gabel die Wellenlänge halb so groß, die Zahl der Wellen also doppelt so groß sein wie bei der ersten. Damit bei der zweiten Stellung dieselbe Anzahl von Wellen entstehe, muß die Spannung des Fadens viermal so groß sein als bei der ersten Stellung.

Am Schlusse des vorigen Paragraphen erwähnten wir die zuerst von Biot angegebene Beziehung zwischen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und der transversalen Schwingungen der gespannten Saiten; dieselbe Beziehung muß, wie sich unmittelbar ergibt, zwischen den transversalen und longitudinalen Schwingungszahlen bestehen.

Die Schwingungszahl einer longitudinal schwingenden, an ihren beiden Enden befestigten Saite ist allgemein

$$N = \frac{n}{2} \frac{c}{l},$$

die transversalen Schwingungen

$$N' = \frac{n}{2} \frac{c'}{l}.$$

Es folgt daraus

$$\frac{N'}{N} = \frac{c'}{c} = \sqrt{\delta},$$

so wie vorhin δ das Verhältnis der Verlängerung der schwingenden Saite infolge des spannenden Gewichtes p zur Länge der Saite, oder die Ausdehnung eines Stückes der Saite von der Längeneinheit durch das spannende Gewicht bedeutet.

Dieses von der Theorie geforderte Resultat ist durch einen Versuch

von Cagniard Latour, den Poisson in seinem *Mémoire sur les mouvements des corps élastiques* mitteilt, bestätigt worden¹⁾.

Eine Saite von 14,8 Meter Länge wurde einmal in longitudinale, einmal in transversale Schwingungen versetzt, und die Schwingungszahlen stimmten. Es fand sich

$$\frac{N'}{N} = 0,0593.$$

Die Verlängerung δ der Längeneinheit der Saite ist gleich dem Quotienten aus der Verlängerung der ganzen Saite α und der Länge l derselben; wir erhalten demnach

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{\frac{\alpha}{l}},$$

$$\alpha = l \left(\frac{N'}{N} \right)^2 = 14^m,8 \cdot 0,003513 = 0^m,052.$$

Aus dem Verhältnis der longitudinalen und transversalen Schwingungsberechnen sich somit die Verlängerung der Saite zu $0^m,052$ infolge des spannenden Gewichtes. Die Messung Cagniard Latours ergab

$$\alpha = 0^m,05,$$

eine Zahl, welche sich nur um $\frac{1}{25}$ von der berechneten unterscheidet.

§ 141.

Einfluss der Steifigkeit der Saiten. Wenn man die Versuche über die Lage der Schwingungsknoten und die Schwingungszahlen der Saiten mit großer Sorgfalt anstellt, so findet man besonders bei Metallsaiten merkliche Abweichungen des Resultates von der Theorie. Diese Abweichungen werden um so größer, je kürzer und dicker die Saiten werden. Der Grund dieser Abweichungen ist leicht einzusehen, er liegt besonders darin, dass die Saiten nicht, wie es bei den theoretischen Entwicklungen vorausgesetzt wurde, absolut biegsam sind und nur durch die spannenden Gewichte Elastizität erhalten haben, sondern dass sie selbst an sich schon steif sind. Es wird also durch die gegenseitige Anziehung der einzelnen Moleküle derselben schon eine gewisse Gleichgewichtslage gegeben.

¹⁾ *Poisson, Mémoires de l'Acad. royale de France. Tome VIII. p. 436.* An der Stelle dieser Abhandlung, wo dieser Versuch mitgeteilt ist, hat sich eine Verwirrung eingeschlichen, da anfänglich $\frac{N'}{N} = \frac{7}{188}$ und $\frac{\alpha}{l} = \sqrt{\frac{N'}{N}}$ gesetzt ist. Die erste Zahl ist fehlerhaft, da sie auf ein ganz anderes Resultat führt, als die Gleichung für $\frac{\alpha}{l}$ ist, wie man sieht, falsch. Da die Gleichung nicht mit der Angabe für $\frac{N'}{N}$ auf $\alpha = 0,052$ führt, so habe ich letztere von Poisson als das berechnete α angegebene Zahl als richtig genommen und daraus $\frac{N'}{N}$ berechnet. Das so berechnete Verhältnis ist $\frac{7}{118}$.

Es ist nun leicht ersichtlich, dass die eigene Steifheit der Saiten gerade so wirkt, als wäre die Saite absolut unelastisch, aber durch ein stärkeres Gewicht gespannt als das angehängte und in Rechnung gezogene. Die Schwingungszahlen werden daher gröfser sein als die aus der Theorie abgeleiteten.

Dieses Resultat haben auch die Versuche N. Savarts¹⁾ ergeben, der es sich zur Aufgabe gestellt hatte, das Gesetz aufzusuchen, nach welchem die Schwingungszahlen durch die eigene Steifheit der Saiten sich ändern.

N. Savart befestigte die Saiten an einem festen eisernen Schraubstock, nachdem er sie in Klemmen eingeklemmt hatte, die mit Blei gefüttert waren. Durch ein angehängtes Gewicht P , welches nach und nach geändert wurde, wurde die Saite gespannt und nun von der Saite ein Stück von 80^{mm}, 5 Länge mittels zwei weitem Schraubstöcken an seinen beiden Enden ganz fest eingelegt.

Die Schwingungszahlen der Saite von unveränderlicher Länge bei verschiedenen spannenden Gewichten wurden mittels der beobachteten Töne, welche durch die Schwingungen entstanden, bestimmt, und zugleich nach der Formel

$$n = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g \cdot P}{l \cdot p}},$$

wenn wir mit $p = q \cdot l \cdot s$ das Gewicht der schwingenden Saite bezeichnen, theoretisch berechnet.

Bezeichnen wir die wirklich beobachteten Schwingungszahlen mit N , so fand N. Savart in der That, dass N stets grösser war als n .

Er zog weiter aus seinen Versuchen den Schluss, dass die Differenz zwischen den Quadraten der Schwingungszahlen konstant sei, oder

$$N^2 - n^2 = C$$

Die Konstante C soll nach Savart das Quadrat der Schwingungszahl sein, welche der Saite zukommt, wenn sie nur infolge ihrer eigenen Steifheit schwingt. Bezeichnen wir die Schwingungszahl in dem Falle mit n_0 , so soll also

$$N^2 = n^2 + n_0^2$$

sein.

Duhamel²⁾ hat es versucht, diese von Savart aus seinen Versuchen abgeleitete Regel durch eine einfache Betrachtung theoretisch zu erklären.

Bezeichnet man nämlich mit n und gP die Schwingungszahl und die Spannung einer absolut biegsamen Saite, so ist nach dem Vorigen

$$n^2 = \frac{g}{4lp} \cdot P,$$

wenn g die Beschleunigung der Schwere, l die Länge und p das Gewicht der Saite bedeutet.

Hat man nun eine wirkliche Saite von eben der Länge l und demselben Gewichte p , so hat dieselbe durch ihre Steifigkeit eine gewisse Elas-

¹⁾ N. Savart, Ann. de chim. et de phys. III. Série. T. VI; auch Poggend. Ann. Bd. LVIII.

²⁾ Duhamel, Comptes rendus. Tome XIV. Poggend. Ann. Bd. LVII.

ticität, vermöge welcher sie ohne spannendes Gewicht eine Schwingungszahl n_0 hat. Der absolut biegsamen Saite können wir nun durch ein Gewicht P_1 eine Spannung erteilen, so daß sie genau dieselbe Bewegung annimmt, welche bei der steifen Saite aus der Elasticität hervorgeht und bei der n_0 Schwingungen zurücklegt. In dem Falle hat man für dieselbe

$$n_0^2 = \frac{g}{4lp} \cdot P_0.$$

Fügt man nun zur Spannung P_0 der biegsamen Saite noch die Spannung P_1 hinzu, so befindet sie sich in demselben Zustande wie die steife Saite, wenn sie durch das Gewicht P_1 gespannt ist. Die Spannung der absolut biegsamen Saite ist dann aber $g(P_0 + P_1)$ und ihre Schwingungszahl ist gegeben durch

$$N^2 = \frac{g}{2lp} (P_0 + P_1),$$

oder da für eine Saite von gegebener Länge und gegebenem Gewichte die Schwingungszahl bei der konstanten Spannung P_0 konstant ist,

$$N^2 = n^2 + n_0^2.$$

Ist es gleichgültig, ob eine Saite durch eigene Elasticität oder durch ein angehängtes Gewicht eine gewisse Spannung erhält, so muß auch für die steife Saite, welche infolge ihrer eigenen Elasticität n_0 Schwingungen vollführt, die wirkliche Schwingungszahl N bei der Spannung P sein

$$N = \sqrt{n^2 + n_0^2}.$$

August Seebeck¹⁾ hat indes nachgewiesen, daß die letztere Annahme Duhamels nicht streng und nur für einen bestimmten Fall richtig ist, da dieser Satz auf eine bestimmte Gestalt der schwingenden Saite führt. Wenn man nämlich auch durch ein Gewicht P_0 der unelastischen Saite dieselbe Schwingungszahl geben kann, so läßt sich derselben doch nicht im allgemeinen in allen Teilen dieselbe Bewegung erteilen, wie die Teile der steifen Saite sie annehmen. Zur Herleitung der Savartschen Regel darf er deshalb nicht angewandt werden, weil die Saiten in dem Versuche von Savart nicht der Bedingung entsprechen, die aus dem Satze von Duhamel folgt.

Die Savartsche Regel darf daher auch nur als eine angenäherte gelten.

Seebeck gibt für die Schwingungszahlen der steifen Saiten einen andern Ausdruck, den er theoretisch ableitet und durch Versuche bestätigt. Für gewöhnliche Saiten, deren Steifheit nur sehr gering ist, wird dieser Ausdruck ziemlich einfach, nämlich

$$n = n_1 \left(1 + \frac{r^2}{l} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot \pi}{gP}} \right),$$

worin n_1 die Schwingungen der absolut biegsamen Saite bei der Spannung gP , r den Radius, l die Länge und E den Elasticitätskoefficienten der Saite, in den Einheiten des absoluten Maßsystems, bedeutet.

Man sieht, wie das Verhältniß der beiden Schwingungszahlen sich

¹⁾ A. Seebeck, Berichte der kgl. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1846 — 47, auszügl. von Seebeck selbst. Oove, Reportorium. Bd. VIII.

mer mehr der Einheit nähert, je größer das spannende Gewicht wird, oder kleiner der Quotient der beiden Kräfte $\frac{E}{gP}$ ist. Es ist das zu erwarten, der Einfluß der Steifheit, also der eigenen Elasticität der Saite, um so mehr zurücktreten muß.

§ 142.

Transversalschwingungen von Stäben. Wenn man irgend einem prismatischen oder cylindrischen Stabe eine Biegung erteilt, so gelangt derselbe in stehende Schwingungen. Auch in diesem Falle können wir die stehenden Wellen als ein Resultat der mit einander interferierenden nach entgegengesetzter Richtung fortpflanzenden an den beiden Enden reflektierten Wellen betrachten.

Die Schwingungsdauer solcher Stäbe läßt sich demnach ebenso, wie die Schwingungsdauer der stehenden Wellen bestimmen, oder wir haben wieder

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

im § 127. Wir haben hier indes die Größe k etwas anders zu bezeichnen, da wir es hier nicht mit der Bewegung von Punktreihen, wie in bisherigen Fällen zu thun haben.

Sei ab (Fig. 229) ein Stab, der an seinem Ende b durch ein Gewicht gezogen wird, so sahen wir früher im zweiten Abschnitte, daß die Biegung, Abstand bb' , abhängt von der Größe des Gewichtes, ferner der Länge, Breite und Dicke des Stabes. Setzen wir denselben als prismatisch voraus und setzen seine Länge gleich l , die Breite gleich β und die Dicke gleich h , so war, wenn wir das biegende Gewicht mit P bezeichnen¹⁾,

$$bb' = \frac{E}{4} \frac{gP \cdot l^3}{\beta h^3},$$

wo gP die elastische Kraft, welche den gebogenen Stab in die Gleichgewichtslage zurücktreibt,

$$gP = \frac{E}{4} \frac{\beta h^3}{l^3} \cdot bb',$$

wo E den Elasticitätskoeffizienten des Stabes in den Einheiten des absoluten Maßsystems bedeutet.

Da die elastische Kraft der Biegung proportional ist, so folgt, daß ein einmal gebogener und dann sich selbst überlassener Stab um seine Gleichgewichtslage isochrone Schwingungen vollführen wird:

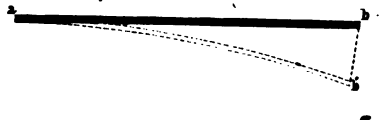
Nennen wir die bewegende Kraft bei einer Biegung gp (bei $gp = 1$ ist, gp), so haben wir

$$gP = gp \cdot bb',$$

$$gp = \frac{E}{4} \frac{\beta h^3}{l^3} \cdot bb'.$$

¹⁾ Man sehe § 53.

Fig. 229.



Dies ist somit die Kraft, welche den gebogenen Stab von der Länge l wieder in die Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, wenn das Ende b' sich im Abstände 1 von der Gleichgewichtslage befindet. Diese Kraft ist am Ende b angebracht. Um nun die Schwingungsdauer des Stabes zu erhalten, haben wir

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}},$$

wo k die beschleunigende Kraft der Bewegung bedeutet, also

$$k = \frac{gp}{m}$$

ist, wenn m die bewegte Masse bedeutet. Bezeichnen wir die Masse des Stabes mit m' , so werden wir haben

$$m = f' \cdot m',$$

worin f' eine Konstante bedeutet; denn um die beschleunigende Kraft zu erhalten, müssen wir für m die im Punkte b anzubringende Masse einsetzen, welche dort die Masse des Stabes ersetzt, da die Kraft p im Punkte b angreift. Diese Masse ist aber jedenfalls derjenigen des Stabes proportional.

Für die beschleunigende Kraft der Bewegung erhalten wir somit

$$k = \frac{gp}{m} = \frac{E \cdot \beta \cdot h^3}{4 f' \cdot m' l^3}.$$

Bezeichnen wir das spezifische Gewicht des Stabes mit s , so haben wir

$$m' = \beta \cdot h \cdot l \cdot s$$

und somit

$$k = \frac{h^2}{4 f' l^4} \cdot \frac{E}{s}$$

und daraus für die Schwingungsdauer eines solchen Stabes

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{h^2}{4 f' l^4} \cdot \frac{E}{s}}} = A \cdot \frac{l^2}{h} \cdot \sqrt{\frac{s}{E}},$$

wenn wir setzen

$$2\pi \sqrt{4 f'} = A.$$

Für die Schwingungszahlen der Stäbe erhalten wir daraus

$$N = \frac{1}{T} = A' \cdot \frac{h}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Derselbe Ausdruck gilt für cylindrische Stäbe, wenn wir anstatt der Dicke h den Radius r derselben einsetzen, jedoch wird dann die Konstante A' eine andere, wie sich aus dem Ausdrucke ergibt, den wir für gp erhalten, wenn wir anstatt parallelepipedischer Stäbe cylindrische Stäbe anwenden.

Wir haben diesen Ausdruck zunächst entwickelt unter der Voraussetzung, daß der Stab an seinem einen Ende fest sei, indes ergibt die Theorie der Elasticität, daß er auch, mit verschiedenen Werten von A' , gültig ist, im Falle beide Enden fest oder frei sind, da der Ausdruck für gp in den Fällen nur durch andere Konstanten unterscheidet.

ergibt sich daraus, daß allgemein die Schwingungszahl elastischer in Quadrate ihrer Länge umgekehrt proportional ist, während sie e derselben oder dem Radius derselben direkt proportional, von e derselben jedoch unabhängig ist.

ade wie wir bei den longitudinalen Schwingungen nun eine Reihe n unterscheiden mußten, je nach der Befestigungsweise des Stabes, hier wieder.

können jedoch hier nicht wie in den frühern Fällen die Schwingen und Teilungen der Stäbe theoretisch ableiten, sondern müssen ügen, die von Euler, Poisson, Cauchy, Seebeck u. a., teils theoretisch, erimentell erhaltenen Resultate mitzuteilen. Wir unterscheiden Fälle¹⁾.

Ein Ende des Stabes ist frei, das andere fest, der Stab schwingt nzen Länge nach hin und her, er bildet eine halbe stehende Welle. iter Annahme eines cylindrischen Stabes

$$N = 0,28 \frac{r}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Beide Enden des Stabes sind fest, oder beide Enden des Stabes ; die Zahl der langsamsten Schwingungen wird in beiden Fällen:

$$N = 1,78 \frac{r}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Es kann ferner das eine Ende des Stabes auf eine Unterlage ge- len und das andere ganz fest, in einen Schraubstock eingeklemmt oder ganz frei sein. In beiden Fällen erhält man für die lang- Schwingungen, welche der Stab vollführen kann,

$$N = 1,23 \frac{r}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Schließlich können beide Enden des Stabes nur aufgelegt sein, für die langsamsten Schwingungen

$$N = 0,785 \frac{r}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

beck vereinigt die Ausdrücke für alle diese Fälle in folgenden²⁾

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4 l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}},$$

ann nur ε seinen Wert von einem Falle zum andern ändert, und

,596 86, wenn ein Ende des Stabes fest, das andere frei ist,

,505 62, wenn beide Enden des Stabes fest oder frei sind,

,249 87, wenn ein Ende aufgelegt, das andere fest oder frei ist,

, wenn beide Enden des Stabes aufgelegt sind.

isson, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 484 ff.

uchy, Exerc. de Math. Tome III. 270 ff.

beck, Berichte der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1846—

Dove, Rep. Bd. VIII. p. 46.

beck, a. a. O.

In allen diesen Fällen können noch eine Reihe von Schwingungen auftreten, die alle häufigern Schwingungen der Stäbe entsprechen; Stäbe zerlegen sich dann in eine Reihe selbständig schwingender Theile, welche durch Knotenpunkte von einander getrennt sind.

Seebeck gibt folgende Tabelle der Werte von ε in allen vier Fällen.

1. Fall. Das eine Ende des Stabes ist fest, das andere frei. Reihenfolge der Schwingungszahlen ergibt sich aus den Werten

$$\varepsilon = 0,596\ 86; 1,494\ 18; 2,500\ 25; 3,4999 \dots \frac{2n-1}{2}.$$

Wie man sieht, werden die Schwingungszahlen eines gegebenen Stabes von der Länge l und dem Radius r von der dritten an dargestellt durch

$$N = \left(\frac{2n-1}{2} \right)^2.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ weichen die Schwingungszahlen hiervon ab, indem die hiernach berechneten Zahlen für $n = 1$ zu klein, für $n = 2$ zu groß werden.

2. Fall. Die beiden Enden des Stabes sind entweder fest oder frei. Die Schwingungszahlen ergeben sich aus den Werten

$$\varepsilon = 1,505\ 62; 2,499\ 75; 3,500\ 1; 4,500\ 0 \dots \frac{2n+1}{2}.$$

Setzen wir also für die langsamsten Schwingungen $n = 1$, so werden auch hier die Schwingungszahlen eines gegebenen Stabes dargestellt durch

$$N = \left(\frac{2n+1}{2} \right)^2,$$

jedoch ebenfalls erst von der dritten Schwingungszahl an, und zwar um so genauer, je weiter man in der Ordnung der Schwingungszahlen aufsteigt.

3. Fall. Ist das eine Ende des Stabes aufgelegt, das andere ganz fest oder ganz frei, so ergibt sich die Reihe der Schwingungszahlen, wenn $\varepsilon = 1$ eingesetzt wird

$$\varepsilon = \frac{4n+1}{4},$$

worin wieder n die Reihe der natürlichen Zahlen bedeutet, und für langsamsten Schwingungen $n = 1$ zu setzen ist. Für diese gaben wir $\varepsilon = 1,249\ 8$; man sieht, wie schon dieser Wert nur äußerst wenig von dem nach der Formel berechneten abweicht.

4. Fall. Sind beide Enden des Stabes einfach aufgelegt, so ergibt sich die Reihe der Schwingungszahlen, wenn wir für die langsamsten $\varepsilon = 1$ einsetzen, für die folgenden die Reihe der natürlichen Zahlen einsetzen, also $\varepsilon = 2, 3, 4, \dots$. Die Schwingungszahlen verhalten sich also wie 1, 4, 9, \dots .

In diesem Falle erhält also die Gleichung für die Schwingungszahlen ihre einfachste Gestalt, sie wird

$$N = \frac{n^2 \cdot \pi \cdot r}{4l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}},$$

worin nach und nach für n die Werte 1, 2, 3, \dots einzusetzen sind.

Die Schwingungszahlen eines und desselben Stabes können also sehr verschieden sein, je nach der Art seiner Befestigung; setzen wir die langen Schwingungen bei der ersten Befestigungsart gleich 1, so erhalten wir die Schwingungszahlen

1. Fall	1;	6,26;	17,54;	34,38;	56,84;
2. „	6,36;	17,54;	34,38;	56,84;	84,91;
3. „	4,38;	14,21;	29,50;	50,70;	77,22;
4. „	2,807;	11,23;	25,26;	44,91;	70,17.

Um aus dieser kleinen Tabelle die wirklichen Schwingungszahlen zu erhalten, haben wir bei cylindrischen Stäben dieselben nur mit

$$\frac{0,356 \ 24 \cdot \pi \cdot r}{4 l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}$$

multiplizieren.

Auch die Schwingungszahlen parallelepipedischer Stäbe können wir auf dieselbe Weise erhalten, wir haben in die Formel anstatt des r des Cylinders nur $\frac{h}{\sqrt{3}}$ einzusetzen, wenn wir wie vorhin mit h die Dicke der Stäbe bezeichnen¹⁾.

Die größern Schwingungszahlen haben auch hier ihren Grund in einer Abhängigkeit der Stäbe in eine Anzahl stehender Wellen, indes teilen sich hier die Stäbe nicht in eine Anzahl gleicher Teile, sondern die Endglieder sind verschieden von den Abständen der Knoten im Stabe selbst. Die Lage der Knoten lässt sich indes ebenso berechnen, wie die der Schwingungszahlen. So findet Seebeck z. B. für die Entfernung der Knoten von den Enden eines an beiden Enden freien Stabes:

des ersten	des zweiten	des dritten	des m -ten
$\frac{1,322}{4n+2} \cdot l$	$\frac{4,982 \ 0}{4n+2} \cdot l$	$\frac{9,000 \ 7}{4n+2} \cdot l$	$\frac{4m-3}{4n+2} \cdot l$

Bei der langsamsten Schwingung bilden sich also zwei Knoten, die um $\frac{1}{2}$ von den Enden liegen und um 0,551 6 der Stablänge von einander entfernt sind. Bei der zweiten, schnellern Schwingung bilden sich drei Knoten, einer in der Mitte, wie sich aus dem Ausdruck für den zweiten Knoten ergibt, der für den Abstand von dem nächsten freien Ende 0,498 ist, die beiden andern sind um 0,132 von den Enden des Stabes entfernt. Bei der dritten Schwingungszahl bilden sich vier Knoten, welche um 0,0944 von den Enden des Stabes entfernt sind. Der Abstand der mittleren Knoten ist 0,288 8 und der mittlern von den äußern 0,261 4. In dem folgenden Falle bilden sich fünf Knoten, deren Lage sich ebenfalls berechnen lässt und so fort.

Man kann diese theoretischen Resultate experimentell nachweisen. Die Schwingungszahlen mit den angegebenen übereinstimmen, werden in den nächsten Abschnitte zeigen.

Die Lage der Knotenpunkte lässt sich am besten auf einem dünnen Stabe von ziemlicher Breite und Länge bestimmen. Strehlke²⁾ wandte

Cauchy a. a. O.

Strehlke, Poggend. Ann. XXVII. Dove, Repert. Bd. III. p. 111.

Stahlstäbe von 1^m—1^m,3 Länge, 12—15 Millimeter Breite und 4 Millimeter Dicke an und bestreute sie auf der obern Fläche nach dem Vorgange von Chladni¹⁾ mit trockenem, staubfreiem Sand. Der Sand wird von den schwingenden Stellen des Stabes fortgeworfen und an den ruhenden Stellen angesammelt, so daß man dadurch die Lage der Knoten sichtbar machen kann. Man spannt diese Stäbe zwischen zwei konischen Spitzen an der Stelle zweier Knoten ein und bringt die Stäbe durch Anstreichen mit dem Violinbogen in Schwingung. Der Sand wandert dann nach den Knotenlinien hin und bleibt dort in Ruhe.

Die Knotenlinien stellen sich als feine, zur Längsaxe des Stabes senkrechte Linien dar, und ihre Lage ist nach den Messungen von Strehlke genau der Theorie entsprechend.

In seiner Abhandlung über die Bewegung elastischer Körper macht Poisson auf die einfache Relation auch der transversalen und longitudinalen Schwingungen von Stäben aufmerksam, wenn sie ihre langsamsten Schwingungen vollführen²⁾. Ist der Stab an beiden Enden frei oder fest, so haben wir für die Zahl der transversalen Schwingungen

$$N = \frac{\varepsilon^2 \pi r}{4l^2} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Für die longitudinalen Schwingungen der langsamsten Art hatten wir § 138

$$N' = \frac{1}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Man erhält demnach

$$\frac{N}{N'} = \frac{1}{2} \varepsilon^2 \pi \frac{r}{l} = 3,5608 \frac{r}{l}.$$

F. Savart hat durch Versuche diese von Poisson zuerst aufgestellte Relation nachgewiesen. Es wurden die longitudinalen Schwingungen eines nahezu 1^m langen cylindrischen homogenen Stabes beobachtet und darauf die transversalen Schwingungen eines Stückes des Stabes, welches genau $\frac{1}{8}$ der Länge des Stabes betrug. Die Schwingungszahlen wurden nach einer im nächsten Abschnitte auseinander zu setzenden Methode aus den Tönen der Stäbe bestimmt.

Um vergleichbare Zahlen zu haben, wurde dann die beobachtete Zahl der longitudinalen Schwingungen des ganzen Stabes mit 8 multipliziert, wodurch man die Schwingungszahl eines Achtel des Stabes erhielt. Aus diesen Zahlen wurde dann nach obiger Gleichung die Schwingungszahl der transversalen Schwingungen berechnet und die so berechnete Zahl

$$N = 3,5608 \frac{r}{l} \cdot N'$$

mit der beobachteten Schwingungszahl verglichen. Die Resultate der Versuche sind folgende³⁾:

1) Chladni, Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787.

2) Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 486.

3) Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 487.

Stab von	N beobachtet	N berechnet	Differenz
Messing $\left\{ \begin{array}{l} l = \frac{1}{8} \cdot 0,825 \\ r = 2^{\text{mm}},4 \\ N' = 17066 \end{array} \right.$	1422	1415	— 7
Kupfer $\left\{ \begin{array}{l} l = \frac{1}{8} \cdot 0,825 \\ r = 1^{\text{mm}},7 \\ N' = 18432 \end{array} \right.$	1067	1082	+ 15
Eisen $\left\{ \begin{array}{l} l = \frac{1}{8} \cdot 0,88 \\ r = 2^{\text{mm}},25 \\ N' = 22757 \end{array} \right.$	1843	1842	— 1

Die Differenzen zwischen Rechnung und Beobachtung sind so klein, daß sie vollkommen innerhalb der Grenzen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler liegen.

§ 143.

Transversale Schwingungen von Platten. Chladni Klangfiguren.

Wenn man eine dünne Platte von Glas oder Metall oder eine an ihrem Umfange durch Gewichte gespannte Membran anschlägt oder an ihrem Rande streicht, so kann man dieselbe ebenso wie Streifen oder Stäbe in stehende Schwingungen versetzen. Eine theoretische Ableitung dieser Schwingungen aus den Principien der Wellenbewegung ist uns hier nicht möglich, ja dieselbe ist überhaupt erst nur für einige specielle Fälle erreicht worden. Die Bewegungsgesetze von Membranen sind zuerst von Poisson entwickelt worden¹⁾ und ebenso hat derselbe eine Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten entwickelt. Kirchhoff²⁾ hat indes von der letztern nachgewiesen, daß sie nicht in allen Punkten richtig ist und an Stelle der Poissonschen eine neue Theorie der Schwingungen kreisförmiger Platten gegeben. Wir werden die Resultate der Kirchhoffschen Theorie nachher mit den Versuchen zusammenstellen.

Eine Membran, wie z. B. das Fell einer Pauke, kann entweder als Ganzes schwingen, oder sich in schwingende Teile zerlegen, welche dann durch ruhende Linien, Knotenlinien von einander getrennt sind. Eine Platte kann niemals als Ganzes schwingen, sondern zerlegt sich immer in mehrere durch Knotenlinien getrennte schwingende Teile. Theorie und Versuche beweisen, daß die Teilung der Platten höchst mannigfaltig sein kann.

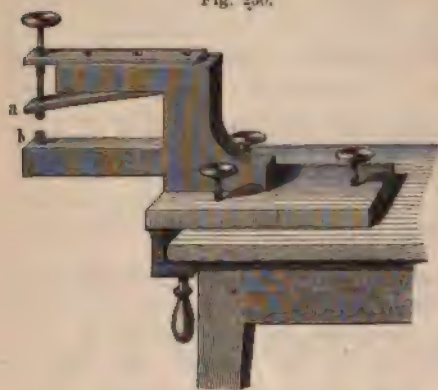
Um die Teilung der Platten zu erkennen, bedarf es nur der Kenntnis der Knotenlinien, da jeder von solchen umgebene Teil der Platte für sich schwingt, und um diese sichtbar zu machen, wandte Chladni das vorhin schon erwähnte Mittel an. Er bestreute die zu untersuchenden Platten mit trockenem staubfreiem Quarzsand, der dann von den schwingenden Teilen der Platte fortgeworfen wird und sich auf den ruhenden Stellen, den Knotenlinien, ansammelt. Es entstehen so auf der Platte regelmäßige Figuren, welche von Chladni Klangfiguren genannt sind."

¹⁾ Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 499 ff.

²⁾ Kirchhoff, Crelles Journal f. Mathematik Bd. XL. Man sehe auch Clebsch, Elasticitätslehre. p. 264 ff.

Um die Platten in Schwingungen zu versetzen, befestigt man sie in ihrer Mitte oder an irgend einer andern Stelle mit der von Strehlke¹⁾ angegebenen Gabel (Fig. 230), indem man sie mittels der Schraube zwischen die beiden mit Tuch überbundenen Köpfe *a* und *b* befestigt. Die über diese Köpfe gebundenen Tuchstückchen müssen zuweilen erneuert werden, damit die Sandkörnchen, welche sich an dem Tuche anlegen, die Platte nicht ritzen. Die Platte wird dann mit einem mit Kolophonium versehenen

Fig. 230.



Violinbogen am Rande gestrichen und zugleich an irgend einer andern Stelle mit dem Finger festgehalten*. Der Bogen muß senkrecht am Rande der Scheibe herabgeführt und das Streichen so lange fortgesetzt werden, bis keine vereinzelt Sandkörnchen mehr auf der Scheibe liegen, sondern alle sich in die einzelnen Linien der Klangfigur begeben haben.

Um die Figuren möglichst scharf zu erhalten, darf man nur wenig Sand auf die Platte streuen, da sonst die einzelnen Linien zu breit und die Figuren dadurch ungenau werden.

Die Knotenlinien bezeichnen die Grenzen der Teile, welche gleichzeitig nach entgegengesetzten Richtungen schwingen; es geht daraus hervor, daß die Figur derselben die Platte im allgemeinen in eine gerade Anzahl von Teilen zerlegen muß, da die entgegengesetzten Schwingungen immer paarweise auftreten müssen.

Die Schwingungszahlen verschiedener Platten, wenn sie in bestimmten Abteilungen schwingen, lassen sich nur experimentell aus den durch die Schwingungen hervorgerufenen Tönen bestimmen. Aus den Versuchen hat sich folgendes Gesetz ergeben. Wenn zwei Platten verschiedener Größe und verschiedener Dicke dieselbe Klangfigur zeigen, also in gleicher Weise abgeteilt werden, so sind die Schwingungszahlen der beiden Platten den Dicken derselben direkt, dem Flächeninhalt derselben aber umgekehrt proportional, oder

$$\frac{N}{N'} = \frac{q'}{q} \cdot \frac{d}{d'}.$$

Sind die Platten kreisförmig, so ist

$$q = r^2 \pi, \quad q' = r'^2 \pi,$$

demnach auch

$$\frac{N}{N'} = \frac{r'^2}{r^2} \cdot \frac{d}{d'}.$$

Die Schwingungszahlen sind den Quadraten der Radien umgekehrt proportional. Dies Gesetz schließt das folgende ein. Die Schwingungszahlen von Platten, welche einander ähnlich sind, das heißt bei denen die

¹⁾ Strehlke, Poggend. Ann. Bd. IV.

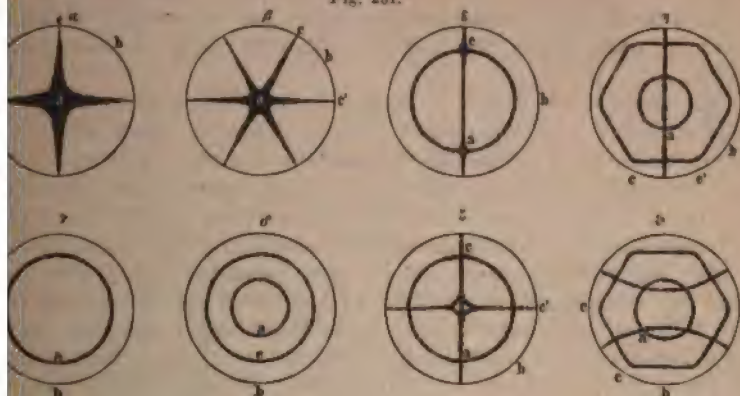
ogen Dimensionen alle in demselben Verhältnisse stehen, verhalten sich dieser Teilung der Platten umgekehrt wie die homologen Dimensionen. Ist nämlich bei kreisrunden Platten z. B. der Radius der einen Platte r , so ändern $a \cdot r$, und ebenso die Dicke der einen d , der andern $a \cdot d$, so dass dem Gesetze in der ersten Fassung

$$\frac{N}{N'} = \frac{a^2 \cdot r^2}{r'^2} \cdot \frac{d}{a \cdot d} = 1$$

sie man sieht, ist das der mathematische Ausdruck für die aus dem Satze gezogene Folgerung.

Betrachten wir zunächst kreisrunde homogene Platten, man nimmt zu versuchen am besten solche von Glas oder Metall, so ergibt für diese Theorie von Kirchhoff, dass in ihnen eine große Zahl verschiedener Figuren möglich sind, die sich in drei Gruppen ordnen lassen. Entweder streicht man die Platte in eine Reihe konzentrischer Zonen, oder in eine stets gleiche Anzahl von gleich großen Sektoren, welche durch diametrale Knoten von einander getrennt sind, oder endlich beide Teilungsarten treten gleichzeitig auf.

Fig. 231.



Alle diese Teilungsarten hat schon Chladni beobachtet; um sie hervorzuheben, klemmt man eine kreisförmige Platte in der Mitte oder in einem Punkte ein und berührt sie außerdem an einem oder mehreren Punkten und streicht dann in einiger Entfernung von den Berührungspunkten. Fig. 231 zeigt eine Reihe solcher Figuren. Die Einklemmungsstelle ist in allen einzelnen Figuren mit a bezeichnet, der Punkt, an dem man die Platte zu streichen ist, mit b , und die Berührungspunkte mit c . Klemmt man die Platte in der Mitte ein, so erhält man stets eine radikale Teilung (231 α und β) je nach der Anzahl der berührten Punkte mit 2 oder 4 Sektoren; klemmt man die Platte exzentrisch ein und berührt keinen Punkt des Randes, so erhält man Kreise ohne Durchmesser (Fig. 231 γ und δ).

Bei der theoretischen Behandlung der Frage gelangt man zur Bestimmung der Durchmesser der Knotenkreise zu einem Ausdruck, dessen Wert wesentlich von dem Werte des von uns n abhängt, d. h. des Verhältnisses der Querkontraktion zur Längendilatation.

Setzen wir dieses Verhältnis der Wertheimschen Annahme gemäß gleich $\frac{1}{2}$, welche Annahme, wie wir sahen, der Wahrheit im allgemeinen ziemlich nahe kommt, so erhält man nach Kirchhoff für den Durchmesser des Knotenkreises (Fig. 231 γ) den Wert 0,679 411 des Scheibendurchmessers. Nach Messungen von F. Savart, an drei Scheiben ausgeführt, die Poisson in seiner oben erwähnten Abhandlung mitteilt, fand sich derselbe

$$0,6819; 0,6798; 0,6812$$

des Scheibendurchmessers. Strehlke fand bei zwei äußerst sorgfältig gearbeiteten Glasscheiben nach der Angabe Kirchhoffs

$$0,6792; 0,6782,$$

Zahlen, welche mit der Theorie sehr nahe übereinstimmen.

Die Figuren 231 ϵ und ζ zeigen die beiden Teilungsarten gleichzeitig. Für den Durchmesser des Knotenkreises (Fig. 231 ϵ) gibt die Theorie den Wert 0,780 88 des Scheibendurchmessers; Strehlke fand bei den beiden erwähnten Scheiben

$$0,7811 \text{ und } 0,7802.$$

Für den Durchmesser des Knotenkreises (Fig. 231 ζ) ergibt die Theorie den Wert 0,822 74, Strehlke fand denselben an drei weniger sorgfältig als die vorigen gearbeiteten Scheiben zu 0,79; 0,81; 0,82 des Scheibendurchmessers.

Die Figuren 231 η und θ zeigen häufig vorkommende Verzerrungen, welche an nicht ganz homogenen Platten auftreten, wenn man sie bei a einklemmt und bei b anstreicht, während die Punkte c berührt werden.

Außer den gezeichneten können noch viele Figuren hervorgebracht werden, Chladni¹⁾ gibt in seiner ersten Mitteilung 80 an, dieselben sind aber alle aus Kreisen und Radien zusammengesetzt oder Verzerrungen solcher Figuren.

Aus der Theorie sowohl als aus den Versuchen ergibt sich, daß die Anzahl der Schwingungen mit der Anzahl der Teile, in welche sich die Platte teilt, in einem sehr komplizierten Verhältnisse zunimmt. Die langsamsten Schwingungen vollführt die Platte bei der Teilung Fig. 231 α , dann folgt Fig. 231 γ , 231 β , 231 ϵ , 231 ζ , 231 δ . Folgende kleine Tabelle enthält die Schwingungszahlen, jene der langsamsten gleich 1 gesetzt für die angegebenen und noch einige andere Teilungen nach der Theorie von Kirchhoff und nach den Versuchen von Chladni zusammengestellt. Die erste mit K überschriebene Kolumne enthält die Anzahl der Knotenkreise, zu welcher die in den übrigen Spalten angegebenen Schwingungszahlen gehören, wenn die Knotenkreise von der über jeder Spalte angegebenen Anzahl von Durchmessern durchschnitten werden.

Tabelle der Schwingungszahlen kreisförmiger am Rande freier Platten.

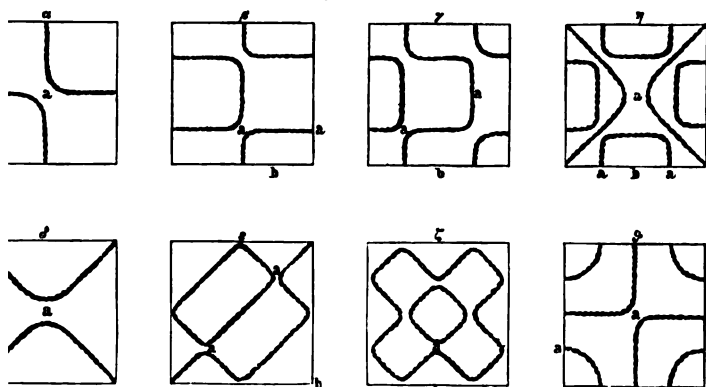
K	ohne Durchmesser		mit 1 Durchmesser		mit 2 Durchmessern		mit 3 Durchmessern	
	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
0	0	0	0	0	1	1	2,245	2,378
1	1,587	1,681 +	3,563	4,000 —	5,993	6,726	9,513 —	10,079 —
2	6,348 +	7,126 +	10,079 +	11,313 +				

¹⁾ Chladni, Entdeckungen zur Theorie des Klanges. Leipzig 1787. Man sehe auch Strehlke, Poggend. Ann. Bd. IV. Savart, Ann. de chim. et de phys. T. XXXVI.

Schwingungen wurden in später zu besprechender Weise aus den bestimmt¹⁾; die in der Tabelle angegebenen Zahlen sind diejenigen Chladni angegebenen Töne; auch Kirchhoff gibt statt der Zahlen e an, und die Zeichen $+$ oder $-$ neben den Zahlen deuten an, wirklich beobachtete Ton oder der der genauen Schwingungszahl hende Ton etwas höher oder tiefer ist als die in der Tabelle angegebenen. Die Zahlen stimmen allerdings nicht besonders überein, insofern die Bestimmung der Töne mit einiger Schwierigkeit verknüpft, er beruht auch hier die Rechnung auf der Voraussetzung $\mu = \frac{1}{3}$, ist vollständig genau ist.

Schwingungen nicht kreisförmiger Platten lassen sich bis jetzt nur theilbestimmen; die Theilungen quadratischer Platten und damit denselben entstehenden Knotenlinien sind ebenso mannigfaltig als auf kreisförmigen Platten. Man kann auch dort zwei Systeme Knotenlinien unterscheiden, in dem einen sind die Hauptlinien parallel den des Quadrates, in dem andern parallel den Diagonalen und sich können beide Liniensysteme zugleich auftreten.

Fig. 232.



erhält man Fig. 232 *a*, wenn man die Platte in der Mitte unterst²⁾ an einer Ecke z. B. bei *b* anstreicht, Fig. 232 *β*, wenn man an den Punkten *a* die Platte unterstützt und bei *b* anstreicht. Ebenso sind die übrigen Figuren die zu unterstützenden Punkte mit *a*, und denen zu streichen ist, mit *b* bezeichnet. Diese Figuren sind nach der Angabe von Strehlke²⁾ gezeichnet, der diesen hat:

Die Knotenlinien, welche bei quadratischen Platten die Klangfiguren einsetzen, sind stets krumme Linien; so werden z. B. die Figuren *a* durch zwei hyperbolische Äste gebildet.

Die Linien durchschneiden sich nie. Das scheinbare Durcheinander der meisten Fällen rührt daher, daß man zu viel Sand ³⁾

¹⁾ Man sehe § 154 dieses Teiles.

²⁾ Strehlke, Poggend. Ann. Bd. IV. Doves Ber-

gebracht hat und nun in der Nähe der ruhenden Linien die Schwingungen zu schwach werden, als daß der Sand fortgeworfen werden kann.

Die Schwingungszahlen dieser Platten werden wir später besprechen.

In ähnlicher Weise, wie die ebenen Platten, schwingen auch Glocken, welche im Grunde nichts weiter sind als gekrümmte Platten. Bei den langsamsten Schwingungen teilen sich die Glocken in vier Teile, die ruhenden Linien liegen um einen Bogen von 90° von einander entfernt und durchsetzen die Glocke ihrer ganzen Höhe nach. Man kann diese Teilung sehr leicht sichtbar machen dadurch, daß man die Glocke bis etwas über ihre halbe Höhe mit Wasser füllt. An den Stellen der stärksten Schwingung wird das Wasser stark zurückgestoßen und in wellenförmige Bewegung gesetzt, während es an den 45° davon entfernten Stellen der Knoten in Ruhe bleibt. Häufig werden selbst Tröpfchen von der Stelle der stärksten Schwingung auf die Oberfläche der Flüssigkeit geworfen, welche sich eine Zeit lang halten und in regelmäßigen Figuren angesammelt werden können.

Eine eigentümliche Art von Figuren hat Savart¹⁾ auf schwingenden Platten beobachtet, wenn man dieselben anstatt mit staubfreiem Sand mit staubigem Sande oder mit Sand und Lycopodium (Bärlappsamen) bestreut.

Beim Bestreuen mit Lycopodium zeigen sich nämlich, wenn man die Mitte der Seiten unterstützt und eine Ecke anstreicht, außer den eigentlich ruhenden Linien in der Nähe der vier Ecken wirbelnde Wolken von ovaler Form (Fig. 233), jedoch immer so, daß der zugespitzte Teil der

Fig. 233.

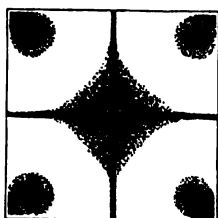
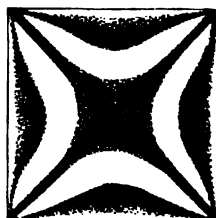


Fig. 234.



Basis der Wolke nach der Ecke zu gerichtet ist. Wenn die schwingende Bewegung der Scheibe schwächer wird, so bleibt in jeder Ecke eine Gruppe halbkugelförmiger Erhöhungen zurück. Fig. 234 erscheint, wenn man die Ecken festhält und in der Mitte der Seite des Quadrates streicht, die Lycopodiumansammlung findet in der Mitte statt, jedoch ist zu bemerken, daß durch diese Wolken noch Kurven von geringer Breite bis zu den Ecken gehen. Diese Kurven sind nur in den Momenten der stärksten Erschütterung sichtbar.

Savart sah in diesen Figuren einen Beweis für eine zweite Teilungsart der Platte. Nach ihm ist die Scheibe der Sitz vieler über einander greifender Teilungsarten, von denen besonders zwei hervortreten; die erste ist die gewöhnliche, sich in den Figuren des staubfreien Sandes zeigende, die zweite tritt immer mit der ersten ein und bewirkt, daß in der Mitte der schwingenden Abteilungen gewisse Strecken horizontal bleiben, auf

¹⁾ Savart, Annales de chim. et de phys. Tome XXXVI.

denen die Teilchen, die an den erschütterten Stellen nicht liegen bleiben können, beisammen bleiben und nur eine wirbelnde Bewegung zeigen.

Gegen diese Erklärung wandte Faraday¹⁾ ein, daß selbst bei einer Neigung der Platte gegen den Horizont von 6 bis 10°, die jedenfalls viel größer sei als die Neigung der schwingenden Teile, ein Aufsteigen des *Lycopodium* der Schwere entgegen zu den Vibrationsmittelpunkten stattfindet und der Staub so lange sich dort halten kann, als die Platte kräftig erschüttelt werde.

Faraday leitet diese Figuren von Luftströmen her, welche von den Knotenlinien her zu den Punkten der stärksten Erschütterung hinwehen. Damit stimmt es überein, daß nur bei Anwendung des leichten Staubes sich diese Figuren zeigen, indem der schwerere Sand von den Luftströmen nicht fortgerissen wird. Ebenso sah Faraday, wenn kleine Stücke von Karten in Winkelform in der Nähe der Vibrationscentra so befestigt wurden, daß ein Schenkel dem Rande der quadratischen Scheibe (Fig. 234) parallel lag, daß dann der Staub in die Winkel hinein ging, wie wenn Ströme von den Wänden der Karte aufgefangen wären. Feine Kieselerde auf ein Buch gestreut und der schwingenden Platte möglichst nahe gebracht, flog nach der Platte, als wenn ein Luftstrom von dem Pulver nach der Platte hinging.

Den entschiedensten Beweis für die Richtigkeit der Faradayschen Erklärung bildet aber das Verhalten der mit *Lycopodium* bestreuten Platte im luftverdünnten Raum. Eine Glasscheibe wurde auf vier Korkfüßen unter die Glocke der Luftpumpe gelegt und vermittle eines an der Platte senkrecht zu ihrer Ebene befestigten Stabes, der durch eine Stopfbüchse aus der Glocke herausgeleitet war und außerhalb der Glocke in longitudinale Erschütterungen versetzt wurde, zum Vibrieren gebracht. Da der Stab senkrecht zur Ebene der Platte ist, so wird die Platte durch longitudinale Schwingungen desselben in transversale Bewegung versetzt. So lange die Luft unter der Glocke die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft besaß, zeigte die Platte die Staubfiguren ganz in der gewöhnlichen Weise. War aber die Luft bis auf 5—3 Centimeter Quecksilberdruck verdünnt, so ging das Pulver quer über der Platte hin nach den ruhenden Knotenlinien, wie es der Sand in freier Luft thut, und die Wolken an den Vibrationsmittelpunkten zeigten sich nicht.

Aus diesem Versuche geht auf das entschiedenste hervor, daß diese Staubfiguren nichts mit der Schwingung der Platte direkt zu thun haben, daß sie also nicht, wie Savart sie nannte, sekundäre Klangfiguren und Folge einer zweiten Teilung der Scheibe sind, sondern daß zu ihrer Bildung das Vorhandensein der Luft wesentlich erfordert wird.

Die Luftströme, welche nach allem dem der Grund der Erscheinung sind, entstehen durch die mechanische Einwirkung der schwingenden Platte auf die umgebende Luft. So wie der schwingende Teil der Platte sich aufwärts bewegt, wird die darüber befindliche Luft aus der Stelle getrieben und zwar um so stärker, je näher dieselbe der Stelle der stärksten Schwingung ist, um so weniger, je näher sie den Knotenlinien ist. Wenn nun die Platte

¹⁾ Faraday, Philosophical Transact. for the year 1831. Poggend. Annal. Bd. XXVI.

beim Anfange der zweiten Hälfte der Oscillation in ihre Gleichgewichtslage zurückkehrt, so kann die über dem Orte der stärksten Schwingung befindliche Luft, welche eine von der Platte fort gerichtete Geschwindigkeit besitzt, nicht so schnell als die Platte zurückkehren. Es bildet sich daher ein leerer Raum, in den die Luft von den Knotenlinien her, wo sie in Ruhe ist, über die Platte hin eindringt. Dadurch muß notwendig ein Luftstrom entstehen, der von allen Seiten von den Knotenlinien gegen die Orte der stärksten Schwingung gerichtet ist und das Lycopodium mit sich an diese Stelle hinführt. Natürlich muß diese Luft auf einem andern Wege zu den Knotenlinien zurückkehren. An den Orten der stärksten Oscillation stauen sich die Ströme und es entsteht daher dort ein schwacher aufsteigender Luftstrom, der sich daran erkennen läßt, daß sich das Lycopodium über den Stellen der stärksten Schwingung erhebt und etwas über der Platte wieder seitwärts geführt wird.

Gleiche Erscheinungen wie in der Luft sah Faraday, wenn er die Platte mit einer Flüssigkeit bedeckte. Durch die entstehenden Ströme konnte selbst die Bildung der Klangfiguren ganz gehindert werden. Es zeigten sich dann nur die Anhäufungen des angewandten Pulvers, Messingfeilicht oder Sand, an den Stellen der stärksten Schwingung.

§ 144.

Drehende Schwingungen von Stäben. Außer den longitudinalen und transversalen Schwingungen haben wir früher schon noch eine dritte Art von Schwingungen kennen gelernt, die Torsionsschwingungen. Wir benutzten sie damals, um mit Hülfe der Pendelgesetze den Torsionskoeffizienten von Drähten zu bestimmen, indem wir die Drähte unten mit einer schweren Kugel versahen und diese in horizontale Schwingungen versetzten.

Wie wir damals sahen, gelten die Torsionsgesetze nach den Versuchen von Wertheim auch für dicke Stäbe, das heißt, bei einer denselben erteilten Torsion ist die elastische Kraft, welche den gedrehten Teil des Stabes in seine Gleichgewichtslage zurückzuführen sucht, der Torsion einfach proportional. Denken wir uns deshalb einen Stab an seinem einen Ende durch Torsion in Schwingungen versetzt, so müssen sich diese Schwingungen in dem Stabe gerade so fortpflanzen wie die longitudinalen und transversalen, und ist der Stab an einem Ende begrenzt, so muß an dieser Grenze eine Reflexion der Schwingungen eintreten, und durch die Interferenz der primären und der reflektierten Schwingungen müssen in dem Stabe stehende Wellen entstehen.

Um die Gesetze dieser Schwingungen zu entwickeln, denken wir uns wie § 52 den schwingenden Stab als aus lauter seiner Längsaxe parallelen Fasern von unendlich kleinem Querschnitt zusammengesetzt. Wird der Stab tordiert, so gehen diese Fasern aus geraden Linien in Spiralen über, welche auf einem Cylinder liegen, dessen Radius gleich ist dem Abstand der Faser von der Axe des Stabes. Die in der Richtung der Stabaxe übereinander liegenden Querschnitte der Faser haben dann gegen einander eine Verschiebung erhalten, und die Kraft, welche diese Querschnitte in

ative Gleichgewichtslage zurückzubringen sucht, ist nach § 52 Verschiebungswinkel proportional. Stellt $am o q$ (Fig. 235) eine in tordierten Zustande des Stabes vor, welche im Gleichgewichtslage die Lage ab hat, so ist der Winkel oms der Verdrehungswinkel des Querschnittes o der Faser gegen den Querschnitt m , der Winkel qov derjenige des Querschnittes q gegen o . Ist, mit welcher der Querschnitt o in seine Gleichgewichtslage in Bezug auf m , also nach s hin getrieben wird, ist

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot oms \cdot dq,$$

wo dq den Querschnitt der Faser bezeichnen. Ebenso

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot qov \cdot dq,$$

welche den Querschnitt o in Bezug auf q , also dort in seine Gleichgewichtslage treibt. Die den Querschnitt dq nach s , also auch gegen seine Gleichgewichtslage hin treibende Kraft ist dann

$$\frac{E}{2(1+\mu)} dq (oms - qov).$$

Wenn wir den Abstand der Faser von der Stabaxe r , so der Querschnitt des Stabes, zu welchem dq gehört, in dieser an dq angreifenden Kraft das Drehungsmoment

$$\frac{E}{2(1+\mu)} r dq (oms - qov).$$

als Drehungsmoment, welches der ganze Querschnitt des Stabes gegen Gleichgewichtslage erhält, ist dann gleich der Summe der für alle Elemente dq dieses Querschnittes sich ergebenden Momente. Zur dieser Summe können wir zunächst das Flächenelement dq ersetzen in einen Ring von der Breite dr , dessen Radius gleich r , gleich dem der betrachteten Faser von der Stabaxe ist, denn für alle diesen zusammensetzenden Elemente dq hat r und ebenso der Verschiebungswinkel denselben Wert. Die Fläche dieses Ringes ist $2\pi r dr$, und wird das Drehungsmoment von den an diesem Ringe angreifenden

$$2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} r^3 dr (oms - qov).$$

in sei der Winkel, um welchen der um x von dem Ende des Stabes der Querschnitt m gedreht ist, gleich φ , damit ist die Länge des Bogenes rm . Der Querschnitt o , der um dx weiter vom Stabende entfernt ist, dann um den Winkel φ' gedreht, so daß der Bogen $op = r\varphi'$ ist. rechtwinkligen Dreiecke osm ist dann $os = r(\varphi' - \varphi)$, somit

$$\tan oms = \frac{os}{sm} = \frac{r(\varphi' - \varphi)}{dx}.$$

Fig. 235.



Nennen wir den Winkel, um welchen der Querschnitt q gedreht φ'' , so wird ebenso

$$\tan q \circ v = \frac{r(\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Bei der Kleinheit der Winkel können wir die Bögen durch Tangenten ersetzen, und erhalten dann für das Drehungsmoment

$$2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} r^3 dr \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Das den ganzen Querschnitt zurückdrehende Moment erhalten wir der Summe der für alle einzelnen Ringe gebildeten Momente, somit, der Radius des Stabes gleich ϱ ist,

$$\int_0^{\varrho} 2\pi \frac{E}{2(1+\mu)} \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx} \cdot r^3 dr.$$

Da in dieser Summe nur r veränderlich ist, so wird dieselbe

$$\frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{\varrho^4 \pi}{2} \cdot \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx}.$$

Um die dem Querschnitt gegen die Gleichgewichtslage hin erteilte Beschleunigung zu erhalten, müssen wir das Drehungsmoment durch das Trägheitsmoment desselben dividieren. Nennen wir die Dichtigkeit des Stabes also die Masse der Volumeinheit d , und die Dicke des betrachteten Querschnittes, die wir gleich dem Abstände zweier Querschnitte setzen dx , so wird nach § 19 das Trägheitsmoment

$$d \frac{\varrho^4 \pi}{2} dx,$$

und damit die Beschleunigung

$$\frac{E}{2(1+\mu) \cdot d} \cdot \frac{(\varphi' - \varphi) - (\varphi'' - \varphi')}{dx^2}.$$

Der Zähler des zweiten Bruches in diesem Ausdruck ist nichts anderes als das zweite Differential $d^2\varphi$; die Gleichung, welche der Bewegung des Stabes zu Grunde liegt, wird demnach

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{E}{2(1+\mu) \cdot d} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2},$$

dieselbe, hier auf die Winkelbeschleunigung sich beziehende Gleichung, der wir § 126 gelangten. Wird also an irgend einer Stelle eines begrenzten Stabes durch Torsion eine schwingende Bewegung erzeugt der Amplitude 2α , so pflanzt sich dieselbe durch den Stab nach den bekannten Gesetzen fort, so daß im Abstände x von der Erregungsstelle zu Zeit t die Bewegung gegeben ist durch die Gleichung

$$\varphi = \alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT} \right),$$

worin c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung

$$c = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)d}} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

mit die Wellenlänge

$$\lambda = c \cdot T = T \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}d} \sqrt{\frac{E}{d}},$$

ad die Schwingungsdauer

$$T = \lambda \sqrt{2(1+\mu)} \sqrt{\frac{d}{E}}.$$

b.

Alle diese Ausdrücke unterscheiden sich von den für die longitudinalen Schwingungen nur durch den Faktor $\sqrt{2(1+\mu)}$, also nur so weit, daß an Stelle des Elasticitätskoefficienten der Torsionskoefficient tritt.

Daraus folgt, daß die Gesetze der drehenden Schwingungen cylindrischer Stäbe vollständig mit denen der longitudinalen Schwingungen § 138) zusammenfallen, so daß es überflüssig ist, dieselben im einzelnen zu entwickeln; es genügt eine kurze Andeutung.

Ein an seinem einen Ende fester Stab kann nur solche stehende Wellen halten, für welche die Länge des Stabes eine ungerade Anzahl von ein Viertel Wellenlängen beträgt; es folgt somit für die Schwingungsdauer und Schwingungsanzahl

$$T_n = \frac{4l}{(2n+1)c}; \quad N_n = (2n+1) \frac{c}{4l},$$

die langsamsten sind jene, für welche $n=0$, somit die Schwingungsdauer

$$T = \frac{4l}{c}$$

Die selbe ist somit gleich der vierfachen Stablänge, dividiert durch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung.

Ist der Stab an beiden Enden fest oder frei, so kann derselbe alle diejenigen Schwingungen vollführen, für welche seine Länge irgend ein Vielfaches einer halben Wellenlänge ist; die langsamsten Schwingungen sind

$$T = \frac{2l}{c};$$

Schwingungsdauer ist somit die Hälfte, die Schwingungsanzahl die doppelte von derjenigen eines an seinem einen Ende festen Stabes. Die richtigen Schwingungszahlen sind gegeben durch den Ausdruck

$$N_n = n \frac{c}{2l},$$

wo n jede ganze Zahl sein kann.

Zwischen den gleichen Theilungen cylindrischer Stäbe entsprechenden Schwingungszahlen der longitudinalen und drehenden Schwingungen ergibt sich eine äußerst einfache Beziehung¹⁾. Dividieren wir die einer gleichen Theilung entsprechende Anzahl longitudinaler Schwingungen

$$N' = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{E}{d}}$$

mit jene der drehenden Schwingungen, so wird

$$\frac{N'}{N} = \sqrt{2(1+\mu)}.$$

¹⁾ Poisson, Mémoires de l'Acad. de France. Tom. VIII. p. 456.

Eine Vergleichung der Schwingungszahlen kann also ebenfalls über den Wert von μ , des Verhältnisses von Querkontraktion zur Längendilatation Aufschluß geben. Nach den Versuchen von Chladni¹⁾ soll das Verhältnis der Schwingungszahlen wie 3 zu 2 sein, danach wäre $\mu = 0,125$; nach Versuchen von Savart²⁾ wäre $\frac{N'}{N} = \frac{10}{6}$, somit $\mu = 0,39$. Ausführlichere Versuche zur Bestimmung dieses Verhältnisses hat Wertheim angestellt³⁾. Folgende kleine Tabelle enthält die Resultate der Versuche.

Stab von	Länge	Radius	Schwingungszahl		$\frac{N'}{N}$	μ
			longit. N	drehend N		
Eisen	2 ^m ,061	8 ^{mm} ,220	1255,6	766,5	1,637	0,339
Eisen	2,005	5,501	1267,3	771,1	1,643	0,349
Gufsstahl	2,000	5,055	1286,4	787,7	1,633	0,333
Messing	2,000	5,031	864,5	531,1	1,628	0,325

Nahezu stimmen diese Werte von μ mit der Annahme von Wertheim, daß $\mu = \frac{1}{3}$ sei, indes zeigt sich doch auch hier nicht volle Konstanz übereinstimmend mit den früher von uns erhaltenen Resultaten. Die von Schneebeli nach dieser Methode gefundenen Werte von μ haben wir bereits § 49 mitgeteilt.

§ 145.

Zusammengesetzte Schwingungen. Wenn man einen Stab seiner Länge nach reibt, so sahen wir, daß er in longitudinale Schwingungen versetzt wird. Diese longitudinalen Schwingungen treten indes, wie zuerst F. Savart⁴⁾ gezeigt hat, fast niemals allein auf, sondern stets in Verbindung von transversalen Schwingungen. Bestreut man nämlich einen longitudinal schwingenden parallelepipedischen oder cylindrischen Stab mit Sand, so ordnet sich nach den Beobachtungen Savarts der Sand auf den Stäben in gewissen Linien, indem er nicht hüpfend wie bei der transversalen Schwingung der Stäbe, sondern der Oberfläche parallel sehr rasch verschoben wird. So bilden sich solche Knotenlinien schon auf Stäben, welche an beiden Enden frei ihre langsamsten longitudinalen Schwingungen vollführen, in großer Zahl, während doch der Stab in Bezug auf die longitudinalen Schwingungen nur eine Knotenlinie in der Mitte besitzt. Der Sand verschiebt sich auf der Oberfläche, $L' L''$ Fig. 236, wie die Pfeilstriche es angeben, von den Punkten L zu den Punkten N .

Ferner fand Savart, wenn man auf der obern Seite des Stabes die Linien der Sandanhäufungen markiert, dann den Stab umkehrt, und ihn

¹⁾ Chladni, Akustik. p. 110.

²⁾ Savart in dem citierten Mémoire von Poisson. p. 456.

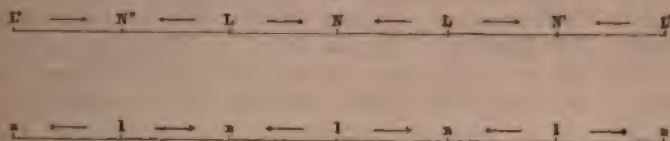
³⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. 3. Sér. T. I. p. 262.

⁴⁾ F. Savart, Annales de chim. et de phys. XIV. XXV. Doves Repertorium. Bd. VI.

ist Sand bestreut, nachdem man ihn in Schwingung versetzt hat, daß dann die Linien der Sandanhäufung auf dieser Seite zwischen denen der obern Seite liegen, daß sie (Fig. 236) von den Punkten L , welche gerade den Punkten N der obern Seite gegenüber liegen, sich nach den Punkten N wegen.

Auf Stäben mit quadratischem oder kreisförmigem Querschnitt liegen sie auf einer schraubenförmigen Linie, die sich entweder rechts oder links gewunden, oder von der Mitte aus nach der einen Seite rechts, nach der andern links gewunden um den Stab herumlegt.

Fig. 236.



Durch viele Versuche an Stäben, welche an beiden Enden frei waren, gelangte Savart zu folgenden die Zwischenräume zwischen den Sandanhäufungen bedingenden Gesetzen¹⁾.

Die Zwischenräume der Sandanhäufungen sind

- 1) in Stäben von rechteckigem Querschnitte konstant bei verschiedener Länge, wenn nur die Länge und Dicke der Stäbe ungeändert bleibt;
- 2) proportional der Quadratwurzel aus der Dicke bei gleicher Länge;
- 3) proportional der Quadratwurzel aus der Länge bei gleicher Dicke.

Schon aus diesen Gesetzen folgt, daß diese Sandanhäufungen von transversalschwingungen des Stabes herrühren, welche die longitudinalen gleiten und ihnen isochron sind.

Denn nach dem ersten Gesetze sind sie von den Breiten der Stäbe abhängig, wir wissen, daß das sowohl für die longitudinalen als die transversalen Schwingungen der Fall ist.

Nach dem zweiten Gesetze sind sie proportional den Quadratwurzeln der Dicken. Die longitudinalen Schwingungen sind von der Dicke der Stäbe unabhängig, die transversalen derselben umgekehrt proportional. Wenn daher die Schwingungen isochron sein, so müssen sich die transversalen stehenden Wellen bei dickern Stäben soviel verlängern, daß sie in demselben Verhältnisse langsamer werden, als sie wegen der gedachten Dicke bei gleicher Länge rascher geworden wären. Die Schwingungsdauer der transversalen Schwingungen ist nun dem Quadrate der Längen proportional. Verhalten sich demnach die Längen der stehenden Wellen bei verschiedener Dicke der Stäbe wie die Quadratwurzeln aus den Dicken, so sind die Schwingungen isochron.

Ebenso stimmt das dritte Gesetz, denn da die Dauer einer longitudinalen Schwingung der Länge des Stabes, die einer transversalen Schwingung aber dem Quadrate derselben proportional ist, so müssen bei verschiedener Länge des Stabes die Längen der Transversalwellen proportional

¹⁾ P. Savart, Annales de chim. et de phys. LXV. Doves Repertorium VL p. 60. (Dargestellt von Seebeck.)

der Quadratwurzel dieser Länge geändert werden, um den longitudinalen Schwingungen isochron zu sein.

So findet auch Savart bei gespannten Streifen oder Saiten die Zwischenräume jener Knoten proportional der Länge und der Quadratwurzel aus der Spannung in Übereinstimmung mit der Annahme, daß die Linien von einer isochronen Transversalbewegung herrühren.

Ferner auch, wenn man auf einem Stabe die Sandstellen bezeichnet und ihn sodann mit dem Bogen in gewöhnliche transversale Schwingungen versetzt, so daß die Länge der stehenden Welle gleich ist dem Abstände von einer Sandstelle der obern Seite bis zur nächsten Sandstelle der unteren Fläche, so sind die Schwingungszahlen in der That dieselben, als die der longitudinalen Schwingungen; dasselbe ist der Fall bei gespannten Saiten oder Streifen. Die Erklärung, welche Savart von diesen Linien gibt, anzuführen, wollen wir hier unterlassen, da Seebeck die Unrichtigkeit derselben nachgewiesen hat und statt dessen die Seebecksche Erklärung folgen lassen¹⁾.

Infolge der koexistierenden transversalen und longitudinalen Schwingungen der Theilchen der Stäbe beschreiben die Theilchen derselben die Resultante aus beiden Bewegungen, im allgemeinen elliptische Bahnen, § 130. Ist nun die Resultante gegen die Sandkörner gerichtet, so stößt sie dieselben in ihrer Richtung, das heißt unter einem spitzen Winkel gegen die wagerechte Fläche des Stabes fort; ist sie aber während der nächsten Halbschwingung von den Sandkörnern weggerichtet, so läßt sie dieselben liegen. Daraus ergibt sich ganz einfach, daß der Sand auf die abwechselnden Knoten der transversalen Wellen getrieben werden müsse.

Es sei z. B. AF ein Stück des Stabes (Fig. 237), welches in longitudinaler Schwingung nach rechts gedacht werde, während die Ordinaten der

Fig. 237.



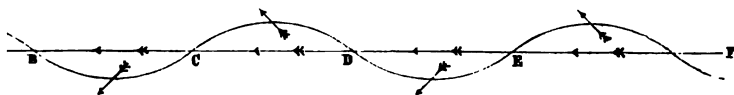
gezeichneten Wellenlinien die transversalen Geschwindigkeiten darstellen müssen, so daß also die zwischen B und C liegenden Punkte sich zugleich nach rechts und oben, die zwischen C und D liegenden nach rechts und unten bewegen u. s. f. Alsdann haben die aus beiden Bewegungen resultierenden Geschwindigkeiten zwischen B und C sowohl als in den andern Strecken die Richtung der durch die Wellenlinie gelegten Pfeile und man sieht leicht, daß der über BC liegende Sand nach C , der über DE liegende nach E getrieben wird, während der über CD und EF liegende Sand jetzt liegen bleibt. In der folgenden Zeit gehen beide Bewegungen in die entgegengesetzten über (Fig. 238). Die longitudinale Bewegung ist auf der ganzen Strecke AF von der Rechten zur Linken gerichtet, die transversale zwischen BC und DE nach unten, zwischen CD und EF nach oben. Die resultierende Bewegung hat die Richtung der durch die Wellenlinie gelegten Pfeile, und man sieht, wie jetzt der Sand von CD nach C , von EF nach E

¹⁾ Seebeck in Dove, Repertorium. Bd. VIII. p. 53.

ben wird, während er jetzt zwischen BC und DE liegen bleibt. Da sich der Sand in C und E ansammeln, dagegen die Stellen B, D, F , erden, oder die alternierenden Schwingungsknoten der transversalen Schwingungen müssen mit Sand bedeckt werden.

ehrt man den Stab um, so daß die vorhin untere Seite zur obern so ergibt sich aus obiger Entwicklung unmittelbar, daß jetzt die unbedeckten Knotenlinien bedeckt werden, und die vorhin bedeckten erden müssen, d. h. auf der untern Seite sammelt sich der Sand in F , und C und E werden leer.

Fig. 238.



iese Erklärung hat Seebeck durch einen Versuch bestätigt. An circa 1^m langen Spiegelglasstreifen entsprach die Dauer der langsamsten linealenschwingungen den Transversalschwingungen, bei denen der 14–15 Knoten erhielt, etwas näher den letztern als den erstern. m nun Seebeck die Sandanhäufungen auf dem longitudinal schwingenden Stabe bezeichnet hatte, versetzte er durch Streichen mit dem Bogen en in die Transversalschwingungen mit 15 Knoten, und fand so, ie Sandanhäufungen bei den longitudinalen Schwingungen auf der eite dem 1, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 14, auf der andern Seite dem 2, 4, 6, 13, 15 Knoten der transversalen Schwingungen entsprachen.

ie weniger hüpfende als gleitende Bewegung des Sandes zeigt an, e transversale Bewegung schwächer ist als die longitudinale, womit ie geringere Energie der Bewegung und die Störung der Regelmäßigkeit der Sandanhäufungen in der Mitte, in der Nähe des Schwingungspunktes der longitudinalen Bewegung übereinstimmt.

auf die mit den longitudinalen stets gleichzeitig auftretenden transversalen Schwingungen hat Kundt auch die zuerst von W. Weber¹⁾ beobachteten ruckartigen Bewegungen zurückgeführt, welche elastische Körper, Korkpfropfen, in longitudinal schwingenden Röhren annehmen. W. Weber eine 1 bis 1,5 Meter lange cylindrische Glasröhre von 6 bis 10^{mm}

Durchmesser und 1^{mm} Glasdicke, verschloß das eine Ende mit Korkpfropfen, der genau an der Röhre abgeschnitten wurde, hielt die Röhre in vertikaler Stellung, das verschlossene Ende abwärts gekehrt, locker in der Mitte und rieb die obere Hälfte mit einem nassen Tuche stark von oben nach unten; er sah dann den Stöpsel in die Höhe rücken, bis er in der Mitte der Röhre, in der sich der Schwingungsknoten befindet, stehen

blieb²⁾ zeigte zunächst, daß eine derartige Bewegung des Korks trat, wenn derselbe eine konische Gestalt hat, und daß dann der Stöpsel stets in der Richtung von der breiteren Basis zur spitzern Endfläche

W. Weber, Schweiggers Journal für Chemie und Physik. LIII. 308.

1. Kundt, Poggend. Ann. Bd. CXXVI.

sich bewegt. Ein und derselbe Kork wandert in der Röhre vom Ende gegen die Mitte, wenn die breitere Basis nach außen, von der Mitte gegen das Ende, wenn dieselbe gegen das Innere der Röhre hin liegt. Ebenso wie ein in der Röhre befindlicher Kork wandert ein auf die Röhre gesetzter Ring, der konisch durchbohrt ist, und zwar stets von der Spitze seiner konischen Öffnung gegen die breitere Grundfläche hin. Genau cylindrische Pfropfen in der Röhre oder genau und glatt cylindrisch durchbohrte Ringe nehmen keine Bewegung an. Sehr viel energischer wird die Bewegung, wenn man dem Kork in der Röhre eine sägenförmige Gestalt gibt wie Fig. 239; und wenn man ein viereckiges Korkstück auf seiner untern Fläche sägenförmig zuschneidet wie Fig. 240, so kann man die Bewegung eben-

Fig. 239.



Fig. 240.



falls auf einem schwingenden Glasstreifen beobachten. Die Bewegung geschieht dann stets in der Richtung der Pfeile, also von den Berührungstellen der Sägezacken nach den hohlen Stellen der Säge. Bei dem Kork Fig. 240 konnte Kundt die Bewegung noch mit ungeminderter Energie beobachten, als er denselben mit Gewichten im Betrage von 200^{gr} belastete.

Dafs diese Bewegung Folge ist der die longitudinale begleitenden Transversalschwingung, zeigte Kundt bei der Anordnung (Fig. 240), indem die Bewegung sich ganz ebenso zeigte, als der Glasstreifen in transversale Schwingungen versetzt wurde. Der Glasstreifen wurde an zwei Punkten unterstützt, horizontal hingelegt und durch einen vertikalen Schlag mit einem Hammer oder vertikales Streichen mit einem Bogen in transversale Schwingungen versetzt. Der Kork wanderte dann von einem Ende des Streifens bis zum andern, über alle Knotenpunkte der transversalen Schwingungen fort. Da in diesem Falle die longitudinalen Schwingungen ausgeschlossen waren, so können nur die transversalen Schwingungen die Bewegung hervorgebracht haben, und da die Bewegung ganz dieselbe ist, wie bei den longitudinalen Schwingungen des Streifens, so darf man schliessen, dafs auch dort die transversalen Schwingungen es sind, welche die Bewegung erzeugen.

Da die Form des Körpers für die Bewegung überhaupt und besonders für die Richtung derselben allein maafsgebend ist, so mufs dieselbe in etwas anderer Weise zustande kommen als die Bewegung des Sandes in den Versuchen von Savart. Kundt denkt sich den Vorgang folgendermafsen. Durch die nach außen gerichtete transversale Bewegung wird der auf dem Streifen liegende elastische Körper etwas zusammengedrückt. Sobald der Stofs aufhört, suchen die zusammengedrückten Theilchen ihre Gleichgewichtslage wieder anzunehmen und stofsen bei ihrer Ausdehnung auf die feste Unterlage. Da diese nicht nachgibt, so wird der Körper ein wenig in die Höhe geschleudert, und zwar nach einer Richtung, welche jener, nach welcher der Rückstofs erfolgt, entgegengesetzt ist. Diese Richtung hängt aber wesentlich ab von der Gestalt des gestofsenen Körpers. Hat der Körper eine zur vertikalen symmetrische Form, so werden die Zusammendrückungen der Theilchen um die vertikale herum ganz gleichmäfsig

sein und infolge dessen der aus der Ausdehnung resultierende Rückstoß vertikal sein, ein solcher Körper hüpfte also einfach in die Höhe und erhält keinen seitlichen Antrieb. Deshalb wird ein glattes Korkstück von parallelepipedischem Querschnitt auf einem Streifen oder ein glatter Cylinder in einer Röhre nicht verschoben. Ein konischer Kork dagegen oder ein wie Fig. 240 gearbeitetes Stück wird vermöge seiner Form schief zusammengedrückt und deshalb auch einen schiefen Rückstoß erfahren, und die vielfach immer in derselben Richtung wiederholten Stöße müssen ein solches Stück in horizontaler Richtung verschieben. Würde der Kork die schwingende Fläche nur in einer Linie berühren, so ginge die Bewegung nur bis zur nächsten Knotenlinie der Transversalschwingungen. Da er aber den Stab immer in einiger Ausdehnung berührt, so treffen ihn, auch wenn er sich über einer Knotenlinie befindet, die Stöße der benachbarten Wellen, und er bewegt sich über die Knotenlinien fort, bis zur longitudinalen Knotenlinie, wo die Teile des Stabes in größerer Ausdehnung in Ruhe sind.

Nach dieser Erklärung der besprochenen Bewegung ist die Natur des bewegten Körpers bei der Bewegung von wesentlichem Einfluß; harte Körper dürfen nach derselben keine Bewegung annehmen; in der That zeigte Kundt, daß Stücke von Holz oder Metall sich nicht bewegten, daß nur solche Körper sich bewegen, welche wie Kork und Kautschuk leicht zusammendrückbar sind.

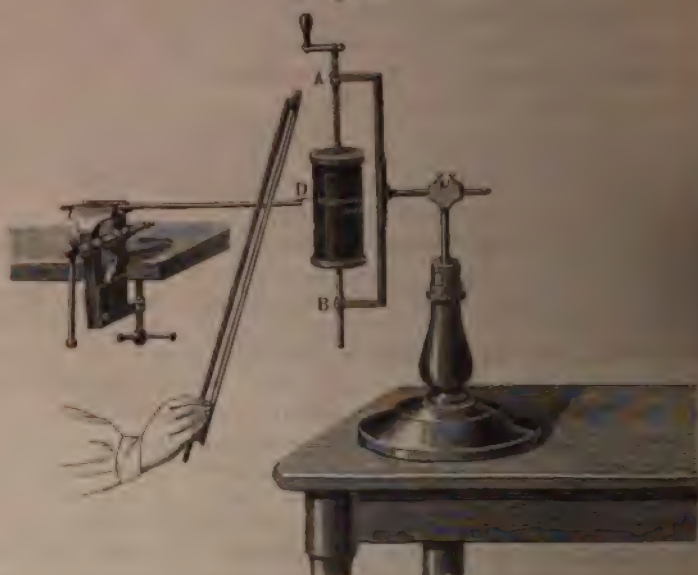
Ebenso wie die Longitudinalschwingungen immer von Transversalschwingungen begleitet sind, so treten auch in den meisten Fällen bei Transversalschwingungen einer bestimmten Periode solche anderer Perioden hinzu. Wirklich einfach periodische Schwingungen entstehen in den seltensten Fällen. So ist auch die Bewegung schwingender Saiten, wenn dieselbe durch Zupfen oder Streichen erregt wird, fast stets eine aus sehr verschiedenen Schwingungen zusammengesetzte. Um die Schwingungen der Saiten zu analysieren, bedient man sich entweder der graphischen Methode, welche zuerst von Savart und Duhamel¹⁾ angewandt ist, oder des Vibrationsmikroskopes von Lissajous. Erstere Methode beruht darauf, daß man den schwingenden Körper mit einem feinen Stift versieht und vor demselben einen Cylinder dreht, der mit Ruß geschwärzt ist (Fig. 241). Die Spitze berührt den Cylinder nur ganz leicht. Die Axe des Cylinders ist mit einem Schraubengewinde versehen, so dass er beim Drehen sich gleichzeitig hebt oder senkt. Wird der Cylinder gedreht, wenn der schwingende Körper, etwa ein Stab, sich nicht bewegt, so zieht die Spitze auf dem Cylinder eine einfache Spirallinie, wenn aber der Stab schwingt, so erhält die Spirallinie eine Wellenform und jeder Welle entspricht eine Schwingung des Stabes. Wenn der Stab in einer komplizierten Form schwingt, wenn gleichzeitig Schwingungen verschiedener Periode vollführt werden, so prägen sich dieselben in der Welle vollständig aus, da die nach einander stattfindenden Bewegungen sich auf dem Cylinder neben einander darstellen. Man bekommt auf dem beruhten Cylinder genau die Form, welche bei einer schwingenden Punktreihe die Reihe bis zu dem Punkte, bis zu welchem sich dieselbe fortgepflanzt hat, annimmt²⁾ (§ 131).

¹⁾ Duhamel, L'Institut. 1840. p. 19 u. p. 41.

²⁾ R. König in Paris verfertigt unter dem Namen Phonautographe derartige Apparate, welche zur Abbildung der verschiedenen Schwingungen vorzüglich geeignet sind.

Das Vibrationsmikroskop benutzt zur Erkenntnis der Schwingungen ein anderes Mittel. Sieht man durch eine ruhende Lupe einen ruhenden glänzenden Punkt an, so erscheint der letztere in Ruhe; wird aber die Lupe rasch bewegt, so scheint sich der Punkt in einer der Bewegungsrichtung der Lupe parallelen Richtung zu bewegen, eine Erscheinung, die wir im zweiten Teile besprechen und erklären werden. Wird deshalb

Fig. 241.



solche Lupe in eine einfach schwingende Bewegung versetzt, so scheint der Punkt in derselben Richtung hin und her zu schwingen und man sieht statt des Punktes eine glänzende Linie. Wird nun der Punkt gleichzeitig in einer zu der erstern senkrechten Richtung bewegt, so kombiniert sich die wirkliche Bewegung mit der scheinbaren, und man sieht den Punkt eine Kurve beschreiben, welche sich als die resultierende der beiden einfachen Bewegungen nach den Sätzen des § 131 ergibt.

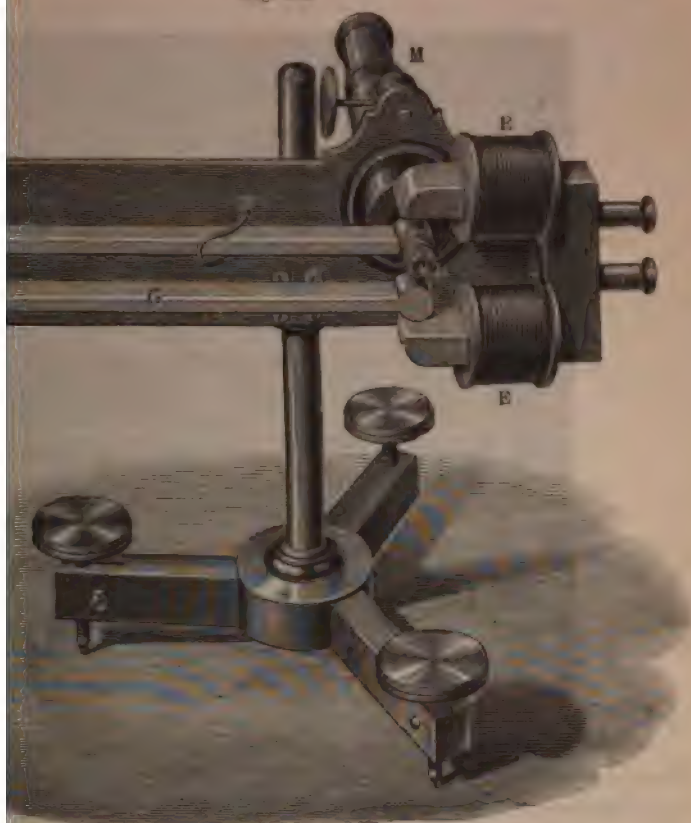
Die Form, welche Helmholtz¹⁾ dem Vibrationsmikroskop gegeben zeigt Fig. 242. Die zur Beobachtung dienende Lupe ist an dem Ende des Zinke der Stimmgabel *G* befestigt; dieselbe besteht aus Sammellinsen, wie sie als Objektivlinsen von Mikroskopen gebraucht werden. In der Öffnung der Metallplatte, welche die Stimmgabel trägt, ist ein Rohr *M* angebracht, in welchem sich eine Okularlinse befindet, und die so eingestellt wird, dass man, während die Stimmgabel nicht schwingt, den auf dem schwingenden Körper angebrachten glänzenden Punkt scharf sieht. Durch den Elektromagnet *E*, der durch intermittierende elektrische Ströme periodisch erregt wird, wird die Stimmgabel in vertikale Schwingungen versetzt. Ein Körper, etwa eine Saite, wird dann vor dem Mikroskop so aufgestellt, dass

¹⁾ Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1862, p. 100.

aler Richtung schwingt und auf demselben gerade vor dem
wa durch Aufkleben eines Stärkekörnchens ein glänzender
rt.

te des Phonautographen kann man sich nun leicht überzeugen,
vingungen einer Saite, wenn sie durch einen einfachen verti-
bewegt wird, sehr zusammengesetzter Natur sind, daß stets
ngsamsten Schwingungen noch eine Reihe anderer auftreten,

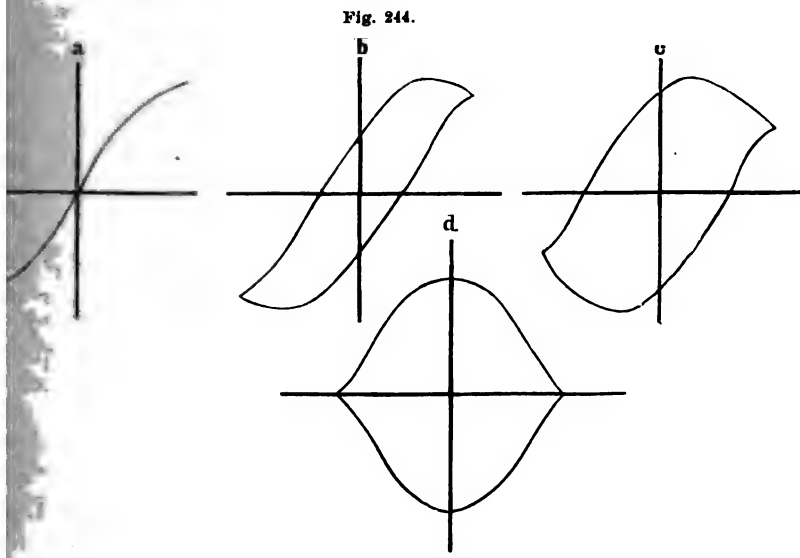
Fig. 242.



nach der Stelle, wo geschlagen wird, verschiedene. Fig. 243
zahl von schwingenden Saiten beschriebener Kurven, welche
reunde Quincke verdanke; dieselben entstehen, wenn die Saiten
den ersten Bruch angegebenen Stelle, also $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ etc. von dem
geschlagen oder gezupft werden, und wenn der Schreibstift
den eingeklammerten Bruch angedeuteten Stelle befestigt
die erste Kurve (Fig. 243a), welche erhalten wird, wenn man
der Mitte zupft und den Schreibstift in $\frac{1}{2}$ der Saitenlänge
richt nahezu einfachen Schwingungen, alle übrigen sind mehr
zusammengesetzt; die Anzahl der gleichzeitigen Schwingungen-

Helmholtz¹⁾ hat über die zusammengesetzten Schwingungen der Saiten, die sie geschlagen oder gezupft werden, ausführliche theoretische und experimentelle Untersuchungen angestellt. Als allgemeines Resultat hat er dabei ergeben, daß die Intensität und Anzahl der in den zusammengesetzten vorhandenen Einzelschwingungen außer von der Stelle, wo die Saite angeschlagen ist, von der Art und Dauer des Anschlags, sowie von der Dicke, Steifigkeit und Elasticität der Saite abhängt. Wir werden auf diese Fragen im nächsten Abschnitte nochmals zurückkommen. (Man sehe S. 11.)

Sehr viel komplizierter sind die Schwingungen einer Saite, wenn diese nicht geschlagen oder gezupft, sondern mit einem Bogen gestrichen wird. Helmholtz²⁾ hat das Vibrationsmikroskop vorzugsweise benutzt, um die Schwingungen einer Violinsaite zu studieren, welche in gewöhnlicher



wie in der Nähe des Steges mit dem Bogen gestrichen wird. Die Schwingungsfigur, welche die Mitte der Saite dann zeigte, wenn die Saite einen reinen vollen Ton gab, ein Beweis, daß die Schwingungen ganz regelmäßig waren, ist in Fig. 244 abgebildet, für den Fall, daß die Schwingungen der Saite und der Gabel ganz genau gleich waren. Fig. 244a zeigt die Figur, wenn die Schwingungen ohne Phasendifferenz stattfanden, wenn die vertikal schwingende Gabel $\frac{1}{2}$, c wenn sie $\frac{1}{4}$, d wenn sie $\frac{3}{4}$ Schwingung voraus ist. Dabei ist die Bewegung als ohne Phasendifferenz vorausgesetzt, wenn dieselbe gleichzeitig nach rechts und oben

¹⁾ Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 128 ff. p. 563. Man sehe auch Braun, Über den Einfluß von Steifigkeit, Bewegung und Amplitude auf die Schwingungen der Saiten. Poggend. Annalen XLVII.

²⁾ Helmholtz, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. 0.

geht, und angenommen, daß beide Amplituden gleich sind. Die Figuren zeigen ohne weiteres, daß die Schwingung der Saite keine einfache ist, denn dann müßten nach § 130 die Fig. a eine gerade um 45° gegen die horizontale geneigte Linie, b und c Ellipsen, d ein Kreis sein. Welcher Art die Bewegung der Saite hiernach ist, das ergibt die Untersuchung, wie die Bewegung beschaffen sein muß, welche mit einer einfachen Schwingung zusammengesetzt, obige Schwingungsfiguren liefert. Dabei ergibt sich das überraschende Resultat, daß die Saite zwischen ihren äußersten Lagen sich mit ganz konstanter Geschwindigkeit hin und her bewegt. Daß in der That obige Schwingungsfiguren aus einer vertikalen einfachen Schwingung und einer horizontalen mit gleichförmiger Geschwindigkeit hin und her gehenden Bewegung sich ergeben, das zeigt die Konstruktion Fig. 245a, welche die Fig. 244a und b, und Fig. 245b, welche Fig. 244c und d liefert.

Fig. 245 a.

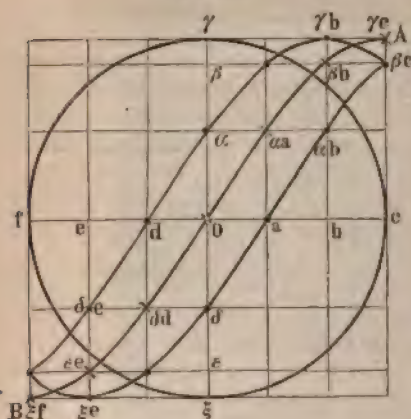
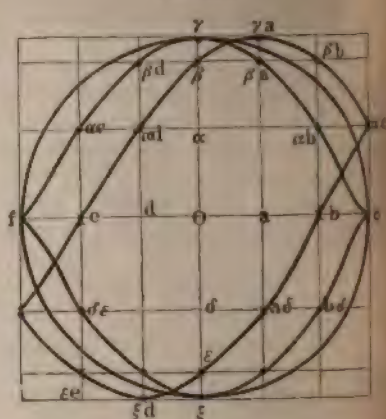


Fig. 245 b.



Die Konstruktion ist der in § 124 angewandten ganz analog. Um die einfachen Schwingungen in ihrer einzelnen Phase darzustellen, ist um den Mittelpunkt O mit der Amplitude der Schwingungen ein Kreis gezogen und dieser in zwölf gleiche Teile geteilt. Entsprechend der Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

geben dann auf dem vertikalen Durchmesser die Sinus dieser Bögen $O\alpha$, $O\beta$ die von dem Vibrationsmikroskope in $\frac{1}{2}T$, $\frac{2}{2}T \dots$ zurückgelegten Wege, also α , β , $\gamma \dots$ die Lage des einfach schwingenden Punktes in den angegebenen Momenten. Der horizontale Durchmesser ist in sechs gleiche Teile geteilt, so daß a , b , c die Lage des mit gleichförmiger Bewegung horizontal schwingenden Punktes nach $\frac{1}{2}T$, $\frac{2}{2}T \dots$ angibt. Bewegt sich der Punkt nach beiden Richtungen, so ist die Lage, wenn keine Phasendifferenz vorhanden ist, zu den Zeiten $\frac{1}{2}T$, $\frac{2}{2}T \dots$ durch O , αa , βb etc. gegeben, wenn die Phasendifferenz $\frac{1}{2}T$ beträgt, durch α , βa , γb , δc etc., er ist nach der vertikalen jedesmal $\frac{1}{2}T$ voraus. Die Verbindungslinien der so erhaltenen einzelnen Punkte geben dann die Bahn desselben, und man sieht,

in Fig. 245 konstruierten Kurven mit den in Fig. 244 abtisch sind.

n auch direkt durch die graphische Methode nachweisen, daß r nahe ihrem Ende gestrichenen Saite mit gleichförmiger Gehin und her geht. Die Schwingungskurven müssen dann rizontale gleichgeneigte auf und ab steigende gerade Linien s, abgesehen von kleinen durch Unregelmäßigkeiten der Behrenden Kräuselungen, der Fall ist, zeigt Fig. 246, welche die der Saite aufgezeichnete Figur gibt, als der Bogen $\frac{1}{2}\pi$ der on dem einen Ende aufgesetzt war. Auch diese Zeichnung meinem Freunde Quincke. Auf die Kräuselungen werden wir in Stelle zurückkommen.

Fig. 246



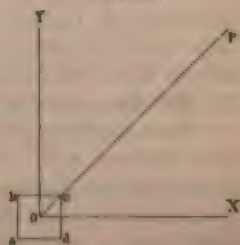
Schwingungen alle in der Saite vorhanden sein müssen, und tnis zwischen den einzelnen Amplituden vorhanden sein muß, x') untersucht. Wir begnügen uns, das Resultat der Unter teilen, nach welchem gleichzeitig alle Schwingungen, die in glich sind, auftreten. Ist die Amplitude der langsamsten t 1, so ist die der folgenden, deren Zahl gleich 2 ist, gleich $\frac{1}{2}$, n mit der Schwingungszahl 3 gleich $\frac{1}{3}$, allgemein die der n . ungungszahl n gleich $\frac{1}{n^2}$. Das Zusammenwirken aller dieser erzeugt eben die gleichförmige Bewegung.

130 und 131 besprochenen Schwingungsformen, wenn zwei u einander senkrechte Bewegungen gleichzeitig auf einen Punkt un man leicht an transversal schwingenden Stäben erhalten, an mit einem glänzenden Punkte versehen. Nimmt man einen iratistischem Querschnitt, so kann man die Schwingungsfiguren cht willkürlich herstellen.

Fig. 247) der quadratische Querschnitt des Stabes; stoßen wir chtung OX an, so wird er in dieser Richtung schwingen, und Punkt eine Linie parallel OX zeigen.

hn parallel OY , so erhalten wir die ie parallel OY . Da die Dicke des bc ist, so sind die Schwingungen nach ngen isochron. Stoßen wir nun das gend einer andern Richtung, so können st stattfindende Bewegung als zusammen en aus einer parallel OX und einer wir erhalten, da dann die beiden Be ne Phasendifferenz sind, eine gerade unter irgend einem Winkel gegen OX

Fig. 247.



Ertheilen wir dagegen dem Stäbchen eine Bewegung parallel der einen Richtung, etwa OX , und geben dann dem schwingenden Stabe einen Stoß nach OY , so treten Ellipsen auf, deren Gestalt von der Phasendifferenz abhängt, welche die beiden Bewegungen dann haben. Wir erhalten dann z. B. die Ellipse Fig. 209 und, von oben angesehen, eine Bewegung des Knöpfchens entgegengesetzt der des Zeigers einer Uhr, wenn wir das Stäbchen in der Richtung nach Y stoßen, wenn es nach X hin $\frac{3}{4}$ seines Weges zurückgelegt hat, einen Kreis, wenn wir es in dem Augenblicke, wo es den größten Abstand nach X erreicht hat, ebenso stark nach Y stoßen, wie vorher nach X hin. Stoßen wir das Stäbchen nach Y hin, wenn es $\frac{3}{4}$ seines Weges nach der entgegengesetzten Seite, nach $-X$ hin zurückgelegt hat, so erhalten wir die Ellipse (Fig. 211) und die Bewegung ist von der Linken zur Rechten im Sinne des Zeigers einer Uhr.

Wenn das Stäbchen nach der einen Richtung ab dicker ist als nach der andern, so geschehen die Schwingungen nach Y rascher als nach X . Ist der Unterschied nur sehr unbedeutend, so daß die Schwingung nach Y nur sehr wenig rascher ist, so hat das, wenn wir den Stab in einer gegen OX und OY geneigten Richtung stoßen, denselben Erfolg, als wenn wir bei gleicher Oscillationsdauer nach und nach die verschiedenen Phasendifferenzen hervorbrächten; wir sehen deshalb nach und nach alle die Figuren entstehen, die wir § 130 ableiteten. Bei der ersten Schwingung, wenn wir den Stab nach P hinstoßen, sehen wir eine Linie parallel OP . Die Schwingung nach der positiven Seite der Y beginnt dann zum zweiten Mal etwas früher als die nach X , die gerade Linie geht daher in eine sehr flache Ellipse über, der Punkt dreht sich wie der Zeiger einer Uhr, die große Axe der Ellipse liegt im Quadranten YOX .

Bei den folgenden Schwingungen wird die Phasendifferenz immer größer, da die Schwingung nach Y immer mehr voreilt, die Ellipse wird daher anfangs immer weniger flach, geht einen Augenblick in einen Kreis über und flacht sich dann wieder ab, aber so, daß jetzt die große Axe in dem Quadranten $YO - X$ sich befindet. Bei weiterer Phasendifferenz wird die Ellipse wieder eine gerade Linie, die senkrecht zu OP ist u. s. f., es treten alle die Figuren nach einander auf, welche, wie wir sahen, bei Stäben mit quadratischem Querschnitt durch verschiedenes Stoßen erzeugt werden können.

Ist der Unterschied der Dicke bedeutend, so erhält man die in § 131 besprochenen Figuren; macht der Stab nach Y z. B. zwei Schwingungen, nach X eine, so erhält man je nach der Phasendifferenz die Kurven Fig. 215, und ist das Verhältnis nicht genau $1:2$, so bekommt man nach und nach die dort besprochenen Kurven.

Das Kaleidophon oder phonische Kaleidoskop von Wheatstone¹⁾ zeigt diese Kurven und aufer diesen manche aus andern Schwingungsverhältnissen zusammengesetzte; der Apparat besteht aus mehreren Stäbchen mit glänzenden Spitzen, die nach den beiden Richtungen ihres Querschnitts von verschiedenen Dimensionen sind. Eine recht hübsche Verbesserung des Wheatstoneschen ist das Universalkaleidophon, welches fast gleichzeitig

¹⁾ Wheatstone, Quarterly Journal of science etc. new series Nr. 11. Weber in Schweigger-Seidels Jahrbuch. Bd. 50.

derjenigen von Lissajous¹⁾ gleich bei seiner großen Untersuchung über die Schwingungen, auf welche wir im nächsten Abschnitt nochmals zurückkommen. In Fig. 248 sind eine Anzahl der von Lissajous gegebenen Kurven mitgeteilt; die Verhältnisse der komponierenden Einzelschwingungen sind neben jeder Reihe angegeben. Sind die Schwingungsverhältnisse nicht ganz genau die angegebenen, so sieht man die in jeder Reihe dargestellten Kurven nach einander auftreten.

Drittes Kapitel.

Wellenbewegung flüssiger und gasförmiger Körper.

§ 146.

Longitudinale Wellen in Flüssigkeiten und Gasen. Gase und Flüssigkeiten haben, wie wir sahen, keine selbständige Gestalt; in ihnen können daher infolge der Elasticität keine schwingenden Bewegungen entstehen, welche mit einer Gestaltsänderung des Körpers verbunden sind, keine transversalen Schwingungen. Da aber die Flüssigkeiten ein selbständiges Volumen haben und, wie wir früher sahen, elastisch sind, und da ebenso die Luft infolge des Druckes, unter dem sie an der Erdoberfläche steht, eine bestimmte Dichtigkeit und Elasticität hat, so können in beiden longitudinale Wellen bestehen und sich fortpflanzen.

Da das Wasser sowohl als die Luft, als Typus der tropfbar und elastisch flüssigen Körper, homogen und isotrop sind, so müssen nach dem Früheren die an einer Stelle im Innern derselben erregten Wellen sich in der Form von Kugeln ausbreiten.

Um von der Entstehung und Fortpflanzung dieser Wellen ein deutliches Bild zu erhalten, denken wir uns eine Kugel *C* (Fig. 249) im Innern einer Flüssigkeit in longitudinale Schwingungen versetzt, so daß also die



Fig. 249.

Kugel sich in rascher Folge abwechselnd vergrößere und verkleinere. Eine Vergrößerung der Kugel wird alle die Kugel rings umgebenden Flüssigkeitsteile in der Richtung der Radien fortstoßen, also diesen Teilchen eine rings von der Kugel fortgerichtete Bewegung erteilen. Infolge dieser nach außen gerichteten Bewegung tritt rings um die Kugel eine Verdichtung der Flüssigkeit ein, und infolge dieser Verdichtung übt diese Flüssigkeitsschicht auf die folgenden einen stärkern Druck von innen nach außen als umgekehrt die umgebende Flüssigkeit von außen nach innen entgegendrückt. Daraus

ergibt sich dann, daß diese fortschreitende Bewegung sich rings um die Kugel immer weiter ausbreitet.

¹⁾ Lissajous, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. LI.

Hat die Kugel das Maximum ihrer Ausdehnung erreicht, so zieht sie sich wieder zusammen. In den durch diese Zusammenziehung entstehenden leeren Raum wird nun wegen des Druckes der Umgebung die Flüssigkeit von allen Seiten her sich hineinbegeben; die Flüssigkeitsschicht erhält also rings um die Kugel eine rückgängige Bewegung. Dadurch tritt rings um die Kugel eine Verdünnung ein, und wegen dieser Verdünnung erhalten auch die folgenden Schichten eine rückgängige Bewegung. Die Verdünnung und somit die rückgängige Bewegung pflanzt sich, auf die Verdichtung und fortschreitende Bewegung folgend, somit gerade so um die Kugel fort wie die letztere.

Durch die Vibrationen der Kugel gelangen also zunächst die Flüssigkeitsteile, welche unmittelbar an der Kugel anliegen, in eine schwingende Bewegung und diese schwingende Bewegung pflanzt sich auf jedem Radius einer Kugel, die wir um den Mittelpunkt der Kugel C uns gelegt denken, fort wie die Schwingungen in den früher betrachteten Punktreihen, wie die longitudinalen Schwingungen in den Stäben der festen Körper.

Die longitudinalen Schwingungen in einer Flüssigkeit, sei sie tropfbar oder elastisch flüssig, sind also ein Fall der früher betrachteten Fortpflanzung einer Wellenbewegung in einem elastischen Punktsysteme. Bezeichnen bei einer kontinuierlichen Schwingung die Kreise a und a' die Stellen, in denen die Punkte in den gleichen Phasen der Bewegung sind, wo sie z. B. ihre fortschreitende Bewegung, in a zum ersten Male, in a' zum zweiten Male beginnen, so ist der Abstand der beiden Kreise eine Wellenlänge, und auf der Strecke aa' sind alle Oscillationsphasen vertreten. Der Kreis b bezeichnet dann alle die Punkte rings um die Kugel, welche eine halbe Oscillation zurückgelegt haben und gerade im Begriffe sind, von der Gleichgewichtslage aus ihre rückschreitende Bewegung zu beginnen. Bezeichnen wir demnach auch hier jene Strecke der Radien, in denen sich die Flüssigkeitsteilchen auf der einen Seite ihrer Gleichgewichtslage befinden, als Wellenberg, jenen Teil, wo sie sich auf der andern befinden, als Wellenthal, so sind die Strecken ba , $b'a'$ Wellenberge, die Strecken ba' , $b'c$ Wellenthäler¹⁾.

Da diese longitudinalen Wellen nur in der Elasticität der Flüssigkeiten ihren Grund haben und durch die zwischen den einzelnen Flüssigkeitsteilchen thätige elastische Kraft fortgepflanzt werden, so können wir zur Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit unmittelbar unsere früher erhaltene Gleichung anwenden:

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}},$$

worin e die elastische Kraft und d die Dichtigkeit der Flüssigkeit in der früher erwähnten Weise bedeuten.

Um demnach die Fortpflanzungsgeschwindigkeit zu erhalten, haben wir nur diese beiden Größen für diese speciellen Fälle zu bestimmen. Beginnen wir mit den tropfbaren Flüssigkeiten.

¹⁾ An dieser Auffassung der Wellenbewegung in Gasen brauchen wir auch infolge der dynamischen Gastheorie nichts zu ändern, da wir im vorigen Abschnitt sahen, daß den Gasmolekülen mitgeteilte Bewegungen sich einfach zu den Molekularbewegungen superponieren.

Die GröÙe e ist, wie wir sahen, die Kraft, mit der die einander genäherten Teilchen sich abstoßen, die entfernten sich anziehen, wenn die Verschiebung der Teilchen der Einheit gleich geworden ist, mit der wir also die GröÙe der Verschiebung multiplicieren müssen, um die einer vorhandenen Verschiebung entsprechende Anziehung oder Abstoßung zu erhalten. Denken wir uns eine Flüssigkeitssäule in einem GefäÙe eingeschlossen, dessen Wände sich nicht ausdehnen können, und komprimieren wir diese Flüssigkeit etwa parallel der Längsaxe des GefäÙes, so wird die dieser Kompression entsprechende elastische Kraft gleich jener sein, welche die schwingende Bewegung veranlaßt und fortpflanzt, da auch bei dieser nur eine Zusammendrückung und Ausdehnung nach der Richtung der Radien stattfindet, weil jeder parallel einem Radius liegende Flüssigkeitsfaden von der umgebenden Flüssigkeit eingeschlossen ist.

Ist v das Volumen der in dem GefäÙe eingeschlossenen Flüssigkeit, ist κ der Kompressionskoeffizient der Flüssigkeit, wenn der Druck für die Flächeneinheit um die GröÙe p zunimmt, so ist die einer Volumverminderung dv entsprechende Druckzunahme dp durch die Gleichung gegeben

$$\frac{dv}{v} = \kappa \frac{dp}{p}$$

oder

$$dp = \frac{p}{\kappa} \frac{dv}{v}.$$

Der Quotient $\frac{dv}{v}$ gibt uns die Volumverminderung der Flüssigkeit in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens. Da nun der Voraussetzung nach die Volumverminderung nur durch eine Verkürzung der Flüssigkeitssäule parallel einer Richtung, wie bei den longitudinalen Schwingungen, stattfindet, so gibt uns der Quotient gleichzeitig die Verschiebung der Flüssigkeitsteile gegen einander gemessen nach ihrem ursprünglichen Abstand. Da wir weiter wissen, daß die durch eine Kompression geweckte elastische Kraft stets gleich ist der äußern dieselbe bewirkenden Kraft, so folgt, daß dp gleich ist der zwischen den Molekülen in der Flächeneinheit thätigen Kraft, wenn dieselben um die GröÙe $\frac{dv}{v}$, dieselbe gegeben in Bruchteilen des ursprünglichen Abstandes, einander genähert sind. Daraus folgt, daß die GröÙe e gegeben ist durch

$$e = \frac{p}{\kappa} q,$$

wenn wir mit q den Querschnitt der betrachteten oder schwingenden Flüssigkeitssäule bezeichnen.

Die GröÙe d ist die Masse der Längeneinheit der schwingenden Flüssigkeitssäule, es ist somit, wenn s das spezifische Gewicht derselben bedeutet,

$$d = sq.$$

Wir erhalten demnach für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der schwingenden Bewegung

$$c = \sqrt{\frac{p}{\kappa \cdot s}},$$

oder wenn wir den der Druckeinheit entsprechenden Kompressionskoeffizienten mit κ_1 bezeichnen,

$$c = \sqrt{\frac{1}{\kappa_1 s}}.$$

Der reciproke Wert von κ_1 ist nach den Entwicklungen des § 63 der Elastizitätskoeffizient der Flüssigkeit E in denjenigen Druckeinheiten, welche dem Werte κ_1 zu Grunde liegen, so daß wir für die in Flüssigkeiten sich fortpflanzenden longitudinalen Wellen genau zu demselben Ausdruck gelangen wie für die longitudinalen Wellen in festen Körpern

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Da wir die Masse der Längeneinheit der Flüssigkeitsschicht ihrem Gewichte gleich gesetzt haben, muß E in den Einheiten des absoluten Systems gegeben werden.

In § 62 haben wir für einige Flüssigkeiten nach den Versuchen von Grassi die Werte von E in Kilogrammen für das Quadratmillimeter ausgedrückt. Um dieselben in das *C. G. S.*-System zu übertragen, haben wir die dort angegebenen Werte mit 98 100 000 zu multiplizieren. Wir gaben damals für Wasser von der Temperatur 4° C.

$$E = 205.$$

Der Wert wird im *C. G. S.*-System

$$E = 201,1 \cdot 10^8 \frac{G}{CS^2}.$$

Da in diesem System die Längeneinheit das Centimeter, somit s die Masse eines Kubikcentimeters Wasser bei 4° ist, so ist $s = 1$, und es wird in Centimetern

$$c = \sqrt{201,1 \cdot 10^8} = 141\,800^{\text{cm}}$$

oder in Metern $c = 1418^{\text{m}}$.

Für Quecksilber ergibt sich aus dem § 62 angegebenen Werte von $E = 3503$

$$E = 3436,5 \cdot 10^8 \frac{G}{CS^2}.$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers ist 13,5959, also

$$c = \sqrt{\frac{3436,5 \cdot 10^8}{13,5959}} = 159\,000^{\text{cm}} = 1590^{\text{m}}.$$

Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, haben Colladon und Sturm¹⁾ für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Wasser ganz der Theorie entsprechende Werte gefunden, nämlich für die Temperatur 8° den Wert 1435^m.

Wir können auch dem Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in Flüssigkeiten dieselbe zweite Form geben, die wir für die festen Körper ableiteten. Wir denken uns ein Kubikcentimeter

¹⁾ Colladon und Sturm, Annales de chim. et de phys. T. XXXVI. Poggend. Ann. Bd. XII.

Flüssigkeit in einem unausdehnbaren Würfel und üben auf die obere Fläche der Flüssigkeit einen Druck durch ein Kubikcentimeter derselben Flüssigkeit. Der von dieser Flüssigkeit ausgeübte Druck ist in den Einheiten des C.G.S. Systems gleich gs . Die dadurch eintretende Volumverminderung in Bruchteilen des ursprünglichen Volumens ist

$$\delta = \kappa_1 gs = \frac{gs}{E}.$$

Daraus folgt

$$\frac{E}{s} = \frac{g}{\delta}$$

$$c = \sqrt{\frac{g}{\delta}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen ist also gleich der Quadratwurzel aus der Beschleunigung beim freien Fall dividiert durch die Quadratwurzel aus der Volumverminderung, welche die Volumeneinheit durch einen Druck erfährt, der dem Gewichte der Volumeneinheit der Flüssigkeit entspricht, oder wie man sich kurz ausdrückt, welche die Volumeneinheit durch ihr eigenes Gewicht erfährt¹⁾.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in Gasen erhalten wir, wenn wir in dem ersten für die Flüssigkeiten abgeleiteten Ausdrucke $\kappa = 1$ setzen; denn nach dem Mariotteschen Gesetze ist die der Volumverminderung dv entsprechende Druckvermehrung dp durch die Gleichung gegeben

$$\frac{dv}{v} = \frac{dp}{p}.$$

Denn haben wir ein Volumen v eines Gases unter dem Drucke p und wächst der Druck um dp , so nimmt das Volumen um dv ab, so daß nach dem Mariotteschen Gesetze

$$pv = (p + dp)(v - dv) = pv + vdp - pdv - dpdv.$$

Bei den hier betrachteten schwingenden Bewegungen ist dv so klein, daß wir $dpdv$ gleich Null setzen dürfen, dann folgt aber aus dieser Gleichung

$$vdp - pdv = 0 \text{ oder } dp = p \frac{dv}{v}.$$

Wir haben somit für die Größe c in jedem Falle den Druck einzusetzen, unter welchem das Gas augenblicklich steht. Bedeutet demnach auch jetzt s das spezifische Gewicht des Gases, so wird

$$c = \sqrt{\frac{p}{s}}.$$

Ist s' die Dichtigkeit des Gases unter dem Druck p' der Atmosphäre, so ist nach dem Mariotteschen Gesetze

$$\frac{p}{s} = \frac{p'}{s'},$$

somit

$$c = \sqrt{\frac{p'}{s'}}.$$

¹⁾ Man sehe auch *Poisson*, *Traité de mécanique*, livre sixième, chap. II, § 667.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen hängt somit, da Dichtigkeit und Elasticität des Gases sich im gleichen Verhältnisse ändern, nicht vom Drucke, unter welchem das Gas steht, ab, sondern ist für alle Gase dieselbe.

An dem Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in Gasen müssen wir eine Korrektur anbringen, die, wie wir später in der Wärmelehre nachweisen werden, ihren Grund darin hat, daß jede Kompression der Gase eine Erwärmung, jede Ausdehnung eine Abkühlung zur Folge hat. Diese Erwärmung und Abkühlung bewirkt, daß von den Molekülen der Verdichtung die Moleküle mit größerer Kraft zu denen der Verdünnung getrieben werden, so zwar, daß die elastische Kraft im Verhältnisse 1 zu k vergrößert wird¹⁾. Wir müssen deshalb den vorhin bestimmten Wert von c mit \sqrt{k} multiplicieren und erhalten somit

$$c = \sqrt{\frac{p'}{s'}} \cdot k.$$

Bei der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in Gasen ist nun darauf zu achten, daß die Dichtigkeit derselben bei einem gegebenen Drucke wesentlich von der Temperatur abhängig ist. Bezeichnen wir die Dichtigkeit des Gases bei der Temperatur des schmelzenden Eises mit s_0 , so ist bei einer Temperatur t , dieselbe nach Graden der hunderttheiligen Scala gemessen,

$$s' = \frac{s_0}{1 + 0,00367 t}.$$

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bei der Temperatur t erhalten wir demnach

$$c = \sqrt{\frac{p' k}{s_0} (1 + 0,00367 t)}.$$

Die Dichtigkeit der atmosphärischen Luft ist unter dem Drucke einer Atmosphäre und bei der Temperatur 0° gleich 0,001293. Für Luft ist der Wert von k , wie wir in der Wärmelehre zeigen werden, 1,405. Der Druck der Atmosphäre ist in den Einheiten des C. G. S.-Systems

$$p' = 10136 \cdot 10^3 \frac{G}{CS^2}.$$

Wir setzen zur Bestimmung von p' den Normaldruck zu Paris, also gerechnet mit dem Pariser g ein, weil die Dichtigkeit s_0 der Luft von Paris zu Paris bestimmt ist. Mit diesen Werten wird

$$c = 33180 \sqrt{1 + 0,00367 t} \text{ Cm.} = 331,8 \sqrt{1 + 0,00367 t} \text{ M.}$$

Für ein anderes Gas haben wir die betreffenden Werte von k und s_0 einzusetzen; nennen wir das spezifische Gewicht des Gases bezogen auf

¹⁾ Man sehe im dritten Bande den Paragraphen: Spezifische Wärme der Gase bei konstantem Volumen.

Luft σ , so können wir für ein beliebiges Gas die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen schreiben

$$c = 331,8 \sqrt{\frac{k}{1,405 \cdot \sigma}} (1 + 0,00367 t).$$

Bestätigungen dieser Ausdrücke werden wir bei Besprechung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Gasen kennen lernen.

§ 147.

Stehende Wellen in Flüssigkeitscylindein. Wenn man in ein cylindrisches Gefäß eine Flüssigkeit einschließt und man erregt an einer Stelle des Flüssigkeitscylindein eine schwingende Bewegung, so pflanzt sich dieselbe durch die Säule fort, wird an den Enden reflektiert und es entstehen durch Interferenz der direkten und reflektierten Welle stehende Schwingungen. Da wir auf die Wellenbewegung dieser Art nach dem vorigen Paragraphen unmittelbar unsere frühere Theorie der longitudinalen Schwingungen anwenden können, so haben wir für die Schwingungsdauer dieser stehenden Wellen den Ausdruck

$$T = 2L \sqrt{\frac{d}{c}} = \frac{2L}{c}$$

und wir haben nur die Länge L der stehenden Welle zu bestimmen, in welcher die Flüssigkeitssäule schwingt.

Wir können auch hier die Fälle unterscheiden, wo die Flüssigkeitssäule an beiden Seiten frei ist, oder wo sie an einem Ende frei ist, an andern befestigt. Ersteres ist dann der Fall, wenn wir eine Flüssigkeitssäule in einer heberförmigen an beiden Seiten offenen Glasröhre oder in einer in eine Flüssigkeitsmasse getauchten Glasröhre zum Schwingen bringen. Denn auch in dem letztern Falle ist die umgebende Flüssigkeit gewissermaßen weniger dicht als die in der Röhre eingeschlossene, da die Flüssigkeit außerhalb der Röhre bei einer an dem Ende der Röhre ankommenden Verdichtung nach allen Seiten und deshalb leichter ausweichen kann, als die Flüssigkeit in der Röhre, welche sich nur der Längsrichtung der Röhre nach bewegen kann. In diesen beiden Fällen tritt demnach eine Reflexion ohne Wechsel des Vorzeichens, ohne Verlust einer halben Wellenlänge ein.

Der zweite Fall ist dann vorhanden, wenn wir eine Flüssigkeitssäule in einer geraden unten geschlossenen Glasröhre zum Schwingen bringen, es tritt dann an der untern Grenze eine Reflexion mit Verlust einer halben Wellenlänge ein; ein ankommender Wellenberg wird als Wellenthal reflektiert.

Die Oscillationsdauern und Schwingungszahlen solcher Flüssigkeitscylindein ergeben sich daher unmittelbar wie diejenigen longitudinal schwingender Stäbe, wenn wir dasselbe Verfahren anwenden wie § 138. Für den an beiden Enden freien Flüssigkeitscylindein von der Länge l wird

$$T = \frac{2l}{c}.$$

Länge der stehenden Welle ist gleich der Länge des Flüssigkeitssylinders, und daraus

$$N = \frac{c}{2l}.$$

den zweiten Fall wird

$$T = \frac{4l}{c},$$

die stehende Welle hat die doppelte Länge des Flüssigkeitssylinders, die Schwingungsdauer ist die doppelte des vorigen Falles. Die Schwingungsdauer ist die Hälfte

$$N = \frac{c}{4l}.$$

Die Zahlen entsprechen den langsamsten Schwingungen, welche die Flüssigkeitssäule vollführen können. Auch hier können sich die Cylinder in ungleiche Teile zerlegen, welche selbständig schwingen und wegen der doppelten Länge größere Schwingungszahlen haben. Durch ein gleiches Experiment, wie wir es im § 138 anwandten, findet man, daß die möglichen Schwingungszahlen einer an beiden Enden freien Flüssigkeitssäule sind

$$N = n \cdot \frac{c}{2l},$$

wo jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann; und für die geschlossenen Röhre enthaltene Flüssigkeitssäule

$$N = (2n - 1) \frac{c}{4l}.$$

Die experimentelle Bestätigung dieser Gesetze nur durch die von Schwingungen der Flüssigkeit erzeugten Töne gegeben werden kann, wie wir die Versuche von Cagniard Latour und Wertheim erst im nächsten Abschnitte besprechen können.

Flüssigkeitssäulen, welche in Röhren eingeschlossen sind, können ebenfalls in Schwingung einer vibrierenden Bewegung an ihrem einen Ende in Schwingungen versetzt werden. Sind die Röhren an dem einen Ende geschlossen, so tritt dort Reflexion mit Verlust einer halben Wellenlänge; sind sie offen, so tritt eine Reflexion an der umgebenden Luft ein mit Verlust einer halben Wellenlänge, da die Luftteilchen außerhalb der Röhre nach allen Richtungen und somit freier beweglich sind als in der Röhre. Die an die Röhre angrenzende Luft ist somit gewissermaßen in Schwingung. Die sich ergebenden Schwingungsdauern und Schwingungszahlen sind daher in offenen Röhren von der Länge l , für die langsamsten Schwingungen

$$T = 2l \sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{2l}{c},$$

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{c}{2l}$$

für überhaupt möglichen Schwingungen

$$N = n \cdot \frac{c}{2l}.$$

Für an dem einen Ende geschlossene Röhren erhalten wir statt dessen

$$T = 4l \sqrt{\frac{d}{e}} = \frac{4l}{c},$$

$$N = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{e}{d}} = \frac{c}{4l}$$

und als mögliche Schwingungszahlen

$$N = (2n - 1) \frac{c}{4l}.$$

Wir werden diese Ausdrücke im nächsten Abschnitte bei Bestimmung der Töne von offenen und gedeckten Pfeifen benutzen und dort zugleich die experimentelle Bestätigung und eingehendere Behandlung dieser Sätze geben.

Ebenso wie in Luftsäulen kann man auch plattenförmige Luftmengen in stehende Schwingungen versetzen, das heisst dünne Luftschichten, welche zwischen ebenen Platten eines festen Körpers, etwa zwischen zwei Glasplatten eingeschlossen sind, sowohl wenn man die Luftplatten seitlich fest begrenzt, das heisst die Ränder der beiden ebenen Platten, welche die Luftplatte einschliessen, durch einen festen Rahmen verbindet, als wenn man sie seitlich unbegrenzt läßt. Die Untersuchung der schwingenden Bewegung solcher Platten hat ein großes Interesse, weil man die Theorie dieser Bewegungen vollständig durchführen kann. In einer ausführlichen theoretischen und experimentellen Untersuchung hat Kundt¹⁾ für die ganz geschlossenen, das heisst rings von einem festen Rande umgebenen Luftplatten die volle Übereinstimmung zwischen Theorie und Erfahrung nachgewiesen, während für die offenen, das heisst rings nicht mit einem festen Rand umgebenen Luftplatten sich Abweichungen zwischen der Theorie und der Erfahrung zeigen, wie wir sie im nächsten Abschnitt auch für die offenen Luftsäulen, die offenen Orgelpfeifen finden werden. Wir müssen uns hier begnügen, auf die interessante Arbeit von Kundt hinzuweisen, da eine Behandlung dieses speciellen Falles zu viel Raum in Anspruch nehmen würde.

§ 148.

Transversale Wellen in Flüssigkeiten. Ausser den longitudinalen Schwingungen kann man den tropfbar flüssigen Körpern auch transversale Schwingungen erteilen. Die in einem Gefässe eingeschlossene Flüssigkeit hat nämlich eine ganz bestimmte Gleichgewichtslage, und die auf eine der Schwere unterworfenen Flüssigkeit wirkenden Kräfte veranlassen, daß die Oberfläche der Flüssigkeit eine horizontale Ebene bildet. Wird nun das Gleichgewicht der Flüssigkeit an irgend einer Stelle gestört und dort eine Bewegung eingeleitet, so pflanzt sich die Gleichgewichtsstörung nach und nach auf andere Stellen der Flüssigkeit fort.

Wirft man einen Stein in eine ruhende Wassermasse, oder läßt man einen Tropfen auf die Oberfläche einer in einem weiten Gefässe befindlichen Flüssigkeit fallen, so sieht man bald die Flüssigkeit in einem Kreise rings

1) Kundt, Poggend. Ann. Bd. CL.

an die getroffene Stelle wallförmig sich emporheben. Dieser Flüssigkeitswall breitet sich ringsum aus, an der Stelle aber, wo zuerst die Flüssigkeit über das Niveau sich erhob, zeigt sich dann eine Vertiefung der Flüssigkeit. Sowie nun die wallförmige Erhöhung sich rings durch die Flüssigkeit ausbreitet, so auch diese Vertiefung. Meist zeigt sich auf eine solche Störung des Gleichgewichts nicht nur eine solche Erhöhung und Vertiefung, sondern mehrere, die nach einander, abwechselnd eine Erhöhung und eine Vertiefung als ebenso viele Wellenberge und Wellenthäler, sich über der Flüssigkeitsoberfläche verbreiten.

Dafs wir es hier mit einer wirklichen Wellenbewegung, das heifst mit einer hin und her gehenden Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen, nicht mit einer fortschreitenden zu thun haben, ergibt sich aus den Versuchen der Gebrüder E. H. und W. Weber auf das entschiedenste¹⁾.

Um die Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen zu untersuchen, dienten sich die beiden Weber der Wellenrinne. Dieselbe besteht (Fig. 250) aus einem circa 1,6 Meter langen geraden glatt gehobelten Brette aus Eichenholz *AB*, auf dem in zwei tiefen Furchen circa 15 Millimeter voneinander zwei dicke Glasscheiben fest eingefügt sind. Diese beiden Glasscheiben *JJJ*, *KKK* werden ausserdem durch die beiden senkrechten Bretter *E* und *F*, in welche sie auch eingefügt sind, festgehalten.

Fig. 250.



Die Befestigungen der Scheiben in den Fugen sind vollständig wasserdicht. Der schmale zwischen den beiden Glasscheiben und den Brettern eingeschlossene Raum von circa 1,5 Meter Länge, 15 Millimeter Breite im Innern und 16 Centimeter Tiefe wird mit Wasser, Quecksilber, Milch etc., nach Bedürfnis zu irgend einer Höhe angefüllt. Dabei werden dann die Glasscheiben, um ein Biegen oder Brechen derselben zu verhindern, durch mehrere feste hölzerne Gabeln oder Klammern zusammen geklammert²⁾.

Hat man die Wellenrinne bis zu irgend einer Höhe mit Wasser gefüllt, so hebt man an einem Ende derselben durch Aufsaugen in einer Glasröhre etwas Flüssigkeit in die Höhe und erzeugt dann, indem man die Flüssigkeit wieder niederfallen läfst, eine Welle, welche durch die Rinne fortschreitet.

Man sieht dann zunächst einen senkrechten Durchschnitt der erregten Welle durch die Glaswände und kann so die Gestalt der Wellen aufgesucht bestimmen. Man sieht aber auch zugleich, wenn man in die Rinne kleine Bernsteinstückchen, von gleichem specifischen Gewicht als das Wasser

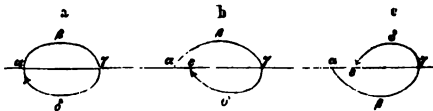
¹⁾ Wellenlehre, auf Experimente gegründet von den Brüdern E. H. Weber und W. Weber. Leipzig 1825.

²⁾ Ebendasselbst. p. 105.

bringt, und dann durch die Glaswände hindurch gegen das Licht blickt, die Bewegung dieser festen Teilchen und kann ihre Bahnen bestimmen. Da nun diese Teilchen genau dieselbe Bewegung haben als die Wasserteilchen, deren Stelle sie vertreten, so kann man dadurch die Bewegung der Flüssigkeit genau bestimmen.

Aus ihren mannigfachen Versuchen ersahen die Gebrüder Weber, daß die Flüssigkeitsteilchen wirklich keine fortschreitende, sondern nur eine hin und her gehende Bewegung bei Erregung einer Welle annehmen, und zwar, wenn die auf einander folgenden Wellen eine gleiche oder fast gleiche Gestalt haben, daß dann die Teilchen in oder nahe der Oberfläche sich in geschlossenen, nahezu elliptischen Bahnen (Fig. 251 a) bewegen. Bewegt sich durch die Rinne eine Welle von B nach A fort und zwar ein Wellenberg voraus, so bewegen sich die Wasserteilchen, wenn der Berg vorüber zieht, in dem Bogen $\alpha\beta\gamma$ aufwärts, vorwärts, abwärts in derselben Richtung, in welcher der Berg vorübergeht. Folgt dann das Wellenthal, das ebenso tief ist, als der Wellenberg hoch war, so bewegt sich das

Fig. 251.



Teilchen weiter durch den Bogen $\gamma\delta\alpha$ nach α zurück. Der senkrechte Abstand des höchsten Punktes β dieser Bahn von dem Niveau $\alpha\gamma$ ist gleich der Höhe des Wellenberges und der des tiefsten Punktes δ von $\alpha\gamma$ gleich der Tiefe des Wellenthales.

Geht das Wellenthal dem Wellenberg voraus, so bewegt sich das Teilchen zunächst durch $\gamma\delta$ nach α und dann durch den Bogen $\alpha\beta\gamma$ in seine frühere Lage γ zurück. Die fortschreitende Bewegung ist unter dem Wellenberg stets der Richtung gleich, in welcher die Welle fortschreitet, im Wellenthal dieser Richtung entgegengesetzt.

Die Schwingungsbahnen der Flüssigkeiten laufen aber nicht in sich selbst zurück, wenn die den Wellbergen folgenden Thäler mit den ersten nicht von gleicher Größe sind.

Ist das dem vorhergehenden Wellenberg folgende Wellenthal merklich kleiner, so wird die Bahn der Flüssigkeitsteilchen Fig. 251 b, und geht das Thal, aber in der Richtung von A nach B , voraus und folgt ihm ein kleiner Wellenberg, so wird die Bahn Fig. 251 c, in beiden Fällen gelangt das Flüssigkeitsteilchen nicht zu seiner ursprünglichen Ruhelage α zurück.

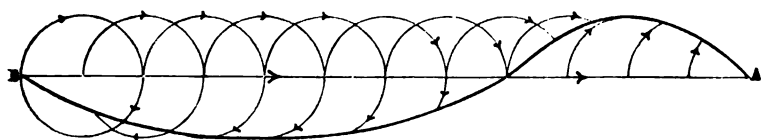
Die schwingende Bewegung der Flüssigkeitsteilchen beschränkt sich jedoch nicht auf die Teilchen in oder nahe der Oberfläche der Flüssigkeiten, sondern in sehr großen Tiefen unter der Oberfläche zeigen die Flüssigkeitsteilchen noch eine schwingende Bewegung. Die Versuche der Gebrüder Weber ergaben, daß in einer Tiefe, welche 350mal die Höhe der Wellen, das heißt den Abstand des höchsten Punktes des Wellenberges von dem tiefsten des Wellenthales betrug, noch eine deutliche schwingende Bewegung stattfand. Indes zeigte sich ein merklicher Unterschied in den Bahnen der Teilchen. Während nämlich die Teilchen ganz nahe unter der Oberfläche fast kreisförmige Bahnen besaßen, wurde die vertikale Höhe der Ellipsen immer kleiner, je tiefer die Flüssigkeitsteilchen sich unter der Oberfläche befanden. In einer Tiefe, welche ungefähr das Hundertundzwanzigfache von der Höhe der Welle betrug, war die vertikale Bewegung der Teilchen fast unmerklich.

in noch größern Tiefen bestand die Bewegung der Teilchen nur in dem Hin- und Hergehen in horizontaler Richtung.

So fanden die beiden Weber z. B. bei einer Welle, die eine Höhe von ca 2^{mm} hatte, nahe unter der Oberfläche die vertikale Höhe der Bahn sich dieser Höhe, den horizontalen Durchmesser gleich 2,5 Millimeter, einer Tiefe von 230 Millimeter betrug die vertikale Höhe der Bahn nur 5 Millimeter, der horizontale Durchmesser 1 Millimeter und in größern Tiefen war der vertikale Durchmesser nicht mehr messbar, während der horizontale sich nur mehr unbedeutend verkleinerte und in der Nähe des Bodens sogar wieder etwas größer wurde.

Aus dieser Art der Bewegung der Flüssigkeitsteilchen ersehen wir, daß dieselben sich zugleich nach zwei verschiedenen Richtungen bewegen, auf und nieder und vor- und rückwärts. Daraus folgt dann, daß die Gestalt der Flüssigkeitswellen, die bereits § 130, Fig. 212 betrachtete sein muß, oder daß, wenn das dem Wellenberg folgende Wellenthal eine Tiefe hat, welche der Höhe des Berges gleich ist, es stets etwas länger sein muß. Die Welle muß, wie man unmittelbar sieht, die Gestalt Fig. 252 haben. Die Welle schreitet in der Richtung der Pfeilstriche von B nach A

Fig. 252.



von B nach A, und die einzelnen Flüssigkeitsteilchen durchlaufen hier die als kreisförmig vorausgesetzten Bahnen in dem von den Pfeilen angedeuteten Sinne,

Wellenberge in horizontaler Richtung vorwärts und im Wellenthal wieder zu ihrer Gleichgewichtslage zurück.

Daß die Wasserwellen wirklich diese Gestalt haben, sahen die Gelehrten Weber; sie sahen stets, daß bei gleicher Tiefe die Länge oder Breite des Wellenthales etwas größer war als diejenige des Wellenberges.

§ 149.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wasserwellen. Die an der Oberfläche einer Flüssigkeit erregte, mit Gestaltsänderung verbundene schwingende Bewegung der Flüssigkeitsteilchen pflanzt sich nach dem Prinzip nach zwei Richtungen fort, einmal an der Oberfläche hin, indem derselben das wellenförmige Ansehen gibt, andererseits nach der Tiefe, indem wir sahen, daß die Teilchen auch in der Tiefe, wenn eine Welle an der Flüssigkeit fortschreitet, eine schwingende Bewegung annehmen. Fragt sich nun, mit welcher Geschwindigkeit sich die Bewegung nach den Richtungen fortpflanzt.

Was zunächst die Fortpflanzung der Bewegung in die Tiefe der Flüssigkeit betrifft, so bemerkt man weder bei der Erregung noch beim horizontalen Fortgange der Wellen ein allmähliches Fortschreiten derselben,

sondern die schwingende Bewegung scheint, wenigstens so weit es sich beurteilen läßt, gleichzeitig in der Tiefe und an der Oberfläche zu geschehen. Die senkrecht oder fast senkrecht unter einander liegenden Flüssigkeitsteilchen scheinen alle gleichzeitig in der gleichen Oscillationsphase sich zu befinden.

Dieses Resultat ist nach dem ersten Paragraphen dieses Kapitels vor auszusehen; denn die Bewegung der Flüssigkeit in der Tiefe kann zur Folge des fortgepflanzten Stosses, der Dichtigkeitsänderung an der Oberfläche der Flüssigkeit, bei Erregung und Fortdauer der schwingenden Bewegung sein; nach unten hin pflanzt sich daher die Bewegung ebenso rasch fort wie die longitudinalen Wellen, welche wir in den vorigen Paragraphen betrachtet haben.

Anders jedoch mit der Fortpflanzung der Wellenbewegung an der Oberfläche der Flüssigkeit, diese ist viel langsamer, so daß man die einzelnen Wellen recht gut verfolgen kann.

Zunächst wiesen die Gebrüder Weber nach, daß auch bei diesen Wellen, gerade wie wir es im ersten Kapitel dieses Abschnittes entwickelten, die Bewegung sich genau um die Länge einer Welle fortpflanzt, während ein Flüssigkeitsteilchen eine Oscillation zurücklegt. Dann aber zeigten sie, daß bei diesen Flüssigkeitswellen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht für alle Wellen die gleiche sei und nicht von der Elasticität und Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängt, sondern daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von einer Menge von Umständen abhängt.

Die Geschwindigkeit der Flüssigkeitswellen hängt wesentlich von der Höhe und Länge der Wellen ab; alle Umstände, welche daher Höhe und Länge der Welle ändern, ändern auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Die Höhe und Länge, oder wie die Gebrüder Weber sie nennen, Breite der Wellen hängt nun zunächst ab von der Stärke des Stosses, der die Welle erregt, je stärker der Stofs ist, um so höher ist die Welle; da die höhere Welle sich rascher fortpflanzt, so nimmt die Geschwindigkeit der Welle mit der Stärke des sie erregenden Stosses zu.

Breitet sich eine Welle über einen immer größern Raum aus, so nimmt dadurch die Höhe der Welle ab, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird daher kleiner, je weiter sich in diesem Falle die Welle von dem Punkte ihrer Erregung entfernt. Man kann dieses sehr leicht wahrnehmen, wenn man in einer ruhenden Wasserfläche durch Hineinwerfen eines Steins Wellen erzeugt. Es bilden sich dann eine Reihe von Wellen, die sich in immer größern Kreisen ausbreiten. Erregt man dann durch Hineinwerfen eines Steines von gleicher Größe wie vorhin zwischen den ausgedehnten Wellen ein neues Wellensystem, so sieht man, wie sich dort die Wellen sehr viel rascher ausbreiten.

Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung hängt ferner ab von der Tiefe der Flüssigkeit; je tiefer die Flüssigkeit ist, um so rascher pflanzt sich die Welle fort. Der Grund dafür ist einmal in der Reibung und Adhäsion der Flüssigkeit am Boden zu suchen; dann aber auch darin, daß in der Nähe des Bodens, wie wir vorhin sahen, die Höhe der Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen und somit die Höhe der Welle abnimmt.

Die Geschwindigkeit der Wellen nimmt übrigens nicht in demselben Verhältnisse ab wie die Tiefe der Flüssigkeiten, sondern langsamer.

Die Versuche, mittels deren die beiden Weber diese Sätze ableiteten, wurden so angestellt, daß eine Glasröhre an dem einen Ende der Rinne befestigt war, daß ihre Mündung konstant nahe 2^{mm} unter dem Niveau der Flüssigkeit war. Durch Aufsaugen und nachheriges Fallenlassen der Flüssigkeit wurde die Welle erregt. Mittels einer Uhr, welche $\frac{1}{10}$ Sekunde angab, und die durch einen Druck mit dem Finger angehalten und losgelöst werden konnte, wurde dann die Zeit beobachtet, in welcher der Gipfel der Welle an dem andern Ende der Wellenrinne ankam. Die Uhr wurde zu dem Momente losgelassen, in welchem man die gehobene Flüssigkeitssäule fallen ließ, und festgehalten, wenn der Gipfel der erregten Welle das andere Ende erreichte; die Quotienten aus der Länge der Rinne und den beobachteten Zeiten ergaben dann die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten.

Wir teilen hier die Resultate einiger Versuche mit, um zugleich eine Vorstellung von der Geschwindigkeit zu geben, mit welcher sich derartige Wellen fortpflanzen.

Die Wellen wurden bei gleicher Tiefe in verschiedenen Flüssigkeiten nach gleich hohe Flüssigkeitssäulen erregt. Es zeigte sich folgendes:

Tiefe der Flüssigkeit	Höhe der wellen- erregenden Säule	Geschwindigkeit der Wellen	
		auf Wasser	auf Quecksilber
2,7 Cent.	5,4 Cent.	53,3 Cent.	51,3 Cent.
	8,1 "	54,4 "	54,0 "
	10,8 "	55,5 "	55,76 "
	16,2 "	56,9 "	60,3 "
	21,6 "	56,9 "	62,1 "
5,4 Cent.	5,4 "	75,3 "	60,9 "
	8,1 "	75,9 "	64,3 "
	10,8 "	77,4 "	66,3 "
	16,2 "	77,0 "	65,5 "
	21,6 "	75,9 "	69,2 "
10,8 Cent.	8,1 "	79,2 "	Branntwein
	16,2 "	100,1 "	—
	32,4 "	100,1 "	81,8 Cent.
	48,6 "	—	86,8 "
21,6 Cent.	32,4 "	135 "	135 "

Aus einer Betrachtung dieser Zahlen scheint ferner hervorzugehen, daß die Wellen in Flüssigkeiten von verschiedenem specifischen Gewichte mit merklich gleicher Geschwindigkeit fortbewegen, wenn sie durch gleich hohe Säulen der Flüssigkeiten erregt sind. Strenge genommen ist es jedoch nur der Fall, wenn die Flüssigkeiten eine bedeutende Tiefe haben, bei geringerer Tiefe bewirkt der Einfluß des Bodens, die verschiedene Adhäsion der Flüssigkeiten an demselben und an den Wänden des Gefäßes, daß die Geschwindigkeiten verschieden sind.

E. H. und W. Weber, Wellenlehre etc. p. 166 ff.

§ 150.

Die Ursachen der Flüssigkeitswellen. Vergleichen wir dies über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der sichtbaren Flüssigkeiten mit den früheren Sätzen über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der die Elasticität bedingten Wellen in festen, flüssigen und gasförmigen Körpern, so ergibt sich unmittelbar, daß wir die hier in Rede stehenden nicht als eine Äußerung der Elasticität der Flüssigkeiten ansehen können. Denn für die durch die elastische Kraft der Körper fortgepflanzten erhielten wir als Ausdruck der Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$c = C \sqrt{\frac{e}{d}}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit war proportional der Quadratwurzel aus der elastischen Kraft und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit der betreffenden Substanz; sie war unabhängig von der Länge der Welle und unabhängig von ihrer Höhe, das heißt, der Amplituden. Bei den Flüssigkeitswellen aber, die wir hier betrachten, findet gerade das Umgekehrte statt; ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nahezu unabhängig von der Natur der Flüssigkeit, ändert sich aber, wie wir sehen werden, mit der Länge der Wellen und ihrer Höhe. Vergleichen wir jetzt die Werte, welche die beiden Weber für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in verschiedenen Fällen erhalten haben, mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der durch Elasticität bestehenden Wellen, so weist dieses uns darauf hin, die Ursache dieser Wellen nicht in der Elasticität der Flüssigkeit zu suchen; denn für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch Elasticität erregten Wellen hatten wir für Wasser z. B. mehr als 1400 Meter, hier jedoch nur wenige Decimeter.

Noch ein anderer Umstand läßt es klar hervortreten, daß die Ursache der Wellenbewegung nicht eine Folge der elastischen Kraft der Flüssigkeiten ist, nämlich die Höhe der Wellen. Wir sehen auf der Oberfläche einer Flüssigkeit bereits eine deutliche Erhebung eintreten, wenn wir einen Tropfen der Flüssigkeit auf die Oberfläche fallen lassen. In Folge der äußerst geringen Kompressibilität der Flüssigkeiten kann aber die Zusammendrückung derselben infolge einer so kleinen Kraft nur unmerklich klein sein und deshalb die auf die Zusammendrückung folgende Ausdehnung der Flüssigkeit und somit die Erhebung derselben über das Niveau nur unmeßbar klein und nicht mit der beobachteten Höhe der Wellen vergleichbar sein.

Wenn man sich nun daran erinnert, daß unter Einwirkung der Schwerkraft die Flüssigkeit eine horizontale ebene Oberfläche haben muß, so ist leicht ersichtlich, daß die Schwerkraft es ist, welche die Wellenbewegung anlaßt und fortpflanzt. Haben wir durch Aufsaugen an irgend einer Stelle eine Flüssigkeitssäule über das Niveau der umgebenden Flüssigkeit gehoben und lassen dann die gehobene Säule los, so muß nach den Grundsätzen der Hydrostatik diese Flüssigkeit niedersinken; rings um diese Stelle aber, um das hydrostatische Gleichgewicht herzustellen, die Flüssigkeit steigen; und da sich die Ausgleichung nicht momentan durch die

Flüssigkeit ausbreitet, wird sich die Flüssigkeit um jene Stelle in Form eines Walles über das Niveau der Flüssigkeit erheben. An der Stelle, wo die Flüssigkeit zuerst erhoben war und dann fallen gelassen wurde, hat dieselbe eine nach unten gerichtete Geschwindigkeit, sie wird daher nicht im Niveau der Flüssigkeit zur Ruhe kommen, sondern da die Flüssigkeit, auf welche sie fällt, ringsum ausweichen kann, tiefer sinken.

Nach kurzer Zeit muß daher an der Stelle, wo die Flüssigkeit zuerst aufgesaugt war, ein Wellenthal entstehen, rings umher ein Wellenberg. Dieser Wellenberg wird dann aber ebenso durch die Schwere niedergezogen, er bewirkt, daß rings um ihn nach außen hin die Flüssigkeit steigt, daß weiter ein Wellenberg entsteht, während an der Stelle, wo er sich befand, ein Wellenthal sich bilden muß. Man sieht, wie infolge einer solchen Gleichgewichtsstörung durch Wirkung der Schwere sich Wellenberg und Wellenthal durch die Flüssigkeit fortpflanzen muß.

Daß eben dasselbe der Fall sein muß, wenn der ursprüngliche Stoß in der Erregungsstelle der Wellen nicht durch eine gehobene Flüssigkeitssäule, sondern auf irgend eine andere Weise, etwa durch einen auf die Flüssigkeit geworfenen Stein bewirkt wird, bedarf wohl keiner Erläuterung.

Nach dem Gesagten ist es also der hydrostatische Druck der im Wellenberge gehobenen und durch die Schwere niedersinkenden Flüssigkeitssäule, welche die Wellenbewegung veranlaßt; wird also der hydrostatische Druck an der Stelle der gehobenen Flüssigkeit auf andere Weise fortgenommen, so darf sich die Wellenbewegung nicht weiter fortpflanzen.

Die Gebrüder Weber haben durch einen sehr einfachen Versuch dieses nachgewiesen und somit die Richtigkeit der angegebenen Erklärung gezeigt. Bei einer regelmäßig viereckigen, an beiden Enden geschlossenen Röhre von Holz wurde die eine Seitenwand mehrfach durchbohrt, so daß auf der ganzen Länge der Röhre eine Anzahl Löcher in gerader Linie neben einander lagen. In ein, dem einen Ende der Röhre zunächst liegendes Loch wurde eine Glasröhre eingekittet und darauf die ganze Röhre vollständig mit Quecksilber gefüllt. Dann wurde in der Glasröhre eine Quecksilbersäule von circa 2,5 Centim. aufgesaugt und wieder soviel Quecksilber nachgefüllt, als es aus allen Öffnungen halbkugelförmig hervorsah. Nachdem das geschehen war, wurde die gehobene Quecksilbersäule fallen gelassen, und es zeigte sich dann, daß nur aus den der Röhre zunächst liegenden Öffnungen Quecksilber ausfloß, in den entferntern Öffnungen trat keine Bewegung des Quecksilbers ein. Da aus den der Röhre zunächst liegenden Öffnungen, als dort der Wellenberg sich bildete, das Quecksilber ausfloß und der vergrößerte hydrostatische Druck durch das Abfließen aufgehoben wurde, hörte die Ursache des Steigens für die entferntern auf, dort entstand kein Wellenberg mehr, es floß kein Quecksilber mehr aus.

Als nun aber in alle Löcher Röhren gekittet wurden, das Abfließen also gehindert wurde, da sah man das successive Steigen des Quecksilbers in allen Röhren, der Wellenberg pflanzte sich fort und das auf das Steigen des Quecksilbers in jeder Röhre folgende Sinken zeigte das dem Wellenberge folgende Wellenthal.

Dieser Versuch beweist aber auch zugleich die Richtigkeit unserer Annahme, daß die Ausgleichung des gestörten hydrostatischen Druckes

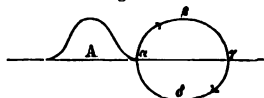
sich nicht momentan durch die ganze Flüssigkeit erstreckt, denn wäre das der Fall gewesen, so hätte zugleich aus allen Öffnungen die gleiche Menge Quecksilber ausfließen müssen. Wägungen des ausgeflossenen Quecksilbers zeigten aber, daß aus der der Glasröhre am nächsten liegenden Öffnung am meisten Quecksilber ausfloß, aus den weitem um so weniger, je weiter sie von der Röhre entfernt waren. Die Röhre hatte neun Öffnungen; als nun in der Glasröhre das Quecksilber nahezu 10 Centimeter gehoben war, floß Quecksilber aus den fünf ersten Öffnungen; aus der ersten traten 72 Gramm, aus der zweiten 52, aus der dritten 26, aus der vierten 12 und aus der fünften Öffnung circa 0,5 Gramm Quecksilber¹⁾.

Dieser Versuch bestätigt also die Voraussetzungen der mitgetheilten Erklärung der Wasserwellen vollständig.

Zugleich aber stehen mit ihr alle vorhin beschriebenen Erscheinungen der Bewegung der einzelnen Flüssigkeitsteilchen in den Wellen, wie auch die Bewegung der Wellen als solcher im Einklang.

Was zunächst die krummen Bahnen der Flüssigkeitsteilchen betrifft, so muß anfangs, wenn in *A* (Fig. 253) die primär gehobene Flüssigkeitssäule niedersinkt, das Teilchen α nach rechts

Fig. 253.



hin geschoben und gehoben werden, es bewegt sich nach β hin. Von der Spitze des Wellenberges sinkt es dann nach unten, behält aber seine fortschreitende Bewegung noch bei und bewegt sich nach γ hin. Dort angekommen sinkt es wegen der in dem Fallen erhaltenen Geschwindigkeit weiter nach unten und bewegt sich dabei, da links von γ jetzt das Wellenthal ist, also der Druck von rechts nach links hin größer ist, nach links hin, um δ , wenn das Thal ganz vorüberzieht, über δ nach α , oder wie in andern Fällen nicht ganz nach α sich zurückzubewegen.

Nach dieser Erklärungsweise muß auch die Geschwindigkeit der Fortpflanzung mit der Höhe der Wellen zunehmen, denn da sich die Bewegung während einer Oscillation der Teilchen um eine Wellenlänge fortpflanzt, muß bei gleicher Wellenlänge die Fortpflanzungsgeschwindigkeit um so größer sein, je rascher das Teilchen oscilliert. Je größer nun die bewegende Kraft, der primäre Stoß ist, um so höher hebt sich das Teilchen, und je höher es gehoben ist, um so mehr wird seine Bewegung durch die Schwere beschleunigt, die Oscillation und somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird daher rascher. Bei den durch Elasticität erregten Wellen war das anders, da war die beschleunigende Kraft dem Abstände der bewegten Punkte von der Gleichgewichtslage proportional, bei größerm Abstände wurde daher die Geschwindigkeit der Teilchen in demselben Verhältnisse mit dem Abstände größer, die Oscillationsdauer war konstant.

Wurde aber in ein und derselben Punktreihe die Oscillationsdauer geändert, so änderte sich ebenso auch die Wellenlänge, indem die beschleunigende Kraft zugleich dem Quadrate der Wellenlänge umgekehrt proportional war und somit Wellenlänge und Oscillationsdauer in gleichem Verhältnisse wachsen und abnehmen.

¹⁾ E. H. Weber und W. Weber, Wellenlehre etc. p. 280 ff.

Hier, wo die bewegende Kraft nicht von der gegenseitigen Einwirkung der Teilchen herrührt, besteht diese Beziehung nicht, deshalb hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit sowohl von der Oscillationsdauer als auch von der Wellenlänge ab.

Dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht von der Dichtigkeit der Flüssigkeit abhängt, folgt ebenso unmittelbar. Denn wenn wegen des grössern Gewichtes der gehobenen Teilchen in schwereren Flüssigkeiten die bewegende Kraft zunimmt, so nimmt in eben demselben Verhältnis bei gleicher Wellenhöhe die zu bewegende Masse zu, die Beschleunigung und somit die Geschwindigkeit der bewegten Teilchen bleibt daher ungeändert.

§ 151.

Durchkreuzung und Reflexion der Wellen¹⁾. Die Erscheinungen der Interferenz, der Reflexion der Wellenbewegung und die Bildung stehender Wellen infolge der fortgepflanzten und reflektierten Wellen lassen sich nach den Versuchen der beiden Weber mit den Flüssigkeitswellen sehr schön darstellen.

Die Erscheinungen der Interferenz zeigen sich, wenn man an beiden Enden der Wellenrinne eine Welle gleichzeitig erregt.

In der Mitte der Wellenrinne vereinigen sich beide vorausgehenden Wellenberge zu einem neuen, der nahezu die Summe der Höhen der einzelnen Wellenberge hat, wie es die Interferenztheorie verlangt, nach welcher die Bewegung infolge des Zusammenwirkens mehrerer Teilbewegungen die Summe letzterer sein muß. Treffen demnach die Wellen ohne Phaseninterferenz zusammen, so muß ein Berg von doppelter Höhe und ein Thal von doppelter Tiefe entstehen. Als Mittel von zwölf Messungen fanden die beiden Weber die Höhe des resultierenden Wellenberges gleich 1,8, die Höhe der beiden komponierenden Wellenberge gleich 1 war; der Unterschied der beobachteten Höhe von der theoretischen ist so klein, dafs dieser Versuch als eine Bestätigung des Interferenzgesetzes, wenn es dessen Bedürfnis bedürfte, angesehen werden könnte.

Gehen ein Wellenberg und ein Wellenthal durch einander hindurch, so ist die Höhe des Berges oder die Tiefe des Thaies gleich der Differenz der Höhen, ist der Berg ebenso hoch als das Thal tief ist, so wird die Oberfläche der Flüssigkeit eben. Dies zeigt sich jedesmal, wie wir sofort sehen werden, bei der Reflexion der Wellen.

Nach der Durchkreuzung bewegt sich jede Welle ganz ungestört weiter, Wellenberge und Wellenthäler sind in der Lage zu einander, als hätte in dem Wellenzuge gar keine Störung stattgefunden. Es ist diese Beobachtung ein Beweis für die Richtigkeit des zweiten Teiles des Principes, das die Lehre von den Interferenzen zum Grunde legten, des Satzes, dafs, wenn von der Interferenzstelle aus sich die Bewegung Punkten mitteilt, welche durch einen der Wellenzüge eine Bewegung annehmen, die Bewegung der Punkte gerade so geschieht, als hätte keine Interferenz stattgefunden.

Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen an der Interferenzstelle ist diejenige, welche das Interferenzgesetz verlangt. Schreiten die beiden

¹⁾ E. H. und W. Weber, Wellenlehre etc. p. 212 ff.

Wellen nach entgegengesetzten Richtungen fort, so ist die horizontale Bewegung der Flüssigkeitsteilchen, wenn die Wellen ohne Phasendifferenz zusammentreffen, der Richtung nach gerade entgegengesetzt, die vertikale jedoch gleich gerichtet. Die horizontale Bewegung muß sich somit aufheben, die vertikale summieren.

Das wurde von den beiden Weber durch die Beobachtung bestätigt. Es ergab sich, wenn man senkrecht unter der Stelle beobachtete, wo der Gipfel des resultierenden Berges lag, wo also die Bewegungen genau ohne Phasendifferenz zusammentrafen, daß dort die Teilchen in genau senkrechter Richtung sich auf und ab bewegten.

Wenn die Wellen nicht genau ohne Phasendifferenz zusammentreffen, so hebt sich die horizontale Bewegung nicht ganz auf; Weber sah auch, wie seitwärts von den eben erwähnten Stellen die Bahnen der Teilchen nicht senkrecht waren, sondern gegen die Vertikale geneigt und zwar um so mehr, je weiter man sich von der Stelle der vollkommenen Durchkreuzung entfernte.

Wenn auch die Wellen insofern sich ungehindert durchkreuzen, daß die Bewegung der Flüssigkeit in jedem Wellenzuge dieselbe bleibt, als habe keine Durchkreuzung stattgefunden, so findet doch bei der Durchkreuzung der Wellen ein kleiner Zeitverlust statt. Die Versuche der beiden Weber ergaben, daß, während eine Welle ihre Wellenrinne in 2,283 Sekunden durchlief, wenn sie sich nicht mit einer andern kreuzte, bei der Kreuzung zweier Wellen eine Welle von genau gleicher Größe als die vorige zum Durchlaufen derselben Strecke die Zeit von 2,4 Sekunden brauchte.

Diese Verzögerung denken sich die beiden Physiker folgendermaßen. Bei dem ungehinderten Fortschreiten der Wellen, wo sich die Teilchen in ihren kreisförmigen oder elliptischen Bahnen bewegen, bleiben die Teilchen immer in ihrer beschleunigten Bewegung, bei der Durchkreuzung der Wellen dagegen, wo sich einmal die horizontalen Geschwindigkeiten ganz aufheben und die Teilchen sich nur vertikal auf und ab bewegen, tritt ein Zeitpunkt ein, wo die Bewegung des Teilchens sich umkehrt, wo also seine Geschwindigkeit ganz und gar gleich Null ist. Von da ab erhält erst das Teilchen durch Untersinken wieder eine beschleunigte Bewegung. Daraus scheint nun zu folgen, daß bei einer Durchkreuzung zweier gleich großen Wellen so viel Zeit verloren gehe, als der Verlust der beschleunigten Bewegung während der Vereinigung der Wellen herbeiführt. Nach der Durchkreuzung erhalten dann die Teilchen der Welle ihre vorige Beschleunigung und dadurch ihre vorige Bewegung.

Die Erscheinungen der Reflexion der Wellen treten am einfachsten auf, wenn eine Welle senkrecht gegen eine feste Wand anprallt. Da die Flüssigkeit an der Wand vollkommen frei beweglich ist, so muß die Reflexion der Wellen an der Wand so erfolgen, wie die Reflexion der Wellen an der Grenze zweier Punktsysteme, von denen das zweite weniger dicht ist als das erste, das heißt ein ankommender Wellenberg muß als Wellenberg und ein ankommendes Wellenthal muß als Wellenthal reflektiert werden. Die Erscheinungen an der Wand müssen daher sich folgendermaßen darstellen.

Nach Verlauf von $\frac{1}{2}$ Oscillationsdauer muß unmittelbar an der Wand halber Wellenberg sein, dessen Mitte an der Wand liegt, dessen Höhe

zu die doppelte des einfachen ankommenden Berges ist, da er aus der ersten Hälfte des reflektierten und der zweiten Hälfte des ankommenden Wellenberges besteht. Nach Verlauf eines weitem Viertels der Oscillationsdauer ist das auf den Wellenberg folgende Wellenthal bis zur Wand fortgeschritten; zugleich aber ist der erste Wellenberg ganz reflektiert, und der reflektierte Wellenberg erstreckt sich bis eine halbe Wellenlänge von der Wand, gerade so weit, als sich das dem Berge folgende Thal erstreckt. Die Bewegung an der Wand muß daher aufgehoben werden und die Wasseroberfläche an der Wand bis zur Länge einer halben Welle eben sein.

In dem folgenden Viertel der Oscillationsdauer pflanzt sich der reflektierte Wellenberg um eine viertel Wellenlänge nach rückwärts fort, das ankommende Wellenthal ebenso viel vorwärts, so daß also die tiefste Stelle des Wellenthales sich gerade an der Wand befindet. In dem Augenblicke, wo das ankommende Wellenthal die Wand traf, pflanzte sich auch der reflektierte Wellenthal fort, in dem betrachteten Augenblicke befindet sich also an der Wand die zweite Hälfte des ankommenden und die erste Hälfte des reflektierten Wellenthales, es muß dort ein halbes Wellenthal oder nahezu doppelter Tiefe des ankommenden Wellenthales sein, dessen tiefste Stelle sich gerade an der Wand befindet.

Endlich nach Verlauf des letzten Viertels der Oscillationsdauer ist das Wellenthal ganz reflektiert, der Wellenberg hat sich um eine halbe Wellenlänge von der Wand entfernt; die ganze Welle ist reflektiert und bewegt sich von da an, der Wellenberg voraus, das Wellenthal folgend, in die Flüssigkeit zurück.

Wellenberg und Wellenthal haben also ihre Lage gegen die feste Wand vertauscht, vorher war der Berg, jetzt ist das Thal der Wand am nächsten; Wellenberg und Wellenthal gehen durch einander hindurch.

Diese aus dem Frühern abgeleitete Darstellung des Reflexionsvorganges stützt sich auf das vollständigste durch die Anschauung bei den Versuchen in der Wellenrinne, und die Messungen über die Höhe des Berges und die Tiefe des Thales an der Wand in dem ersten und dritten der von uns betrachteten Zeiteile ergaben die Höhe, wie sie die Theorie verlangt. Einer Höhe der ankommenden Welle von 6,2 Millimeter war die Höhe des Berges in dem ersten der betrachteten Zeiteile gleich 10,35 Millimeter, oder mehr wie $\frac{4}{3}$ der ankommenden Welle.

Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen an der festen Wand muß mit denjenigen übereinstimmen, welche die Flüssigkeitsteilchen haben, wenn Wellen sich durchkreuzen; auch dieses haben die Versuche der Gebrüder Weber gezeigt.

Wenn eine Welle nicht senkrecht gegen eine feste Wand kommt, so wird sie nach § 134 so zurückgeworfen werden, daß der Wellenstrahl der zurückgeworfenen Welle mit dem Einfallslot denselben Winkel bildet wie der Strahl der einfallenden Welle. Auch dieses haben die Versuche bestätigt. Es folgt nämlich aus dem Satze, wie wir bereits § 134 erwähnten, daß eine zirkelförmige Welle, welche im Mittelpunkt eines kreisförmigen Gefäßes erregt ist, wenn sie an der kreisförmigen Wand anprallt, sich nach Reflexion als kreisförmige Welle mit immer kleinerem Radius wieder in der Mitte des Gefäßes fortpflanzen muß. Der Versuch zeigt dieses deutlich, wenn man z. B. einen Teller mit Quecksilber füllt und nun aus einem

mit einem kleinen Loche versehenen Papiertrichter auf die Mitte des Tellers Quecksilber tropfen läßt.

Läßt man auf diese Weise in den einen Brennpunkt eines mit Quecksilber gefüllten elliptischen Gefäßes Quecksilber tropfen, so müssen die sich von diesem Brennpunkte aus kreisförmig fortpflanzenden Wellen von der Wand so reflektiert werden, daß sie als kreisförmige Wellen in den andern Brennpunkte der Ellipse wieder zusammenlaufen, da die Radiusvektoren mit dem Einfallslot, der Normale an den verschiedenen Stellen, gleiche Winkel bilden. In dem zweiten Brennpunkte geben dann die vereinigten Wellen zu einer kegelförmigen Erhöhung Veranlassung, die durch ihr Niedersinken ein neues zurückkehrendes Wellensystem gibt, welches sich ebenso in dem ersten Brennpunkte wieder vereinigt, dort wiederum zu einem Wellensysteme Veranlassung wird u. s. f. Man sieht dieses vielfache Hin- und Herlaufen sehr leicht in der schönen gekräuselten Oberfläche, welche die Flüssigkeit bei einem solchen Versuche zeigt.

Wenn man in der Wellenrinne nach und nach mehrere Wellen erzeugt, deren Länge gleich ist der Länge der Rinne oder einem aliquoten Theile derselben, so müssen durch die Interferenz der von der Erregungsstelle fortschreitenden und der von der festen Wand reflektierten Wellen stehende Wellen bilden, deren Schwingungsknoten gerade so liegen müssen, wie die Schwingungsknoten in einem an beiden Enden freien longitudinal schwingenden Stabe. Wenn man demnach Wellen erregt, welche genau die doppelte Länge der Wellenrinne besitzen, so geht durch die Mitte derselben immer nach der einen Seite ein Wellenberg, nach der andern ein Wellenthal, in der Mitte muß sich daher ein Schwingungsknoten bilden und jede Hälfte der Rinne schwingt als eine halbe stehende Welle hin und her.

Ist die Länge der erregten Wellen gleich der Länge der Wellenrinne, so sieht man zwei Schwingungsknoten entstehen, beide im Abstände von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge von den Wänden der Rinne und im Abstand einer halben Wellenlänge von einander. Jeder der drei Teile, in welche dadurch die Flüssigkeit der Länge nach zerfällt, schwingt für sich als stehende Welle von der Länge der halben Wellenrinne. An den Wänden befinden sich die Mitten der beiden äußersten Wellen, die Schwingungsmaxima.

Auf diese Weise kann man leicht, wie die Gebrüder Weber zeigen, 3, 4 und mehr Schwingungsknoten und somit eine leicht sichtbare experimentelle Bestätigung der früher vorgetragenen Sätze über die Bildung stehenden Wellen durch Interferenz zweier nach entgegengesetzter Richtung fortpgeplanter Wellensysteme erhalten.

Vierter Abschnitt.

Vom Schalle.

Erstes Kapitel.

Über die Erregung des Schalles.

§ 152.

Von der Ursache des Schalles. Wenn man eine schwachgespannte Saite in Schwingungen versetzt, so lassen sich die Schwingungen derselben mit den Augen wahrnehmen, man sieht die Saite in ihren verschiedenen Lagen nach einander. Wird die Spannung jedoch mehr und mehr verstärkt, so werden die Schwingungen bald so rasch, daß man die Saite in den verschiedenen Lagen nicht mehr unterscheiden kann, man sieht an der Stelle, wo sie schwingt, nur mehr eine halbdurchsichtige Fläche. Verstärkt man die Spannung der Saite noch mehr, so ist die Bewegung derselben kaum mehr sichtbar, statt dessen wird sie uns aber in einer andern Weise wahrnehmbar, wir hören sie, wir erhalten einen von der schwingenden Saite ausgehenden Eindruck auf unser Ohr. Den Eindruck, welchen unser Ohr erhält, nennen wir Schall; es ist im Folgenden unsere Aufgabe, diese, die schwingende Bewegung begleitende Erscheinung zu untersuchen.

Der Schall entsteht nur durch eine schwingende Bewegung, und jede schwingende Bewegung von hinreichender Schnelligkeit erzeugt einen Schall.

Wir sahen in dem vorigen Abschnitt, daß wir auf sehr viele Weisen schwingende Bewegungen erzeugen können, alle diese können auch die Ursache eines Schalles werden.

Reiben wir einen Stab seiner Länge nach, so erzeugt die Elasticität des Stabes stehende Schwingungen, die Savart durch die Stöße des Stabendes gegen eine Spitze dem Auge sichtbar gemacht hat; wir vernehmen nun auch stets einen Schall, wenn wir einen Stab in longitudinale Schwingungen versetzen. Ebenso erzeugen die transversalen Schwingungen von Stäben und Saiten, sobald sie hinreichend rasch sind, die Schwingungen von Platten und Glocken sowie die drehenden Schwingungen der Stäbe einen Ton.

In allen diesen Fällen sind es die regelmäßigen Schwingungen der Körper infolge ihrer Elasticität, welche einen Ton erzeugen; man kann jedoch auch auf andere Art, durch in kurzer Zeit wiederholte Stöße, einen Schall hervorbringen. So erhält man einen Schall, wenn man eine Karte oder eine biegsame Feder dem Umfange eines in rasche Rotation versetzten

gezähnten Rades so weit nähert, daß jeder Zahn der Karte oder Feder einen Schlag erteilt; so auch, wenn man einen Strom eines Gases oder einer Flüssigkeit gegen eine rotierende Scheibe führt, welche in regelmäßigen Zwischenräumen durchbohrt ist; die Flüssigkeit dringt abwechselnd durch eine Öffnung der Scheibe, abwechselnd wird sie durch eine geschlossene Stelle derselben zurückgehalten; es entsteht so eine regelmäßige Folge von Stößen, die wir als Ton wahrnehmen. Läßt man einen Körper um eine Axe rotieren, welche nicht durch dessen Mittelpunkt geht, so erteilt dieser der umgebenden Luft eine Reihe von Stößen, indem abwechselnd das größere und kleinere Stück des Körpers an derselben Seite der Rotationsaxe sich befindet; diese Reihenfolge von Stößen erzeugt einen Ton.

Auch scheinbar kontinuierliche Bewegungen können einen Ton erzeugen, in der That ist es aber wieder eine regelmäßige Reihenfolge von Stößen, welche auch in solchen Fällen den Schall hervorrufen¹⁾. Bläst man in das Mundstück einer gewöhnlichen Pfeife, so erzeugt dieser kontinuierliche Luftstrom einen Ton; indes in diesem Falle teilt sich der Luftstrom an der Lippe der Pfeife, der eine Teil dringt in die Pfeife ein, der andere entweicht in die umgebende Luft. Der in die Pfeife eingedrungene Teil des Luftstromes komprimiert anfänglich die der Lippe am nächsten liegende Schicht der Luft; diese Verdichtung der Luftschicht verhindert wegen der größern Elasticität der komprimierten Luft dann so lange ein neues Eindringen der Luft in die Pfeife, bis sich die Verdichtung auf die weiteren Luftschichten der Pfeife übertragen hat. Es entsteht daher auch in diesem Fall eine periodische Bewegung, eine Reihenfolge von Stößen, welche den Schall veranlaßt.

Wir können daher ganz allgemein sagen, daß die Ursache des Schalles regelmäßig wiederholte Stöße sind, welche zu unserem Ohre gelangen.

Damit das letztere, die Mitteilung der Stöße an unser Ohr, der Fall sein kann, genügt nicht allein das Schwingen eines Körpers, sondern es ist notwendig, daß diese schwingende Bewegung durch ein elastisches Mittel zu unserem Ohre hingeführt werde. In den meisten Fällen ist dieses Mittel die atmosphärische Luft. Versetzen wir einen Körper in longitudinale Schwingungen, so dehnt er sich abwechselnd aus, abwechselnd zieht er sich zusammen. Bei der Ausdehnung treibt er die zunächst an ihn angrenzende Luft von sich fort, bei der Zusammenziehung stürzt die vorher fortgetriebene Luft in den jetzt leeren Raum, welcher den Körper umgibt, hinein, und diese hin- und hergehende Bewegung der Luft pflanzt sich als longitudinale Schwingung durch die Umgebung bis zu unserem Ohre fort. Schwingt eine Saite, ein Stab oder eine Platte transversal, so tritt dasselbe ein; bewegt sich die Saite nach der einen Seite, so treibt sie die angrenzende Luft in der Richtung fort, schwingt sie zurück, so saugt sie die Luft gewissermaßen nach sich hin; sie erteilt also der Luft eine hin- und hergehende Bewegung, welche bis zu unserem Ohre fortgepflanzt und als Stöße auf dasselbe wirkend uns die Empfindung des Schalles gibt.

Es kann aber jeder Körper, die festen sowohl als die flüssigen, wenn in ihnen ein Schall erregt wird, denselben fortpflanzen, wie man sich leicht dadurch überzeugt, daß eine unter Wasser erregte periodische Bewegung

¹⁾ Man sehe Strouhal, Wiedemanns Annalen Bd. V p. 216.

als Schall wahrnehmen läßt. Wir sahen, in allen elastischen Körpern breiten sich an einer Stelle erregte Schwingungen fort; da der Schall eine schwingende Bewegung ist, die zu unserem Ohre fortgepflanzt ist, so folgt dem vorigen Abschnitte schon, daß jeder elastische Körper den Schall zu pflanzen imstande ist.

Daß wir aber überhaupt nur dann einen Schall vernehmen, wenn durch einen elastischen Körper die Schwingungen zu unserem Ohre fortgepflanzt werden, zeigt die Erfahrung. Denn bringen wir unter die Glocke einer Luftpumpe ein kleines Glöckchen, welches mit einem Klöppel versehen an einem Faden in der Glocke so aufgehängt ist, daß es nirgendwo mit der festen Begrenzung des von der Glocke und dem Luftpumpenraum abgesperrten Raumes berührt, so hört man keinen Ton, wenn man die Luftpumpe durch Pumpen aus der Glocke fortnimmt und durch Bewegung des Klöppels zum Anschlagen bringt. Man hört aber einen Ton, wenn man eine Verbindung zwischen der Glocke und dem Recipienten der Pumpe herstellt, sei es, daß man den Recipienten mit Luft oder einer Flüssigkeit anfüllt, oder daß man das Glöckchen an einem Metallstück in der Glocke aufhängt.

§ 153.

Qualität des Schalles. Jeden Eindruck, welchen wir durch unser Ohr erhalten, nennen wir Schall; indes können diese Eindrücke sehr verschieden sein.

1. Der Schall kann in einem einzigen mehr oder weniger starken, kurz abgebrochenen Eindruck auf unser Gehör bestehen, man nennt ihn dann Knall, wenn man auch häufig unter Knall nur einen heftigen, einzigen, kurz abgebrochenen Eindruck auf unser Gehör versteht. Der Schall kann ferner von einiger Dauer sein, in einer Reihenfolge von Stößen bestehen, welche unser Ohr erhält. Je nachdem nun diese Stöße regelmäßig oder unregelmäßig, gleichartig oder ungleichartig sich folgen, unterscheidet man den Schall als Ton oder Klang oder als Geräusch. Die Geräusche selbst unterscheidet unsere Sprache wieder als Rasseln, Knistern, Sausen, Brausen etc.

2. Die musikalischen Töne unterscheidet man nach ihrer Höhe als hohe oder tiefere Töne. Worauf dieser Unterschied beruht, läßt sich leicht durch den Versuch zeigen. Ein longitudinaler Ton ist stets viel tiefer, als der Transversaltone desselben Stabes, und der Transversaltone eines Stabes ist um so höher, je kürzer und dicker der Stab ist; bei schwingenden Saiten ist der Ton um so höher, je kürzer die Saite ist oder je stärker sie gespannt ist. Da wir nun sahen, daß die longitudinalen Schwingungen langsamer sind als die transversalen, und diese um so rascher, je kürzer der schwingende Körper ist, so folgt, daß ein Ton um so höher ist, je mehr Schwingungen der den Ton erzeugende Körper macht, je mehr Stöße also in gleichen Zeiten unser Ohr treffen.

Man kann die Schwingungszahl einer gespannten Saite berechnen. Man nimmt nun einen Stab mit der Saite genau isochron schwingen, und erhält einen Ton dadurch hervor, daß man ebenso oft die Saite mit einer Karte schlagen läßt, so haben alle diese Töne dieselbe musikalische Höhe. Jeder Ton entspricht somit einer bestimmten Schwingungszahl.

Man kann übrigens auch bei den Geräuschen eine verschiedene Höhe wahrnehmen, wie man aus folgendem Versuche sieht. Man nimmt sieben Stäbe von hartem Holze gleicher Dicke und Breite, aber verschiedener Länge, so daß beim Anschlagen diese Stäbe eine Tonreihe geben. Läßt man dann einen der Stäbe auf den Boden fallen, so hört man ein Geräusch ohne bestimmten musikalischen Charakter; läßt man aber die Stäbe nach einander zu Boden fallen, und zwar der Reihe nach die größern zuerst, so unterscheidet man auch bei diesen Geräuschen eine bestimmte Höhe.

3. Töne gleicher Höhe können auf das Ohr einen ganz verschiedenen Eindruck machen; so unterscheidet man deutlich den Ton selbst bei gleicher Höhe der Blas- und Streichinstrumente, bei den Blasinstrumenten den der Holz- und Blechinstrumente.

Die Töne unterscheiden sich durch eine eigentümliche Beschaffenheit, die man häufig als Klang oder Klangfarbe oder Tonfarbe bezeichnet. Vielfach wendet man auch dafür das französische Wort *Timbre* an. Die Ursache der Klangverschiedenheit, welche schon Ohm¹⁾ in der verschiedenen Form der Schwingungen gesehen hatte, ist besonders von Helmholtz²⁾ in neuerer Zeit untersucht worden, er hat gezeigt, daß dieselbe in der That von der Form der Schwingungen, oder vielmehr von den gleichzeitig auftretenden Tönen bedingt ist. Einen Ton erzeugt jede regelmäßig periodische Wiederkehr von Stößen in unser Ohr; innerhalb jeder Schwingungsperiode bleibt die Bewegung dabei ganz willkürlich, wenn nur dieselbe Bewegung, welche innerhalb der ersten Periode bestand, in den folgenden Perioden in ganz gleicher Weise wiederkehrt. So kann die Schwingung, die wir als Ton vernehmen, eine einfache sein, sie kann aber auch aus der Übereinanderlagerung mehrerer Schwingungen bestehen, deren jede einem andern höhern Tone entspricht, welcher den gehörten Ton begleitet, welcher sich aber nur in soweit bemerkbar macht, daß er die Farbe des Grundtones verändert. In welcher Weise wir die einzelnen Töne eines Klanges erhalten können, werden wir in einem der nächsten Paragraphen besprechen.

4. Die Töne können bei gleicher Höhe und gleicher Klangfarbe an Stärke oder Intensität verschieden sein. Verschiedenheit der Stärke erzeugen wir bei einer gespannten Saite durch Änderung der Schwingungsamplitude, oder was dasselbe ist, durch Änderung der Schwingungsgeschwindigkeit bei ungeänderter Dauer der Schwingung. Der größern Amplitude entspricht der stärkere Ton.

Wir nehmen indes nicht an, daß die Intensität einfach wie die Geschwindigkeit der schwingenden Bewegung zu- oder abnehme, sondern wie das Quadrat derselben, indem wir annehmen, daß die Stärke des Schalles von der Stärke des Stoßes abhängt, welchen die bewegten Lufttheilchen unserm Gehörorgane erteilen. Die Stärke des Stoßes ist aber proportional der lebendigen Kraft der bewegten Körper, und da diese bei gleicher Masse dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, so setzen wir die Intensität des Schalles dem Quadrate der Geschwindigkeit der schwingenden Teile in dem Augenblicke der größten Geschwindigkeit proportional.

¹⁾ Ohm, Poggend. Ann. Bd. LXX. Bd. LXII. Man sehe auch Seebeck, Poggend. Ann. Bd. LX und Bd. LXIII. Doves Report. Bd. VIII.

²⁾ Helmholtz, Die Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863.

§ 154.

Bestimmung und Vergleichung der Schwingungszahlen. Um die Schwingungszahl von Tönen zu erhalten, kann man sich entweder der Elasticität bedienen oder der Tonerzeugung durch mechanische Vorrichtung, indem man letztere durch irgend eine mechanische Vorrichtung zählt.

Die Sirene von Cagniard Latour¹⁾ bestimmt die Schwingungszahlen durch direkte Zählung der den Ton erzeugenden Stöße, sie besteht (Fig. 254) aus einer cylindrischen Trommel, von der unten in der Mitte der Boden eine Röhre *R* ausgeht, mittels welcher der Apparat auf einen Windkessel gesetzt wird, und durch welche die komprimierte Luft in die Trommel eindringt. Die obere Platte der Trommel ist durch eine bestimmte Anzahl von Löchern, welche auf dem Umfange eines Kreises liegen, durch-

drungen. Die Löcher sind alle gleichweit von einander entfernt und alle nach einer Richtung schief gebohrt, so daß die Öffnungen alle z. B. von links nach rechts aufsteigende unter einem bestimmten Winkel gegen die Vertikale gerichtete Kanäle durch die Platte bilden.

Unmittelbar über der die Trommel deckenden Platte befindet sich eine zweite Platte, welche an der Axe *AF* (Fig. 255) befestigt ist und mit dieser sich drehen kann. Um die Platte möglichst leicht beweglich zu machen, ist die stählerne Axe *AF* unten bei *a* (Fig. 254) in ein Zapfenlager von Holz gestellt, und oben durch die Schraube *A*, deren Spitze in eine Vertiefung der Axe paßt, lose gehalten.

Fig. 254.



Fig. 255.



Fig. 256.



Die Platte *C* (Fig. 255) hat ebenfalls auf einem Kreise 16 Löcher, so daß sie sich auf die Löcher der untern Platte legen und die Trommel mit der äußern Luft in Verbindung setzen können, oder bei einer kleinen Drehung der obern Scheibe den Zwischenräumen der untern Scheibe entsprechen, die Trommel also verschließen. Bilden die Löcher die Fortsetzung der Kanäle der untern Platte, so kann die in die Trommel getriebene verdichtete Luft nach außen entweichen; entsprechen die Löcher den Zwischen-

¹⁾ Cagniard Latour, Annales de chim. et de phys. Tome XII et XVIII. et. Ann. VIII und X.

räumen zwischen den unteren Löchern, so ist die Trommel abgesperrt, die Luft kann nicht entweichen. Die Löcher sind schief durch die Platte gebohrt, aber nach entgegengesetzter Richtung als die unteren Löcher; also wenn diese von links nach rechts durch die untere Platte aufsteigende Kanäle bilden (Fig. 256), so bilden die Löcher der obern Platte von rechts nach links aufsteigende Kanäle. Durch diese Art der Durchbohrung wird bewirkt, daß die Scheibe *C* durch den Luftstrom selbst zum Rotieren gebracht wird, der zu den Löchern austritt, wenn die obern Löcher auf den unteren stehen, denn der in den unteren Löchern von links nach rechts aufsteigende Luftstrom stößt gegen die Wände der oberen Löcher und erteilt dadurch der Scheibe eine Drehung, welche derjenigen des Zeigers einer Uhr entgegengesetzt ist. Die Geschwindigkeit der obern Scheibe wird dadurch um so größer, je stärker der Druck der Luft in der Trommel ist. Durch Regulierung des Luftstromes kann man daher der Scheibe eine ganz bestimmte Geschwindigkeit geben.

Dreht sich die Scheibe mit einer gewissen Geschwindigkeit, so wird bei 16 Löchern bei jeder Umdrehung, da alle oberen Löcher zugleich auf alle unteren zu stehen kommen, 16 mal die Trommel geöffnet und 16 mal geschlossen. Die von unten in die Trommel geführte verdichtete Luft kann also 16 mal durch die obere Platte entweichen und ebenso wird 16 mal der Luftstrom unterbrochen. Wir erhalten somit bei jeder Umdrehung 16 Verdichtungen der Luft über der Scheibe und beim Verschluss der unteren Löcher 16 Verdünnungen, also bei jeder Umdrehung 16 Schwingungen der Luft, welche sich als 16 Wellen in die umgebende Luft fortpflanzen.

Wenn wir demnach durch diese Schwingungen einen bestimmten Ton hervorgebracht haben, können wir aus einer Beobachtung der Umdrehungszahl der Scheibe die Schwingungszahl des gehörten Tones unmittelbar ableiten.

Um die Umdrehungszahl der Scheibe zu erhalten, ist in die Axe *AF* bei *s* eine Schraube ohne Ende eingeschnitten, welche in ein Zahnrad *E* (Fig. 254) eingreift und dieses bei jeder Umdrehung um einen Zahn dreht. An der Axe des Rades ist ein Zeiger befestigt, der auf dem Zifferblatt (Fig. 255) die Umdrehungen der Scheibe angibt. Das Rad hat 100 Zähne, bei 100 Umdrehungen der Scheibe dreht es sich somit einmal herum und die Spitze des Zeigers durchläuft einmal den Umfang des Zifferblattes. Dieses ist in 100 Teile geteilt, die an ihm befindlichen Zahlen geben also die einzelnen Umdrehungen des Rades an. Eine Umdrehung des Zeigers gibt also $16 \cdot 100$ Vibrationen an.

Hat sich das Rad *E* einmal vollständig gedreht, so greift ein Versprung *H*, der am Umfange des Rades befestigt ist, in die Zähne des Rades *G* und bewirkt, daß der an der Axe dieses Rades befestigte Zeiger auf seinem Zifferblatte um einen Teilstrich weiter rückt, jeder Teilstrich dieses Zifferblattes gibt also 100 Umdrehungen der Scheibe oder 1600 Schwingungen an. Hat man sonach während einer Zeit *T* eine Bewegung des Zeigers auf dem zweiten Zifferblatte um *n* Teilstriche beobachtet und auf dem ersten *n'*, so ist die Anzahl der während der Zeit *T* stattgefundenen Schwingungen

$$N = n \cdot 1600 + n' \cdot 16,$$

die Schwingungszahl des Tones, wenn T in Sekunden gegeben ist,

$$\nu = \frac{N}{T}.$$

Die beiden gezahnten Räder sind auf der einen Platte des Gehäuses, welchem sie eingeschlossen sind, befestigt. Diese Platte ist ein wenig schiebbar, und drückt man auf die Fig. 255 zur Rechten befindliche Schraube a , so wird die Platte und damit die gezahnten Räder so weit zur Rechten verschoben, daß die Schraube ohne Ende nicht in das Zahnrad E greift. In dieser Lage wird die Platte durch die oben auf dem Gehäuse befindliche Feder, deren Vorsprung in einen Ausschnitt der Platte greift, festgehalten. Wenn sich also auch jetzt die Scheibe dreht, so bewegen sich doch die Räder und Zeiger nicht. Drückt man dann auf die Feder f , so springen Platte und Räder in ihre frühere Lage zurück und die Räder und Zeiger bewegen sich.

Um nun mittels der Sirene die Schwingungszahl eines Tones zu bestimmen, bewirkt man zunächst, daß beide Zeiger auf 0 stehen. Dann werden sie ausgelöst und man setzt durch einen Luftstrom die Sirene in Bewegung. Der Ton ist anfangs tief, wird aber, da die Bewegung der Sirene eine beschleunigte ist, immer höher. Durch Regulierung des Luftstromes bringt man dann den Ton hervor, dessen Schwingungszahl man bestimmen will, und drückt, wenn er konstant geworden ist, zu einer ganz bestimmten Zeit auf die Feder f . Dadurch werden die Räder eingeschaltet und die Zeiger bewegen sich. Nach einer bestimmten Zeit drückt man auf den Knopf a und schaltet so die Räder wieder aus und liest sowohl die Ablesungen n auf dem Zifferblatt des Rades G ab, als die n' auf dem anderen und hat somit alle Daten, die erforderlich sind, um die Schwingungszahl ν zu bestimmen.

Savart wandte zu seinen Versuchen, um die Grenze der Wahrnehmbarkeit der Töne zu bestimmen, ein anderes Verfahren an¹⁾. Er ersetzte die Sirene durch ein in schnelle Rotation versetztes gezahntes Rad, dessen Zähne gegen eine Karte oder ein keilförmiges zugeschnittenes Blättchen aus leichtem Holze schlugen. Jeder Schlag entspricht einer einmaligen Umdrehung der Sirene, also einer Schwingung, aus der Anzahl der Zähne des Rades und der Umdrehungsgeschwindigkeit desselben erhält man also durch einfache Multiplikation die Anzahl der einem bestimmten Tone entsprechenden Schwingungen.

Die Umdrehungen des Rades werden auch hier durch einen Zähler von gleicher Einrichtung wie derjenige der Sirene bestimmt.

Duhamel hat es versucht, die Schwingungen zu zählen, indem er die schon besprochene graphische Methode anwandte²⁾. Der schwingende Körper, z. B. ein schwingender Stab, wird an seinem Ende mit einer feinen Spitze versehen und vor ihm ein Glaszylinder gehalten, der durch Rufs mit einem leicht fortzunehmenden Überzuge versehen ist. Die Spitze berührt den Cylinder nur ganz leicht. Wenn nun der Stab nicht schwingt, so zieht die Spitze auf dem Cylinder, der sich bei

¹⁾ Savart, Über die Empfindlichkeit des menschlichen Gehöres. *Annales chim. et de phys.* T. XLIV. Poggend. Ann. XX.

²⁾ Duhamel, L'Institut 1840. p. 19 und 41.

der Drehung zugleich langsam hebt oder senkt, eine einfache Spirallinie; wenn aber der Stab schwingt, so erhält diese Spirallinie eine Wellenform und jeder Welle entspricht eine Schwingung des Stabes. Wenn der Cylinder durch irgend eine mechanische Vorrichtung in eine stetige Rotation versetzt wird und durch irgend eine andere Zählvorrichtung die Umdrehungsgeschwindigkeit bestimmt werden kann, so genügt es, die Länge der Spirallinie zu messen und die Anzahl der Wellen zu zählen, um die Schwingungszahl zu erhalten. Habe z. B. die Walze fünf Umdrehungen in der Sekunde, und beobachtet man, daß die Spirallinie genau 2,5 Umfänge der Walze trägt, so gibt die Zahl der Wellen auf derselben die Schwingungszahl in einer halben Sekunde an, die doppelte Zahl also die Schwingungszahl des Tones.

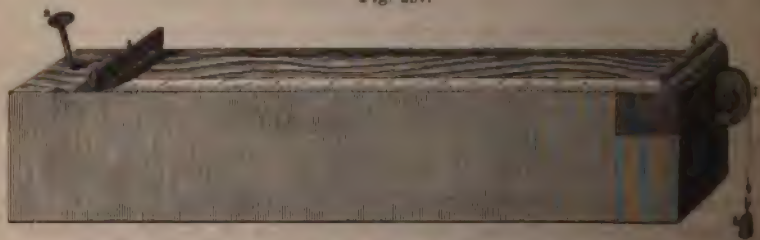
Duhamel und später Wertheim wandten indes dieses Verfahren hauptsächlich dazu an, um die Schwingungszahlen zweier Töne zu vergleichen. Zu dem Ende braucht man die Drehungsgeschwindigkeit der Walze nicht einmal zu kennen.

Man bringt nur die beiden Stäbe oder schwingenden Körper nahe bei einander an, so daß sie ihre Schwingungen auf einer und derselben Walze gleichzeitig abzeichnen.

Man hat dann nur die auf gleichen Längen der beiden Spiralen befindlichen Wellen zu zählen, und da diese in gleichen Zeiten von den hochschwingenden Körpern beschrieben sind, so ist das Verhältnis der beiden Zahlen genau das der Schwingungszahlen der Töne.

Die andere Methode, um die Schwingungszahlen der Töne zu bestimmen, beruht auf der Anwendung der Elasticitätsgesetze, welche uns nach dem vorigen Abschnitte die Schwingungszahl eines gegebenen Körpers in seiner Beschaffenheit zu berechnen gestatten. Sie ist besonders bequem, um die Schwingungszahlen der Töne zu vergleichen, und da, wie wir gesehen werden, aus der Schwingungszahl eines Tones sich die aller übrigen berechnen läßt, so wendet man diese Methode fast immer zur Bestimmung der Schwingungszahl der Töne an.

Fig. 257.



Das gebräuchlichste auf dieser Methode beruhende Verfahren ist die Bestimmung der Schwingungszahlen mittels des Monochordes, eines aus einem Kasten von trockenem Holze aufgespannten Saite (Fig. 257). Die Saite ist bei *a* mittels einer Schraube befestigt und, um eine genau bestimmbare Länge derselben zu den Versuchen zu verwenden, über die beiden scharfen Stege *ss'* gelegt und dann über die Rolle *R* geführt, welche mit möglichst wenig Reibung in ihrem Zapfenlager dreht. In dem einen Ende der Saite befestigten Haken *b* können verschiedene spannfähige Gewichte befestigt werden. Der Abstand *ss'* zwischen den beiden Stegen

1000 gleiche Teile geteilt und ein auf dem Brette des Monochords verchiebbarer Steg gestattet von der Saite beliebige Stücke schwingen zu lassen.

Um nun die Schwingungszahl eines Tones zu bestimmen, stimmt man zunächst das Monochord nach dem betreffenden Ton, sei es dem einer Stimmgabel oder irgend eines andern Instrumentes, indem man das spannende Gewicht oder die Länge der Saite so lange ändert, bis sie bei einfachem Anschlagen oder Anstreichen mit dem Geigenbogen genau den Ton der Gabel angibt.

Aus der beobachteten Länge der Saite, dem spannenden Gewichte und dem Gewichte der Längeneinheit der Saite erhält man dann, wenn die Steifigkeit der Saiten nicht beachtet zu werden braucht, die Schwingungszahl nach der Formel des § 140

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{g \cdot P}{q \cdot s}},$$

wo l die Länge der Saite, P das spannende Gewicht, q den Querschnitt und s das spezifische Gewicht der Saite, also $q \cdot s$ das Gewicht der Längeneinheit bedeutet.

Man wendet meist zu dem Monochord Metallsaiten an, da diese regelmäßiger zu bearbeiten sind als andere und da sie bei gleicher Spannung nicht so leicht Änderungen ausgesetzt sind durch den Feuchtigkeitsgehalt der Luft. Sind jedoch diese Saiten nicht sehr dünn und nicht vollkommen elastisch, wie z. B. die Stahlsaiten, die zu den Klavieren benutzt werden, muß man zur Berechnung der Schwingungszahlen die vollständigere Formel von Seebeck anwenden, in welcher auf die Steifigkeit der Saiten Rücksicht genommen ist.

Eine andere Methode, welche Scheibler¹⁾ angewandt hat, um mittels des Monochords nur durch Versuche die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, werden wir erst im nächsten Kapitel bei Abhandlung der Obertöne und Kombinationstöne kennen lernen können.

§ 155.

Von dem Verhältnis der Töne und den Intervallen. Man kann auf die verschiedenste Weise und mit den verschiedensten Instrumenten Töne gleicher Höhe hervorbringen. Nimmt man z. B. den Ton eines getimmten Stabes und bringt auf der Sirene oder mittels gezahnter Räder, oder mittels gespannter Saiten den Ton hervor, so findet man stets bei Messung der Schwingungszahlen, wie verschieden auch die Klangfarbe aller dieser Töne sein mag, daß sie doch alle dieselbe Schwingungszahl haben. Wir folgern daraus das erste Gesetz der Tonlehre:

Allen Tönen gleicher Höhe, welches auch der schwingende Körper ist, welcher sie veranlaßt, entsprechen gleiche Schwingungszahlen, und umgekehrt, gleichen Schwingungszahlen entsprechen immer gleiche Töne.

¹⁾ Über *Scheiblers Versuche*. *Rocher in Poggend. Ann.* Bd. 32 und in *Dopplertoriorium*. Bd. III.

Daraus folgt, daß ein gegebener Ton seiner Höhe nach bestimmt ist durch die Zahl n seiner Schwingungen, und daß man ihn mittels derselben bezeichnen kann.

Töne verschiedener Schwingungszahlen sind verschieden, das Verhältnis ihrer Schwingungszahlen nennt man ein Tonverhältnis oder Intervall.

Wenn man zugleich zwei Töne verschiedener Höhe hervorbringt und anhalten läßt, so kann das Zusammenklingen derselben auf unser Ohr entweder einen angenehmen Eindruck machen oder einen nicht so angenehmen. In dem ersten Falle nennt man das Zusammenklingen der Töne oder den Accord konsonierend, im zweiten Falle dissonierend. Je weniger angenehm der Accord unser Ohr für sich allein stehend berührt, um so dissonierender ist derselbe.

Es gibt nun eine große Menge verschiedener Accorde, welche alle in der Musik gebraucht werden, das Ohr unterscheidet sie als angenehm oder weniger angenehm, und darnach ist denselben in der Musik ihre Stelle angewiesen. Die Aufgabe der Physik ist es, zu untersuchen, worin die Accorde sich unterscheiden. Nehmen wir z. B. einen häufig gebrauchten Accord, den Zweiklang von c und e der gewöhnlichen Tonleiter, so sagt uns unser Ohr zunächst, daß dieser Accord mit denselben wesentlichen Eigenschaften, mit wesentlich demselben Eindruck auf unser Ohr sowohl zwischen hohen als tiefen Tönen bestehen kann, daß er ebenso zwischen je zwei andern Tönen der Tonleiter d , f is u. s. w. bestehen kann. Es folgt daraus, der Accord ist unabhängig von der Höhe der ihn zusammensetzenden Töne, also unabhängig von ihrer absoluten Schwingungszahl. Wenn man nun aber in allen den verschiedenen Fällen die Schwingungszahlen der den Accord zusammensetzenden Töne bestimmt, so findet man, daß dieselben stets im Verhältnisse von 4 zu 5 zu einander stehen, und ebenso auch umgekehrt, daß ein Accord, dessen Töne Schwingungszahlen besitzen, welche im Verhältnisse von 4 zu 5 zu einander stehen, stets als derselbe erscheint. Gleiches gilt für alle übrigen Accorde. Wir erhalten demnach als zweites Gesetz der Tonlehre folgendes:

Jeder musikalische Accord zwischen zwei Tönen ist bestimmt und kann dargestellt werden durch das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen $\frac{n}{n'}$ der komponierenden Töne.

Ist das Verhältnis $\frac{n}{n'}$ der Einheit gleich, so sind die beiden Töne im Einklang; ist es verschieden, so sind sie an Höhe verschieden und zwar um so mehr, je mehr dies Verhältnis von der Einheit verschieden ist. Ihr musikalisches Intervall ist unabhängig von der absoluten Anzahl der Schwingungen, es wird nur bestimmt von dem Verhältnis derselben.

Um zu unterscheiden, welche Intervalle konsonierend sind, welche nicht, müssen wir untersuchen, wie sich die Intervalle der von der Musik als die konsonierendsten angenommenen Accorde verhalten. Es sind dieses die Oktave, in der gewöhnlichen Dur-Tonleiter c und c_1 , die Sexte c und a , die Quinte c und g , die Quarte c und f , die große Terz c und e und die kleine Terz c und es . Eine Vergleichung der Schwingungszahlen hat nun ergeben, wenn man von dem tiefsten Tone der Reihe ausgeht, und dessen Schwingungszahl, wo der Ton sonst seiner absoluten Höhe nach folgen mag, gleich 1 setzt:

Für die Oktave	das Verhältniß	$\frac{n}{n'} = \frac{2}{1}$
" " Sexte	" "	" $= \frac{5}{3}$
" " Quinte	" "	" $= \frac{3}{2}$
" " Quarte	" "	" $= \frac{4}{3}$
" " große Terz	" "	" $= \frac{5}{4}$
" " kleine Terz	" "	" $= \frac{6}{5}$

Das heißt die Oktave macht zwei Schwingungen, wenn der Grundton 1 macht, die Sexte 5, wenn der Grundton 3, oder $\frac{1}{3}$, wenn letzterer 1 führt u. s. f.

Es folgt daraus, wenn man zwei Töne, deren Schwingungszahlen sich halten wie zwei Zahlen der natürlichen Zahlenreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, zusammenklingen läßt, daß man dann einen konsonierenden Accord erhält.

Man teilt diese Accorde in vollkommene und unvollkommene Konsonanzen. Die vollkommenen sind die Oktave und die Quinte, welche den Verhältnissen 1, 2, 3 entsprechen, die übrigen sind die unvollkommenen Konsonanzen. Wir sehen demnach, eine Konsonanz ist um so vollkommener, einfacher das Schwingungsverhältnis der sie komponierenden Töne ist, Accord wird um so dissonierender, je komplexer das Verhältnis der Töne ist, welche ihn zusammensetzen. So gilt die Sekunde $\frac{2}{3}$ und noch die kleine Sekunde $\frac{1}{2}$ als Dissonanz.

§ 156.

Von den mehrfachen Accorden. Aus dem Gesetze der Konsonanz läßt sich nun leicht voraussehen, welche mehrfach zusammengesetzte Accorde unser Ohr einen wohlthuenden Eindruck machen, welche als Konsonanzen gelten und welche als Dissonanzen eine Auflösung verlangen. Konsonierende Accorde können nur solche sein, in denen alle Töne in einfachen Verhältnissen zu einander stehen.

Wir wenden zur Bestimmung der Tonverhältnisse die erwähnte Bezeichnungswiese an, die Schwingungszahl eines Tones, und zwar, wenn nichts Anderes bemerkt wird, des tiefsten, wird gleich 1 gesetzt. Jeder der Töne des Accords bezeichnet einen Ton und zwar denjenigen, welcher die einfachste Schwingung vollführt, wenn der mit 1 bezeichnete Ton eine Schwingung vollführt, oder der in derselben Zeit die Zähler angegebenen Schwingungen zurücklegt, wenn der Grundton die Zähler stehende Anzahl von Schwingungen zurücklegt.

Nach dem Vorigen können also nicht konsonierend sein

Prim Terz Quart 1 : $\frac{2}{3}$: $\frac{4}{3}$

Prim Quart Quint 1 : $\frac{2}{3}$: $\frac{4}{3}$

Prim Quint Sext 1 : $\frac{2}{3}$: $\frac{4}{3}$;

und wenn auch die beiden ersten Töne dieser Accorde konsonierend sind, wenn es nicht die beiden letzten, da diese den Verhältnissen $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{9}$ entsprechen.

Konsonierend sind die Accorde

1) Prim große Terz Quint 1 : $\frac{4}{3}$: $\frac{3}{2}$

2) Prim kleine Terz Quint 1 : $\frac{3}{2}$: $\frac{4}{3}$

3) Prim große Terz Sext 1 : $\frac{4}{3}$: $\frac{5}{3}$

4) Prim Quart Sext 1 : $\frac{3}{2}$: $\frac{5}{3}$;

denn in allen diesen Fällen sind diese Töne sowohl mit dem Grundtone als unter sich in Konsonanz, denn bei den beiden letzten Tönen haben wir

- in 1) große Terz Quint $\frac{5}{4} : \frac{3}{2} = 5 : 6$
 „ 2) kleine Terz Quint $\frac{6}{5} : \frac{3}{2} = 4 : 5$
 „ 3) große Terz Sext $\frac{5}{4} : \frac{4}{3} = 3 : 4$
 „ 4) Quart Sext $\frac{4}{3} : \frac{3}{2} = 4 : 5$.

Die Accorde 3 und 4 sind übrigens nur Umkehrungen der Accorde 1 und 2, denn multiplicieren wir in 3 die Töne 1 und $\frac{4}{3}$ mit 2, setzen also für diese Töne die mit ihnen vollkommen konsonierenden Oktaven, so erhalten wir für 3

$$2, \frac{10}{4}, \frac{5}{2},$$

oder setzen wir jetzt $\frac{5}{2}$ als Grundton, also seine Schwingungszahl gleich 1,

$$1 : \frac{4}{5} : \frac{3}{2}.$$

Multiplicieren wir in 4 nur die Prim mit 2 und dividieren dann alle Zahlen mit $\frac{4}{3}$, das heißt, machen wir die Quart zum Grundton, so erhalten wir

$$1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{2}.$$

Der Accord 3 ist also nur eine Umkehrung von 2, und der Accord 4 eine Umkehrung von 1.

Außer den angegebenen vier konsonierenden Accorden erhalten wir durch nochmalige Umlagerung der beiden Accorde 1 und 2 noch zwei weitere konsonierende Accorde; indem wir nämlich den Accord 1 ebenso umlegen, wie der Accord 3 aus 2 entstanden ist, also nur für die Prim ihre höhere Oktave einsetzen, bekommen wir den fünften Accord

$$\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, 2,$$

oder indem wir diesen Accord vom Grundton uns gebildet denken, erhalten wir durch Multiplikation aller Zahlen mit $\frac{4}{3}$

$$1, \frac{5}{3}, \frac{8}{3}.$$

Dafs von diesen drei Tönen der zweite mit dem ersten, der dritte mit dem zweiten in Konsonanz sind, ergibt sich unmittelbar, da es die Intervalle $\frac{5}{3}$ und $\frac{8}{3}$ sind, dafs der dritte mit dem ersten konsonant ist, folgt aus den im vorigen Paragraphen angeführten Intervallen nicht; wir können es aber schon aus der Bemerkung ableiten, dafs die Oktave mit dem Grundton die vollkommenste Konsonanz bildet, und dafs deshalb ein Intervall nicht dissonierend wird, wenn wir den Grundton durch seine Oktave ersetzen. Da nun das Intervall $\frac{8}{3}$ nichts Anderes ist als die Umlagerung der Terz, indem wir den Grundton durch die Oktave ersetzen, so folgt, dafs auch dieses Intervall konsonierend ist. Wir werden im übrigen sofort bei Ableitung der Tonleiter dieses Intervall als ein Sextenintervall kennen lernen.

Lagern wir den Accord 2 in derselben Weise um, wie wir zur Bildung von 4 den Accord 1 umlagerten, setzen wir also für Grundton und kleine Terz die höhere Oktave, so erhalten wir als sechsten Accord

$$\frac{3}{2}, 2, \frac{12}{5},$$

und bilden wir jetzt diesen Accord anstatt von der Quint von dem Grundton, indem wir alle Zahlen mit $\frac{4}{3}$ multiplicieren, so erhalten wir

$$1, \frac{4}{3}, \frac{7}{3} = \frac{7}{3}.$$

Nach der soeben gemachten Bemerkung wird man auch diesen Accord dort als konsonierend erkennen.

Man nennt die konsonierenden Accorde, welche aus drei Tönen zusammengesetzt sind, welche im Verhältnisse $1 : \frac{5}{2} : \frac{3}{2}$ oder $1 : \frac{5}{4} : \frac{3}{4}$ stehen, Dreiklänge und zwar den Dreiklang mit der großen Terz den großen oder Dur-Dreiklang, den mit der kleinen Terz den Moll-Dreiklang; sie sind mit den beiden Umlagerungen die einzigen konsonierenden Accorde, die sich aus der Reihe der harmonischen Töne ergeben. Die Accorde 3 und 5, welche, der erstere aus dem Moll-Dreiklange, der zweite aus dem Dur-Dreiklange, durch Ersetzen des Grundtones durch die höhere Oktave entstanden gedacht sind, heißen die Terzsextaccorde oder schlechthin Sextaccorde, die beiden andern die Quartsextaccorde jedesmal desjenigen Dreiklanges, aus dem sie entstanden sind.

Die beiden Dreiklänge sind aus ganz gleichen Intervallen aufgebaut, da aus einer großen und einer kleinen Terz, der einzige Unterschied ist, daß beim Dur-Dreiklange die beiden untern, beim Moll-Dreiklange die beiden obern Töne das Intervall der großen Terz bilden.

Auf die Frage, warum nur diese und keine andern Intervalle und Accorde konsonierend sind, kommen wir im nächsten Kapitel nochmals zurück, wenn wir die Wahrnehmung der Töne überhaupt besprechen, esügt uns, an dieser Stelle die erfahrungsgemäß bestimmten konsonierenden Accorde und Intervalle zu kennen.

§ 157.

Die Tonleiter. Ausser den harmonischen Tönen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, wenn wir für die höhern Töne dieser Reihe die tiefern Oktaven einsetzen, so daß alle Schwingungszahlen entsprechen, welche zwischen 1 und 2 liegen, den Tönen $1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, 2$, sind in der Musik noch viele andere gebräuchlich, welche zwischen diesen eingeschaltet werden; die Musik ordnet dieselben in eine Reihe, welche den Namen Tonleiter führt. Wenn wir den Grundton 1 mit *c* bezeichnen, so ist die sogenannte diatonische Dur-Tonleiter

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{15}{8}, 2 \\ c \quad d \quad e \quad f \quad g \quad a \quad h \quad c_1$$

Außer der Terz, Quart, Quint, Sext tritt noch die Sekunde $\frac{9}{8} = d$ und Septime $\frac{15}{8} = h$ hinzu. Von der Oktave *c*₁ wiederholt sich die Reihe von vorn, indem ebenso, wie die Oktave die Verdoppelung des Grundtones ist, so auch in der weitem Tonreihe die folgenden Töne die Verdoppelungen der entsprechenden Töne in den nächst tiefern Oktaven sind. Um diese höhern Oktaven zu bezeichnen, werden wir rechts unten die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013, 1014, 1015, 1016, 1017, 1018, 1019, 1020, 1021, 1022, 1023, 1024, 1025, 1026, 1027, 1028, 1029, 1030, 1031, 1032, 1033, 1034, 1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1040, 1041, 1042, 1043, 1044, 1045, 1046, 1047, 1048, 1049, 1050, 1051, 1052, 1053, 1054, 1055, 1056, 1057, 1058, 1059, 1060, 1061, 1062, 1063, 1064, 1065, 1066, 1067, 1068, 1069, 1070, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1076, 1077, 1078, 1079, 1080, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1087, 1088, 1089, 1090, 1091, 1092, 1093, 1094, 1095, 1096, 1097, 1098, 1099, 1100, 1101, 1102, 1103, 1104, 1105, 1106, 1107, 1108, 1109, 1110, 1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1117, 1118, 1119, 1120, 1121, 1122, 1123, 1124, 1125, 1126, 1127, 1128, 1129, 1130, 1131, 1132, 1133, 1134, 1135, 1136, 1137, 1138, 1139, 1140, 1141, 1142, 1143, 1144, 1145, 1146, 1147, 1148, 1149, 1150, 1151, 1152, 1153, 1154, 1155, 1156, 1157, 1158, 1159, 1160, 1161, 1162, 1163, 1164, 1165, 1166, 1167, 1168, 1169, 1170, 1171, 1172, 1173, 1174, 1175, 1176, 1177, 1178, 1179, 1180, 1181, 1182, 1183, 1184, 1185, 1186, 1187, 1188, 1189, 1190, 1191, 1192, 1193, 1194, 1195, 1196, 1197, 1198, 1199, 1200, 1201, 1202, 1203, 1204, 1205, 1206, 1207, 1208, 1209, 1210, 1211, 1212, 1213, 1214, 1215, 1216, 1217, 1218, 1219, 1220, 1221, 1222, 1223, 1224, 1225, 1226, 1227, 1228, 1229, 1230, 1231, 1232, 1233, 1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1239, 1240, 1241, 1242, 1243, 1244, 1245, 1246, 1247, 1248, 1249, 1250, 1251, 1252, 1253, 1254, 1255, 1256, 1257, 1258, 1259, 1260, 1261, 1262, 1263, 1264, 1265, 1266, 1267, 1268, 1269, 1270, 1271, 1272, 1273, 1274, 1275, 1276, 1277, 1278, 1279, 1280, 1281, 1282, 1283, 1284, 1285, 1286, 1287, 1288, 1289, 1290, 1291, 1292, 1293, 1294, 1295, 1296, 1297, 1298, 1299, 1300, 1301, 1302, 1303, 1304, 1305, 1306, 1307, 1308, 1309, 1310, 1311, 1312, 1313, 1314, 1315, 1316, 1317, 1318, 1319, 1320, 1321, 1322, 1323, 1324, 1325, 1326, 1327, 1328, 1329, 1330, 1331, 1332, 1333, 1334, 1335, 1336, 1337, 1338, 1339, 1340, 1341, 1342, 1343, 1344, 1345, 1346, 1347, 1348, 1349, 1350, 1351, 1352, 1353, 1354, 1355, 1356, 1357, 1358, 1359, 1360, 1361, 1362, 1363, 1364, 1365, 1366, 1367, 1368, 1369, 1370, 1371, 1372, 1373, 1374, 1375, 1376, 1377, 1378, 1379, 1380, 1381, 1382, 1383, 1384, 1385, 1386, 1387, 1388, 1389, 1390, 1391, 1392, 1393, 1394, 1395, 1396, 1397, 1398, 1399, 1400, 1401, 1402, 1403, 1404, 1405, 1406, 1407, 1408, 1409, 1410, 1411, 1412, 1413, 1414, 1415, 1416, 1417, 1418, 1419, 1420, 1421, 1422, 1423, 1424, 1425, 1426, 1427, 1428, 1429, 1430, 1431, 1432, 1433, 1434, 1435, 1436, 1437, 1438, 1439, 1440, 1441, 1442, 1443, 1444, 1445, 1446, 1447, 1448, 1449, 1450, 1451, 1452, 1453, 1454, 1455, 1456, 1457, 1458, 1459, 1460, 1461, 1462, 1463, 1464, 1465, 1466, 1467, 1468, 1469, 1470, 1471, 1472, 1473, 1474, 1475, 1476, 1477, 1478, 1479, 1480, 1481, 1482, 1483, 1484, 1485, 1486, 1487, 1488, 1489, 1490, 1491, 1492, 1493, 1494, 1495, 1496, 1497, 1498, 1499, 1500, 1501, 1502, 1503, 1504, 1505, 1506, 1507, 1508, 1509, 1510, 1511, 1512, 1513, 1514, 1515, 1516, 1517, 1518, 1519, 1520, 1521, 1522, 1523, 1524, 1525, 1526, 1527, 1528, 1529, 1530, 1531, 1532, 1533, 1534, 1535, 1536, 1537, 1538, 1539, 1540, 1541, 1542, 1543, 1544, 1545, 1546, 1547, 1548, 1549, 1550, 1551, 1552, 1553, 1554, 1555, 1556, 1557, 1558, 1559, 1560, 1561, 1562, 1563, 1564, 1565, 1566, 1567, 1568, 1569, 1570, 1571, 1572, 1573, 1574, 1575, 1576, 1577, 1578, 1579, 1580, 1581, 1582, 1583, 1584, 1585, 1586, 1587, 1588, 1589, 1590, 1591, 1592, 1593, 1594, 1595, 1596, 1597, 1598, 1599, 1600, 1601, 1602, 1603, 1604, 1605, 1606, 1607, 1608, 1609, 1610, 1611, 1612, 1613, 1614, 1615, 1616, 1617, 1618, 1619, 1620, 1621, 1622, 1623, 1624, 1625, 1626, 1627, 1628, 1629, 1630, 1631, 1632, 1633, 1634, 1635, 1636, 1637, 1638, 1639, 1640, 1641, 1642, 1643, 1644, 1645, 1646, 1647, 1648, 1649, 1650, 1651, 1652, 1653, 1654, 1655, 1656, 1657, 1658, 1659, 1660, 1661, 1662, 1663, 1664, 1665, 1666, 1667, 1668, 1669, 1670, 1671, 1672, 1673, 1674, 1675, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680, 1681, 1682, 1683, 1684, 1685, 1686, 1687, 1688, 1689, 1690, 1691, 1692, 1693, 1694, 1695, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700, 1701, 1702, 1703, 1704, 1705, 1706, 1707, 1708, 1709, 1710, 1711, 1712, 1713, 1714, 1715, 1716, 1717, 1718, 1719, 1720, 1721, 1722, 1723, 1724, 1725, 1726, 1727, 1728, 1729, 1730, 1731, 1732, 1733, 1734, 1735, 1736, 1737, 1738, 1739, 1740, 1741, 1742, 1743, 1744, 1745, 1746, 1747, 1748, 1749, 1750, 1751, 1752, 1753, 1754, 1755, 1756, 1757, 1758, 1759, 1760, 1761, 1762, 1763, 1764, 1765, 1766, 1767, 1768, 1769, 1770, 1771, 1772, 1773, 1774, 1775, 1776, 1777, 1778, 1779, 1780, 1781, 1782, 1783, 1784, 1785, 1786, 1787, 1788, 1789, 1790, 1791, 1792, 1793, 1794, 1795, 1796, 1797, 1798, 1799, 1800, 1801, 1802, 1803, 1804, 1805, 1806, 1807, 1808, 1809, 1810, 1811, 1812, 1813, 1814, 1815, 1816, 1817, 1818, 1819, 1820, 1821, 1822, 1823, 1824, 1825, 1826, 1827, 1828, 1829, 1830, 1831, 1832, 1833, 1834, 1835, 1836, 1837, 1838, 1839, 1840, 1841, 1842, 1843, 1844, 1845, 1846, 1847, 1848, 1849, 1850, 1851, 1852, 1853, 1854, 1855, 1856, 1857, 1858, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1864, 1865, 1866, 1867, 1868, 1869, 1870, 1871, 1872, 1873, 1874, 1875, 1876, 1877, 1878, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1889, 1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910, 1911, 1912, 1913, 1914, 1915, 1916, 1917, 1918, 1919, 1920, 1921, 1922, 1923, 1924, 1925, 1926, 1927, 1928, 1929, 1930, 1931, 1932, 1933, 1934, 1935, 1936, 1937, 1938, 1939, 1940, 1941, 1942, 1943, 1944, 1945, 1946, 1947, 1948, 1949, 1950, 1951, 1952, 1953, 1954, 1955, 1956, 1957, 1958, 1959, 1960, 1961, 1962, 1963, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 20

Man hat viel darüber gestritten, wie diese Tonleiter entstanden es ist indes wahrscheinlich, daß sie sich allmählich durch das musikalische Bedürfnis gebildet und erweitert hat, und daß nicht theoretische Entwicklungen darauf geführt haben. Indes kann man dieselbe auf mehr Weise entstanden denken.

Setzt man die Reihe der harmonischen Töne fort, indem man z. B. Saite des Monochords, deren Schwingungen, wenn sie ungeteilt schw. mit 1 bezeichnet werden, immer weiter nach der Reihe der natürlichen Zahlen teilt, so erhält man Töne mit den Schwingungszahlen

$$7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16,$$

und durch Division durch die verschiedenen Potenzen von 2, um die tieferen Oktaven der Töne zu erhalten, so daß sie in die Oktave 1 — 2 fallen

$$1, \frac{9}{8}, \frac{10}{8}, \frac{11}{8}, \frac{12}{8}, \frac{13}{8}, \frac{14}{8}, \frac{15}{8}, 2,$$

oder mit den vorigen $1, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ zusammen

$$1, \frac{9}{8}, \frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{3}{2}, \frac{13}{8}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, 2,$$

also die Töne

$$c \ d \ e \ - \ g \ - \ - \ h \ c_1.$$

Nun unterscheiden sich die Töne $\frac{11}{8}$ und $\frac{4}{3}$ oder $\frac{5}{3}$ und $\frac{13}{8}$ nur wenig von einander, man könnte daher denken, daß jene für eingesetzt wären, und so die Tonleiter entstanden wäre. Indes das Fehlen des einfachen Intervalles $\frac{7}{4}$ in der Tonleiter spricht nicht für diese Anordnungsweise.

Nach dem Vorgange von Chladni¹⁾ gelangen wir auf andere Weise zur Tonleiter, wo wir es nicht nötig haben, anstatt der direkt erhaltenen Verhältnisse andere einzusetzen. Bilden wir nämlich von dem Grundton der Quint und der Unterquint, also dem Tone, dessen Quinte der Grundton ist, die großen Dreiklänge, so erhalten wir:

$$\begin{array}{l} \text{von der Unterquint } \frac{3}{2}, \dots \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, 1 \\ \text{von dem Grundton } 1, \dots 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \quad \quad \quad = 1, \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \\ \text{von der Quint } \frac{3}{2}, \dots \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}, \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{9}{4} \end{array}$$

und durch Ordnung nach den Schwingungszahlen, wenn wir zugleich einzelne Töne die tieferen und höheren Oktaven einsetzen, um alle Töne der Oktave 1 — 2 zu erhalten,

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & \frac{9}{8}, & \frac{5}{4}, & \frac{4}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{5}{3}, & \frac{15}{8}, & 2 \\ c & d & e & f & g & a & h & c_1. \end{array}$$

Betrachten wir nun die aus dieser Tonleiter sich ergebenden Sekunden, Terzen, Quartan, Quinten, Sexten, Septimen, so werden wir finden, dieselben nicht alle gleichwertig sind, sondern daß die Intervalle verschieden sein können, ohne darum aufzuhören, Sekunden, Terzen etc. zu sein.

Der Wert der Intervalle ist folgender:

¹⁾ Chladni, Akustik. p. 13 ff.

Wert der musikalischen Intervalle.

Sekunden	Terzen	Quarten	Quinten	Sexten	Septimen
$\frac{c}{d} \frac{8}{9}$	$\frac{c}{f} \frac{4}{5}$	$\frac{f}{c} \frac{4}{3}$	$\frac{g}{c} \frac{3}{2}$	$\frac{a}{c} \frac{5}{3}$	$\frac{h}{c} \frac{15}{8}$
$\frac{c}{d} \frac{10}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$	$\frac{f}{d} \frac{8}{9} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{g}{d} \frac{4}{3}$	$\frac{a}{d} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$	$\frac{h}{a} \frac{5}{3}$	$\frac{c_1}{d} \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$
$\frac{f}{c} \frac{16}{9} = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{g}{c} \frac{6}{5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{a}{c} \frac{4}{3}$	$\frac{h}{c} \frac{3}{2}$	$\frac{c_1}{c} \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{d_1}{c} \frac{8}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{2}{3}$
$\frac{g}{f} \frac{8}{5}$	$\frac{a}{f} \frac{5}{4}$	$\frac{h}{f} \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$	$\frac{c_1}{f} \frac{3}{2}$	$\frac{d_1}{f} \frac{7}{6} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4}$	$\frac{e_1}{f} \frac{15}{8}$
$\frac{a}{g} \frac{10}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$	$\frac{h}{g} \frac{4}{3}$	$\frac{c_1}{g} \frac{4}{3}$	$\frac{d_1}{g} \frac{3}{2}$	$\frac{e_1}{g} \frac{5}{3}$	$\frac{f_1}{g} \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$
$\frac{h}{a} \frac{8}{5}$	$\frac{c_1}{a} \frac{6}{5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{d_1}{a} \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4}$	$\frac{e_1}{a} \frac{3}{2}$	$\frac{f_1}{a} \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{g_1}{a} \frac{8}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{2}{3}$
$\frac{c_1}{h} \frac{16}{9} = \frac{8}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{d_1}{h} \frac{6}{5} = \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{e_1}{h} \frac{4}{3}$	$\frac{f_1}{h} \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{g_1}{h} \frac{5}{3} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{3}$	$\frac{a_1}{h} \frac{16}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{3}$

Ein Überblick vorstehender Tabelle ergibt, daß die gleichnamigen Intervalle keineswegs alle denselben Wert haben.

Die Sekunden haben drei verschiedene Werte, nämlich zunächst ist das Schwingungsverhältnis $\frac{9}{8}$, die Töne, zwischen denen dieses Intervall stattfindet, unterscheiden sich um einen großen ganzen Ton; zweitens ist dasselbe $\frac{10}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}$, das Intervall ist das eines kleinen ganzen Tones, der sich von dem vorigen um $\frac{5}{4}$, ein syntonisches Komma unterscheidet. Der dritte Wert, den die Sekunde annehmen kann, $\frac{11}{10} = \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{10}$, ist der große halbe Ton. Da nun der kleine ganze Ton $\frac{10}{9} = \frac{11}{10} \cdot \frac{11}{10}$, so kann man denselben in zwei Intervalle teilen, den großen halben Ton $\frac{11}{10}$ und den kleinen halben Ton $\frac{11}{12}$. Letzterer ist das kleinste in der Musik gebräuchliche Intervall.

Wie die Sekunden groß und klein sein können, so auch die Terzen; die großen entsprechen dem Verhältnis $\frac{4}{3}$, die kleinen dem um einen kleinen halben Ton $\frac{7}{6}$ kleinern Verhältnis $\frac{5}{4}$. Außerdem tritt von d zu f eine noch um ein Komma kleinere Terz auf.

Auch bei den Quartan unterscheiden wir drei Werte, die reinen Quartan $\frac{3}{2}$, die übermäßige Quart $f - h$, welche um einen kleinen halben Ton und ein Komma größer ist als die reinen Quartan, und schließlich die falsche Quarte a zu d , welche gegenüber den reinen Quartan um ein Komma zu groß ist.

Ähnlich wie die Quartan verhalten sich die Quinten, sie sind rein $\frac{3}{2}$, oder vermindert h nach f_1 um einen kleinen halben Ton und ein Komma kleiner als die reinen Quinten, oder schließlich falsch von d nach a um ein Komma kleiner als die reinen Quinten.

Bei den Sexten unterscheiden wir große $\frac{5}{3}$ und kleine $\frac{5}{4} \cdot \frac{3}{4}$, um einen kleinen halben Ton kleiner als die großen, und außerdem finden wir eine falsche Sexte, die um ein Komma größer ist als die große Sexte.

Unter den Septimen finden wir zwei große, deren Schwingungsverhältnis $\frac{15}{8}$ ist, zwei kleine, welche von den großen sich um einen kleinen halben Ton unterscheiden, $\frac{9}{8} = \frac{15}{8} \cdot \frac{2}{3}$ und drei falsche, welche noch um ein Komma kleiner sind als die kleinen Septimen.

Die Oktaven schließlich sind ihrem Wesen nach alle rein, und entsprechen dem Verhältnisse $\frac{2}{1}$.

Die auf diese Weise erhaltene Tonleiter heißt die diatonische Durtonleiter, sie besteht nur aus ganzen und zwei großen halben Tönen, welche zwischen der dritten und vierten und zwischen der siebenten und achten Stufe liegen. Ist der Grundton der Tonleiter c , so ist die Tonleiter jene in c -Dur.

Ebenso wie von dem Grundtone c können wir jetzt von jedem d in der c -Durtonleiter gegebenen Töne wieder die diatonische Durtonleiter bilden; wir müssen dann aber zu den bisher erhaltenen Tönen neue hinzufügen. Soll die Durtonleiter von d aus gerade so beschaffen sein wie die besprochene von c aus, so müssen die einzelnen Intervalle alle in denselben Verhältnisse stehen wie in der angegebenen Tonleiter, wir bekommen die d -Durtonleiter deshalb einfach dadurch, daß wir die für die einzelnen Intervalle der c -Tonleiter gegebenen Zahlen alle mit $\frac{9}{8}$ multiplizieren. Die

auf diese Weise ergebender Zahlen für die einzelnen Töne der Tonleiter sind dann folgende:

$$\frac{2}{3}; \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}; \frac{4}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}; \frac{5}{6}; \frac{7}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}; \frac{15}{8};$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{6 \cdot 4} = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}.$$

Von diesen Zahlen sind die erste, vierte und sechste schon in der Tonleiter vorhanden als d , g , h ; die zweite und fünfte dagegen sind ein Komma höher als die entsprechenden e und a in der Tonleiter von c . Wir wollen dieselben, um diese Erhöhung anzudeuten, mit \bar{e} und \bar{a} bezeichnen. Wesentlich verschieden von den früheren Tönen sind der dritte, siebente, sie sind um einen kleinen halben Ton und ein Komma höher als die entsprechenden Töne der ersten Tonleiter f und c . Der Grund dieser Erhöhung liegt darin, daß in der Durtonleiter zwischen der zweiten und dritten Stufe sowie der sechsten und siebenten Stufe ein ganzer Ton liegen, dagegen zwischen der dritten und vierten, wie zwischen der siebenten und achten Stufe ein halber Ton vom Werte $\frac{1}{2}$. Die um einen halben Ton höheren Töne bezeichnet man durch Anhängung der Silbe is an den betreffenden Ton bezeichnenden Buchstaben. Der Ton, der $\frac{1}{2}$ Ton höher als f , heißt demnach $\bar{f}is$, der um $\frac{1}{2}$ Ton höher liegende als c heißt $\bar{c}is$. Analogisch werden dieselben durch ein dem betreffenden Tone vorgesetztes Kreuz bezeichnet, so daß $\bar{c}is = \# c$ ist. Die in der d -Durtonleiter vorhandenen $\bar{f}is$ und $\bar{c}is$ sind nun um ein Komma mehr als einen halben Ton höher als die betreffenden Töne der Tonleiter in c , wir wollen, um das hervorzuheben, dieselben mit $\bar{f}is_1$ und $\bar{c}is_1$ bezeichnen. Darnach wird also die Tonleiter in d

$$d \bar{e} \bar{f}is_1 g \bar{a} h \bar{c}is_1 d_1;$$

enthält also vier Töne, welche die Tonleiter von c nicht enthält.

Bilden wir ganz ebenso die Tonleiter in e -Dur, so erhalten wir folgende Verhältnisse:

$$\frac{4}{5}; \frac{5}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2}; \frac{7}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1}; \frac{9}{8}; \frac{15}{8} = 2 \cdot \frac{2}{1};$$

$$\frac{7 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1},$$

in den für die Töne geltenden Bezeichnungen

$$e \bar{f}is_1 gis_1 a h \bar{c}is_1 dis_1 e_1.$$

Es treten hier neu hinzu die um einen halben Ton erhöhten gis_1 und dis_1 und an die Stelle des $\bar{c}is$ in der Tonleiter von d das um ein Komma höhere $\bar{c}is_1$, welches genau um $\frac{1}{2}$ Ton höher ist als c_1 .

Die diatonische Durtonleiter von g bietet kein neues Intervall, die einzigen in ihr vorkommende Erhöhungen sind die von f zu $\bar{f}is_1$, um von der siebenten auf die achten Stufe einen halben Ton herzustellen, dieselbe wird dann

$$g \bar{a} h c_1 d_1 e_1 \bar{f}is_1 g_1,$$

enthält also außer den Tönen der Tonleiter in c die Töne d_1 in d .

Die Tonleiter in a -Dur liefert uns dagegen wieder ein Bild, von den bisherigen nur wenig verschiedene Töne:

$$\frac{5}{3}; \frac{15}{8}; \frac{7}{4} = 2 \cdot \frac{2}{1}; \frac{20}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1}; \frac{5}{3};$$

$$\frac{7 \cdot 5}{2 \cdot 4} = 3 \cdot \frac{2}{1}; \frac{16}{3}.$$

Die drei ersten Töne sind a , h , cis_1 , der vierte ist um ein Komma tiefer als das d_1 der Tonleiter in c -Dur, wir bezeichnen ihn mit \underline{d}_1 ; der folgende ist e_1 und dann folgt fis_1 , das um genau $\frac{1}{2}$ Ton erhöhte f_1 , weiter das genau um $\frac{1}{2}$ Ton erhöhte g_1 oder gis_1 , und schließlich die Oktave von a oder a_1 .

In den Tonzeichen wird demnach die Tonleiter in a -Dur

$$a \ h \ cis_1 \ \underline{d}_1 \ e_1 \ fis_1 \ gis_1 \ a_1.$$

Die Tonleiter von h an liefert uns, wie eine der bisherigen ganz gleiche Berechnung ergibt, die Töne

$$\begin{array}{cccccccc} h & cis_1 & dis_1 & e_1 & fis_1 & gis_1 & ais_1 & h_1 \\ \frac{1}{2} & 2 \cdot \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & 3 \cdot \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Sehen wir zunächst von den um ein Komma verschiedenen Tönen ab, so haben wir, um diese Durtonleitern zu bilden, alle Töne, außer e und h , um einen halben Ton erhöhen müssen. Für diese wird aber auch diese Erhöhung erforderlich, wenn wir die Durtonleiter von cis bilden, wir erhalten dann

$$cis \ dis \ eis \ fis \ gis \ ais \ his \ cis_1.$$

Um also von allen Tönen der diatonischen Durtonleiter von c ebenfalls die diatonischen Durtonleitern zu bilden, bedarf es einer Anzahl neuer Intervalle, wir müssen die Töne teils um ein Komma erhöhen, a und c , teils um ein Komma vertiefen, d ; ferner müssen wir sie alle um einen halben Ton, zum Teil auch um einen halben Ton und ein Komma erhöhen.

Stellen wir alle bis jetzt erhaltenen Töne zusammen, so ergibt sich folgende Reihe:

$$\begin{array}{ccccccc} cis & e & fis & a \ ais \\ c \ cis \ d \ dis \ e \ eis \ f \ fis \ g \ gis \ a \ ais \ h \ his, \\ \underline{d} \end{array}$$

es kommen also d , e und a , sowie cis , fis und ais in zwei um ein Komma verschiedenen Werten vor. Wollte man nun in ähnlicher Weise auch von den bisher neu hinzugetretenen Tönen die Durtonleiter bilden, und beschränkte man sich dabei auf die reinen halben Töne, so würden zu den in obiger Zusammenstellung vorkommenden Tönen noch hinzukommen zunächst eis und dis und außerdem die doppelt erhöhten Töne $cisis$ und $cisis$, von denen der erstere $\frac{2}{3}$ höher ist als cis , der zweite als cis und $disis$, $fisis$, gis , ais . Wir müßten also noch 9 Töne hinzufügen, so daß wir im ganzen 29 Töne erhielten.

Die so erhaltenen 29 Töne würden indes dem musikalischen Bedürfnisse noch nicht genügen; schon wenn wir die Durtonleiter von f bilden wollen, bedürfen wir eines neuen Intervalles. Wir erhalten dieselbe ganz in der bisherigen Weise, indem wir die Tonzahlen der c -Durreihe mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren, dieselbe wird dann

$$\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2} = \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{7}{4}; 2; \frac{9}{4} = \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}.$$

Mit Ausnahme des vierten Tones finden sich diese Töne bereits in den übrigen Tonleitern, sie sind

$$f g a c_1 d_1 e_1;$$

der vierte ist indes nicht nur neu, sondern auch in ganz anderer Weise gebildet, nämlich durch Vertiefung eines Tones $h = \frac{15}{8}$ um einen halben Ton und ein Komma. Die Vertiefung eines Tones um einen halben Ton wird in der Musik dadurch bezeichnet, daß man vor denselben ein b setzt, so Namen der vertieften Töne erhält man, indem man an denjenigen des Tones, zu welchem die Vertiefung gehört, die Silbe *es* oder den Buchstaben *h* hängt; nur die Vertiefung von h führt den Namen b . Das in die f -Durtonleiter eintretende b ist, wie wir sahen, um einen halben Ton und ein Komma tiefer als h , wir müssen deshalb diesen Ton als b bezeichnen.

Ebenso wie in der Durtonleiter von f für h , so erhalten wir für alle übrigen Töne vertiefte Töne, wenn wir in ähnlicher Weise wie durch den Durdreiklang eine Tonleiter ableiten durch Anwendung des Molldreiklangs mit der kleinen Terz. Bilden wir die drei Molldreiklänge von Grundton, Quint und Unterquint, so erhalten wir

- 1) aus der Unterquint $\frac{3}{2} \dots \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5}, \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \frac{4}{5}, 1$
- 2) aus dem Grundton $1 \dots 1, \frac{6}{5}, \frac{3}{2} = 1, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}$
- 3) aus der Quint $\frac{3}{2} \dots \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5}, \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2}, \frac{6}{5}, \frac{3}{2}$

Wenn wir die Verhältnisse der Größe nach ordnen und wiederum von dem nicht zwischen 1 — 2 fallenden Tönen die entsprechenden Oktaven nehmen

$$1, \frac{3}{2}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, 2.$$

Von diesen Intervallen ist das siebente

$$\frac{3}{2} = \frac{15}{8} \cdot \frac{2}{5} = b$$

und das sechste

$$\frac{6}{5} = \frac{5}{3} \cdot \frac{2}{5},$$

so die um einen halben Ton vertiefte Sext, welche mit as bezeichnet wird.

Nach den musikalischen Zeichen ist somit die Molltonleiter

$$c d es f g as b c$$

und das Verhältnis der einzelnen Töne darin

$$\frac{3}{2}, \frac{16}{15}, \frac{10}{9}, \frac{9}{8}, \frac{16}{15}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9},$$

von der zweiten zur dritten und von der fünften zur sechsten Stufe findet sich ein halber Ton, die übrigen Intervalle sind ganze Töne.

Diese Tonleiter, welche aus dem Molldreiklange entsteht wie die Durtonleiter aus dem Durdreiklange, ist die diatonische Molltonleiter. Es ist noch zu bemerken, daß man die Molltonleiter häufig auch so bildet, daß man von der Oberquint den Durdreiklang nimmt, wodurch in die Tonleiter statt b der Ton h eintritt. Dann wendet man aufsteigend statt as auch den Namen a an, absteigend pflegt man dann aber doch für h den Ton b zu nehmen, so daß dann die Tonleiter wird

$$\text{aufsteigend } c d es f g a h c$$

$$\text{absteigend } c d es f g as b c$$

so wie sie oben hinschrieben.

\overline{c}	\overline{cis}	\overline{cisis}							\overline{es}	\overline{e}	\overline{eis}	\overline{fes}
c	cis	$cisis$	$deses$	des	d	dis	$disis$	ces	es	e	eis	fes
			\overline{deses}	\overline{des}	\overline{d}	\overline{dis}						
\overline{f}	\overline{fis}	\overline{fisis}							\overline{as}	\overline{a}	\overline{ais}	
f	fis	$fisis$	$geses$	ges	g	gis	$gisis$	$ases$	as	a	ais	$aisis$
								\overline{ces}_1				
			bb	b	h	his	$ceses_1$	ces_1	c .			
			bb	b								

Die Schwingungszahlen der Hauptreihe, jedoch ohne die doppelt verten und erhöhten Töne, gibt folgende Zusammenstellung:

c	1										Prim
$\# c = cis$	$\frac{2}{1}$										übermäßige Prim
$b d = des$	$\frac{3}{2}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{2}{3}$								kleine Sekunde
d	$\frac{4}{2}$										große Sekunde
$\# d = dis$	$\frac{9}{8}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{7}{4}$								übermäßige Sekunde
$b e = es$	$\frac{5}{3}$										kleine Terz
e	$\frac{5}{4}$										große Terz
$\# e = cis$	$\frac{5}{4}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{12}{8}$	$\frac{5}{6}$							übermäßige Terz
$b f = fes$	$\frac{4}{3}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{5} =$	$\frac{3}{2}$						verminderte Quarte
f	$\frac{4}{3}$										reine Quarte
$\# f = fis$	$\frac{4}{3}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{10}{3}$	$\frac{2}{5} =$	$\frac{3}{2}$						übermäßige Quarte
$b g = ges$	$\frac{3}{2}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{5} =$	$\frac{3}{2}$						verminderte Quinte
g	$\frac{3}{2}$										reine Quinte
$\# g = gis$	$\frac{3}{2}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{5} =$	$\frac{3}{2}$						übermäßige Quinte
$b a = as$	$\frac{5}{3}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{7} =$	$\frac{8}{5}$						kleine Sexte
a	$\frac{5}{3}$										große Sexte
$\# a = ais$	$\frac{5}{3}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{7} =$	$\frac{8}{5}$						übermäßige Sexte
$b h = b$	$\frac{15}{8}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{36}{8}$	$\frac{2}{5} =$	$\frac{9}{5}$						kleine Septime
h	$\frac{15}{8}$										große Septime
$\# h = his$	$\frac{15}{8}$	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{37}{8}$	$\frac{2}{5} =$	$\frac{12}{5}$	$\frac{5}{64}$					übermäßige Septime
$b c = ces$	2	$\cdot \frac{2}{1} =$	$\frac{4}{1}$	$\frac{2}{5} =$							verminderte Oktave
c_1	2										reine Oktave.

Die doppelt erhöhten oder doppelt vertieften Töne erhält man aus der Tabelle, indem man die entsprechenden einfach erhöhten oder vertieften Töne mit $\frac{2}{1}$ respektive $\frac{1}{2}$ multipliciert, die Töne der obern Reihe durch Multiplikation der Töne der Hauptreihe mit $\frac{2}{1}$, die Töne der untern Reihe durch Multiplikation mit $\frac{1}{2}$).

¹⁾ Über die Berechnung der Tonleiter sehe man auch: *Helmholts*, Lehre von den Tonempfindungen. Braunschweig 1863. p. 418 ff. *G. Schubring*: Schlüssel, Zeitschrift für Mathematik und Physik. Supplementheft 1868. Gegenüber der Berechnung der Tonleiter aus den einfachen konsonierenden Accorden hat man gezeigt (Cornu und Mercadier. Comptes Rendus T. LXVIII. p. 301 u. 424. LXX. p. 1168. T. LXXII. p. 178. T. LXXVI. p. 431), daß im melodischen die Terz und die von ihr abgeleiteten Intervalle anders und zwar höher kommen werden als in der harmonischen Musik. Bei dem Fortschreiten in Melodie soll die große Terz um ein Komma höher genommen werden, so also die melodische Tonleiter eine andere wäre als die harmonische, in der somit zwei verschiedene Tonleitern neben einander beständen.

§ 158.

Die musikalische Temperatur. Die in dem vorigen Paragraphen berechnete Tonleiter würde wegen ihrer zu grossen Reichhaltigkeit im Gebrauche äusserst unbequem, ja sie würde in der Musik geradezu unbrauchbar sein, da die vielen kleinen Intervalle auf den verschiedensten Instrumenten durchaus nicht darzustellen wären. Zudem würde das Beibehalten aller jener Intervalle auch überflüssig sein, da selbst musikalisch gebildete Ohren kleine Unreinheiten eines Intervalls in einem Accorde nicht mehr wahrzunehmen imstande sind. Unsere jetzige Musik vereinfacht daher das Tonsystem sehr bedeutend, anstatt 52 Töne wendet sie in der Tonleiter nur 12 Töne an. Zunächst lässt sie auf allen Instrumenten mit festen Tönen alle doppelt erhöhten und doppelt vertieften Töne fort, und ersetzt sie durch die nächstliegenden ganzen Töne; so setzt sie

$$cisis = d, deses = c, disis = e, eses = d \text{ etc.}$$

Der Fehler, welcher dadurch begangen wird, ist zwischen c und d , f und g , a und $h = \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$, indem

$$\frac{d}{cisis} = \frac{deses}{c} = \frac{g}{fis} \dots = \frac{128}{125} \cdot \frac{81}{80}$$

ist, zwischen d und e , sowie zwischen g und a beträgt er $\frac{128}{125}$.

Ferner verzichtet die Musik nicht nur auf die verschieden erhöhten Töne fis und his etc., sondern sie unterscheidet in der praktischen Ausführung auch nicht die einander nahe liegenden halben erhöhten und vertieften Töne, wie cis und des , dis und es . Die zwischen diesen Tönen vorhandenen Intervalle sind

$$\begin{aligned} \frac{des}{cis} &= \frac{27}{25} \cdot \frac{24}{25} = \frac{81}{80} \cdot \frac{128}{125} & \frac{es}{dis} &= \frac{6}{5} \cdot \frac{64}{75} = \frac{128}{125} \\ \frac{fes}{e} &= \frac{32}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{128}{125} & \frac{f}{cis} &= \frac{4}{3} \cdot \frac{96}{75} = \frac{128}{125} \\ \frac{ges}{fis} &= \frac{b}{ais} = \frac{81}{80} \cdot \frac{128}{125} & \frac{ces}{h} &= \frac{c}{his} = \frac{128}{125}. \end{aligned}$$

Die hierdurch begangenen Fehler, wenn man die Töne als gleich setzt, also als des den Ton cis u. s. w. gebraucht, würden also ebenso gross sein, wie die durch Vernachlässigung der doppelt erhöhten oder vertieften. Würde man nun aber die eine Reihe der Töne, etwa die erhöhten, rein erhalten, so würden die Unreinheiten für die andere Reihe so stark werden, dass dieselbe ganz unbrauchbar würde; um das zu vermeiden lässt man keinen der Töne rein, sondern setzt anstatt des reinen cis oder des einen zwischen beiden liegenden Ton, dessen Wert wir sofort ableiten werden.

Schliesslich unterscheidet man auch nicht die um ein Komma verschiedenen Töne c und \bar{c} u. s. f., sondern behält nur die Töne c , d , e etc. bei, so dass damit das Tonsystem auf 12 Töne reducirt wird, welche alle die von uns abgeleiteten 52 repräsentieren.

Damit ist nun aber auch eine Temperatur der Töne der c -Durtonleiter notwendig, da sonst die Unreinheit der doppelt erhöhten und vertieften Töne so gross wäre, dass man alle sie enthaltenden Tonarten absolut nicht gebrauchen könnte.

Will man nur diese 12 Töne beibehalten, so ist die Temperatur der Haupttöne der Tonleiter noch aus einem andern Grunde erforderlich. Es nämlich in der Musik notwendig, von einem Tone zu irgend einem andern auf verschiedenen Wegen, das heisst durch Fortschreiten nach verschiedenen Intervallen zu gelangen. So gelangt man, wenn man von irgend einem Grundtone nach Oktaven fortschreitet, immer zu den höheren Oktaven

$$\begin{array}{cccccccc} c & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 & 128. \end{array}$$

So soll man aber auch durch 12 reine Quinten von c aus zu einer andern Oktave gelangen

$$c \ g \ d_1 \ a_1 \ e_2 \ h_2 \ fis_3 \ cis_4 \ gis_4 \ dis_5 \ ais_5 \ f_6 \ c_7$$

das c , zu welchem man gelangt, muss das durch Oktaven erreichte sein.

Berechnet man nun aber c_7 durch 12 reine Quinten, so findet man den Wert

$$c_7 = \frac{531441}{4096},$$

dhrend nach Oktaven

$$c_7 = \frac{524288}{4096} = 128$$

Man findet also beim Fortschreiten nach Quinten c_7 im Verhältnis von

$$\frac{531441}{524288} = \frac{129,7}{128},$$

der nahezu im Verhältnis von $\frac{129}{128}$ zu hoch.

Gleiches zeigt sich bei andern Fortschreitungen, und zwar in noch erhöhtem Masse; so sollte ein Fortschreiten durch drei grosse Terzen

$$c \ e \ gis \ c_1$$

die nächst höhere Oktave liefern; diese Fortschreitung ergibt indessen

$$1 \ \frac{5}{4} \ \frac{3}{2} \ \frac{125}{64},$$

statt $c_1 = \frac{128}{64}$ erhalten wir demnach einen um das Komma $\frac{125}{128}$ zu niedrigeren Ton.

Schreiten wir demnach nach reinen Intervallen fort, so verlieren die höheren Töne ihre Reinheit gegen den Grundton, man gelangt niemals zu einer reinen Oktave, will man aber die Intervalle gegen den Grundton feststellen, so werden die einzelnen Intervalle unrein. Dasselbe ist bei auf- und steigender Bewegung und Benutzung verschiedener Intervalle der Fall. gibt Chladni in seiner Akustik folgendes Beispiel. Bei der Tonfolge

$$g \ c \ f \ d \ g \ c$$

setzt man zunächst eine reine Quint abwärts, dann eine Quart aufwärts, eine kleine Terz abwärts, eine Quarte aufwärts und schliesslich eine Quinte aufwärts. Das Verhältnis der Töne zum Grundton c ist

$$\frac{3}{2} \ 1 \ \frac{4}{3} \ \frac{9}{8} \ \frac{3}{2} \ 1.$$

Gehen wir dagegen nach reinen Intervallen, so werden die entsprechenden Zahlen

$$\frac{3}{2}; 1; \frac{4}{3}; \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}; \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{20}{9}; \frac{20}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{10}{3}; \frac{10}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{20}{9}.$$

Wir gelangen also weder zu dem reinen g zurück, von dem wir ausgingen, noch zum Grundtone. Eine weitere Fortsetzung solcher Fortschreitungen nach reinen Intervallen würde die nachkommenden immer weiter von den reinen Tönen entfernen. Deshalb und besonders weil die Fortschreitungen nach verschiedenen Intervallen ganz verschiedene Abweichungen von den reinen Tonverhältnissen, so z. B. die reinen Quinten zu hohe, die reinen Terzen zu tiefe Töne geben, können in der Musik, wenn man das Tonsystem auf 12 Töne beschränkt, die reinen Intervalle gar nicht angewandt werden, selbst wenn man auf allen Instrumenten die Töne alle ganz rein hervorbringen könnte. Man muß daher alle Töne modificieren, oder wie es in der Musik heisst, temperieren.

Die Temperatur kann nun nach verschiedenen Principien hergestellt werden; man nimmt entweder einige Intervalle rein und verteilt die andern Intervalle, so daß man dadurch bei den verschiedenen Fortschreitungen immer zu denselben Tönen kommt. So sind z. B. in der Kirnbergerschen Temperatur neun Quinten ganz rein, drei dagegen fis — cis , d — a , a — e unrein, und zwar ist der Fehler, der beim Fortschreiten durch 12 Quinten entsteht, auf diese drei Quinten verteilt.

Indes sind die sogenannten ungleichschwebenden Temperaturen zu verwerfen, da dadurch auf Kosten einiger Intervalle die andern um so unreiner werden.

Die in der Musik gebräuchliche Temperatur verändert alle Intervalle außer den Oktaven; diese müssen rein sein, da die Oktaven dem Einklange am nächsten stehen, deshalb ebenso, wie eine Unreinheit des Einklanger, auch die der Oktaven am leichtesten gehört wird und am störendsten ist. Die zwölf innerhalb einer Oktave liegenden Töne werden dann alle als gleichweit von einander abstehend betrachtet, so daß das Tonverhältnis zweier auf einander folgender Töne konstant oder

$$\frac{cis}{c} = \frac{d}{cis} = \frac{dis}{d} = \frac{e}{dis} = \frac{f}{e} \dots \dots = \frac{c_1}{h} = i$$

gesetzt wird.

Dieses Intervall i wird dann als halber Ton betrachtet, dessen Wert sich daraus ergibt, daß

$$cis = i \cdot c, d = i \cdot cis = i^2 \cdot c \dots \dots c_1 = i \cdot h = i^{12} \cdot c.$$

Setzen wir nun $c = 1$, so wird

$$c_1 = 2 = i^{12}$$

$$i = \sqrt[12]{2} = 1,05946.$$

Nach der gleichschwebenden Temperatur erhalten wir darnach statt der reinen Schwingungsverhältnisse folgende, zusammengestellt mit den reinen Schwingungsverhältnissen und dem Fehler der temperierten gegen die reinen Töne. Letztere sind in Form von Decimalbrüchen gegeben, deren Zähler jedesmal die temperierte, deren Nenner die reine Schwingungszahl ist. Ist demnach in der Rubrik Fehler des temperierten Tones die Zahl

größer als 1, so ist der temperierte Ton zu hoch, ist die Zahl ein echter Bruch, so ist der temperierte Ton zu tief.

Name des Tones	Reines Schwingungsverhältnis	Temperiertes Schwingungsverhältnis	Fehler des temperierten Tones
<i>c</i>	1 = 1	1	1
<i>cis</i>	$\frac{25}{24} = 1,041\ 66$	} 1,059 46	1,017 08
<i>des</i>	$\frac{27}{25} = 1,080\ 00$		0,980 98
<i>d</i>	$\frac{8}{7} = 1,125\ 00$	} 1,122 46	0,997 74
<i>dis</i>	$\frac{75}{64} = 1,171\ 87$		1,014 79
<i>es</i>	$\frac{6}{5} = 1,200\ 00$	} 1,189 21	0,991 01
<i>e</i>	$\frac{5}{4} = 1,250\ 00$		1,010 26
<i>fes</i>	$\frac{32}{25} = 1,280\ 00$	} 1,259 92	0,984 33
<i>cis</i>	$\frac{125}{96} = 1,302\ 08$		1,025 16
<i>f</i>	$\frac{4}{3} = 1,333\ 33$	} 1,334 84	1,001 13
<i>fis</i>	$\frac{75}{64} = 1,388\ 89$		1,018,23
<i>ges</i>	$\frac{36}{25} = 1,440\ 00$	} 1,414 21	0,982 09
<i>g</i>	$\frac{3}{2} = 1,500\ 00$		0,998 88
<i>gis</i>	$\frac{75}{64} = 1,562\ 50$	} 1,498 31	1,015 93
<i>as</i>	$\frac{8}{5} = 1,600\ 00$		0,992 12
<i>a</i>	$\frac{5}{3} = 1,666\ 66$	} 1,587 40	1,009 07
<i>ais</i>	$\frac{125}{72} = 1,736\ 11$		1,026 31
<i>b</i>	$\frac{9}{5} = 1,800\ 00$	} 1,781 80	0,989 89
<i>h</i>	$\frac{15}{8} = 1,875\ 00$		1,006 80
<i>ces</i>	$\frac{8}{5} = 1,920\ 00$	} 1,887 75	0,983 20
<i>his</i>	$\frac{125}{64} = 1,953\ 13$		1,024 07
<i>c₁</i>	2 = 2,000 00	} 2,000 00	1

Wie man sieht, weichen die temperierten Verhältnisse von den reinen stellenweise nicht unbedeutend ab; in demselben und zum Teil noch höherem Maße weichen dieselben von den reinen doppelt erhöhten und doppelt vertieften ab, an deren Stelle die temperierten Töne gesetzt werden. So wird das temperierte *d* für *eses* eingesetzt, obwohl die Schwingungszahl des temperierten *d* nur 0,973 96 des reinen *eses* beträgt. Wenn nun auch das Ohr in Accorden sehr kleine Unreinheiten nicht mehr wahrnehmen kann, so sind die oben berechneten doch zu groß, als daß nicht der Wohlklang der Accorde dadurch wesentlich beeinträchtigt werden sollte. Deshalb ist es durchaus wünschenswert, daß an Stelle der gleichschwebenden Temperatur eine andere eingeführt werden könne, welche diese Unreinheiten nicht zeigt. Die Möglichkeit dazu ist aber nur gegeben, wenn man das Tonsystem erweitert, und statt 12 eine größere Zahl von Tönen beibehält. Es hat das eigentlich nur Schwierigkeit für die Instrumente mit festen Tönen, da z. B. an den Streichinstrumenten die verschiedenen Töne doch verschieden gegriffen werden, *es* anders als *dis* u. s. f. Für ein Instrument mit festen Tönen hat Helmholtz¹⁾ und später Appunn²⁾ vor

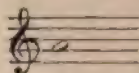
¹⁾ Helmholtz, Tonempfindungen. p. 483 ff.

²⁾ Appunn, die Beschreibung des Appunnschen Harmoniums gibt Schubring in Schönmilchs Zeitschrift für Mathematik. Supplementheft 1868. p. 124 ff.

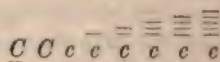
kurzem eine Tonreihe gegeben und praktisch ausgeführt, welche fast den reinen Tönen gleichkommt; die Tonreihe von Helmholtz hat 30 Töne, die von Appunn 36, der Wohlklang der Accorde soll auf diesen Instrumenten, wie zu erwarten stand, viel höher sein, als auf den temperierten. Ob in der Instrumentalmusik eine ähnliche Tonreihe möglich ist, müssen die Musiker entscheiden.

§ 159.

Absolute Schwingungszahl der Töne. Bisher haben wir das Verhältnis der Töne zu einander ins Auge gefaßt. Da wir vorhin sahen, daß das Verhältnis der musikalischen Töne ganz dasselbe ist für die hohen und tiefen Regionen, so ist es natürlich einerlei, von welchem Tone man ausgeht, welche Schwingungszahl man als diejenige des Grundtones annimmt. Um indes die verschiedenen Instrumente mit einander stimmen zu können und überhaupt durch die oben erwähnten Zeichen bestimmte Töne zu bezeichnen, hat man für einen bestimmten Ton, der ungefähr in der Mitte der in der Musik gebräuchlichen Töne liegt, eine bestimmte Höhe angenommen. Es ist der als eingestrichene *a* bezeichnete Ton



Von diesem Tone aus werden die übrigen Töne bestimmt. Der um eine Sext tiefere Ton ist das eingestrichene *c*. Die in der Musik meist gebrauchten Töne liegen teils höher, teils tiefer als dieses *c*, und zwar steigt die Musik drei Oktaven hinab und vier hinauf. Die unterhalb dieses *c* liegende Oktave heisst die kleine Oktave, die in ihr liegenden Töne werden mit den kleinen Buchstaben des Alphabets bezeichnet; die nächst tiefere mit den großen Buchstaben bezeichnete, ist die große Oktave und unter dieser die Kontraoktave, welche man durch große Buchstaben mit einem kleinen Querstrich darunter bezeichnet. Die höhern Oktaven werden mit den kleinen Buchstaben des Alphabets bezeichnet und zur Angabe ihrer Höhe mit kleinen Querstrichen darüber versehen. Die auf die kleine Oktave folgende ist die eingestrichene, die nächsthöhere die zweigestrichene u. s. f. Wir wollen indes unsere bisherige Bezeichnungsweise beibehalten und die eingestrichene Oktave durch eine kleine 1, die zweigestrichene durch eine kleine 2 etc. unten rechts an den den Ton angehenden Buchstaben bezeichnen. Die in der Musik angewandten Töne liegen, nach der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, zwischen den Oktaven



Nur wenige Instrumente gehen über diese sieben Oktaven hinaus.

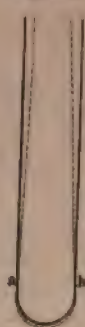
Um den Ton des eingestrichenen a_1 , nach welchem die Stimmung geregelt wird, zu bestimmen und zu fixieren, hat man die Stimmgabel konstruiert. Dieselbe besteht aus einem gabelförmig gebogenen Stahlstabe, an welchem unten an der Biegung ein Stäbchen angebracht ist (Fig. 255). Die Gabel wird dadurch zum Tönen gebracht, daß man sie mit einer der Zinken an einen festen Körper anschlägt, sie schwingt dann so, wie Fig. 256

zeigt, mit zwei Schwingungsknoten in der Nähe der Biegung, wie ein an beiden Enden freier, in transversale Schwingungen versetzter Stab. Die beiden Zinken schwingen zugleich nach innen und die Biegung nach unten, dann die Zinken nach außen und die Biegung nach oben hin. Die Töne der Stimmgabel allein sind sehr schwach; um sie zu verstärken, setzt man sie auf einen Tisch, der dann, wie wir später sehen werden, durch Resonanz

Fig. 258.



Fig. 259.



der Ton verstärkt. Größere Stimmgabeln, welche nicht a_1 , sondern c_1 geben, sind meist auf besonderen Resonanzkästchen befestigt, in denen eine Luftsäule für sich schwingend denselben Ton gibt als die Gabel und deshalb durch ihre Schwingungen den Ton ganz bedeutend verstärkt. Man reicht solche Gabeln mit einem Balfbogen an, den man parallel der Schwingungsebene an den Zinken der Gabel vorbeiführt.

Messungen der Schwingungszahl des durch die a_1 -Stimmgabel bestimmten Tones haben nun ergeben, daß dieser Ton keineswegs überall die gleiche Schwingungszahl hat. Fischer fand im Jahre 1822, daß die Schwingungszahl des Tones a_1 im Orchester des Berliner Theaters gleich 437 war; diejenige des Tones a_1 des Orchesters der großen Oper zu Paris war 431, am Théâtre Feydeau = 428 und des Théâtre Italien = 424 Schwingungen pro Sekunde¹⁾.

Scheibler²⁾ fand 1833 den Ton von fünf Pariser a_1 -Gabeln von 426,7 bis 440,7, von einer Gabel des Berliner Orchesters 441,62 und von sechs Gabeln des Wiener Orchesters zwischen 433,66 und 444,87 Schwingungen.

Scheibler machte darauf 1834 auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Stuttgart den Vorschlag, den Ton a_1 zu 440 Schwingungen festzusetzen, indes ist die Stimmung der Orchester darnach nicht normiert worden und sie blieb nach wie vor schwankend. Neuerdings³⁾ ist in Frankreich bestimmt worden, daß der Ton a_1 zu 435 Schwingungen pro Sekunde gesetzt werden solle, um dort überall eine gleichmäßige Stimmung her-

¹⁾ Fischer in den Denkschriften der Berliner Akademie für 1824.

²⁾ Nach der Angabe von Röber. Dove, Repertorium. III.

³⁾ Nach dem Moniteur universel 25. février 1859.

zubringen, und seitdem ist auch bei einer großen Anzahl deutscher Orgeln dieselbe Stimmung angenommen worden.

Gehen wir von dieser Schwingungszahl aus, so wird darnach

$$c_1 = \frac{a_1}{1,681\,79} = \frac{435}{1,681\,79} = 258,65.$$

Die Schwingungszahlen der vorhin angegebenen Töne werden da folgende

$$\begin{array}{ll} C = c_{-2} = 32,33 & c_2 = 517,30 \\ C = c_{-1} = 64,66 & c_3 = 1034,60 \\ c = 129,32 & c_4 = 2069,20 \\ c_1 = 258,65 & c_5 = 4138,40 \end{array}$$

wonach man leicht imstande sein wird, die Schwingungszahlen aller in der Musik gebräuchlichen Töne zu berechnen.

Die hier angegebenen Töne sind indes nicht die überhaupt hörbaren Töne, sowohl Töne unterhalb c_{-2} als oberhalb c_5 sind noch hörbar. In größern Orgeln findet sich noch eine ganze Oktave tieferer Töne bis c_{-3} , dem Subkontra C , welches 16 Schwingungen in der Sekunde voll und Savart behauptete nach seinen Versuchen¹⁾, daß bei hinreichender Stärke Töne selbst bei 7—8 Schwingungen in der Sekunde hörbar. Savart ließ einen Eisenstab um eine horizontale Achse sich drehen und ihn so auf, daß er bei jeder Umdrehung durch einen Spalt eines Bellschlags und dabei die Ränder berührte. Jeder Durchtritt gab einen heftigen Schlag und war die Umdrehungsgeschwindigkeit so groß, daß der Eisenstab in der Sekunde 7—8 mal die Spalte passierte, so hörte man einen tiefen und lauten Ton. Savart glaubte, daß dieser Ton Folge der Stöße des Eisenstabes in der Brettspalte sei.

Schon Despretz²⁾ widersprach dem und bemerkte, daß, wenn Savarts Schluß richtig sei, die doppelte Umdrehungsgeschwindigkeit oder die Anwendung zweier Spalten auch die höhere Oktave des gehörten Tones hätte erzeugen müssen. Der Versuch ergibt aber einen ganz andern, dem vorigen nur wenig verschiedenen Ton, so daß der Ton sich nicht aus den einzelnen Schlägen zusammengesetzt haben kann.

Helmholtz³⁾ wies nach, daß die Methode von Savart zur Untersuchung dieser Frage ganz ungeeignet sei, da die Dauer jedes einzelnen Schlags gegen die Zwischenzeit zweier Stöße, also die Schwingungsdauer der Töne, die sie erzeugten Schwingungen zu kurz sei. Es müssen deshalb die Organe sehr stark entwickelt sein, so daß die tiefsten gehörten Töne nicht Obertöne sind. Er hat deshalb die Frage nach den tiefsten Tönen nicht aufgenommen, und gelangt zu einem wesentlich andern Resultat, erst wenn die Tonempfindung erst beginnt bei etwa 30 Schwingungen und erst bei etwa 40 Schwingungen der Ton eine bestimmte musikalische Qualität hat. Helmholtz schloß dieses besonders aus einem Versuch mit einer in der Mitte belasteten Saite, welche infolge der Belastung fast nur

¹⁾ Savart, Annales de chim. et de phys. Tome XLVII. Poggend. Ann.

²⁾ Despretz, Comptes rendus de l'Acad. de France. Tome XX. Poggend. Ann. Bd. LXXV.

³⁾ Helmholtz, Tonempfindungen. p. 266. ff.

gesamsten Schwingungen, bei denen die Saite der ganzen Länge nach wippt, vollführt. Die Saite wurde auf einen Resonanzkasten ausgespannt, der nur eine Öffnung hatte, und diese konnte mit dem Gehörgange verbunden werden, so daß die Luft des Resonanzkastens nur in das Ohr hin- und herweichen konnte. Die Töne einer Saite von gewöhnlicher Höhe sind unter diesen Umständen von unerträglicher Stärke. Dagegen war die Tonempfindung, die die Saite 37 Schwingungen machte, nur mehr schwach, und hatte auch noch etwas Knarrendes, was darauf schließen läßt, daß das Ohr anfangs die einzelnen Stöße zu fühlen. Bei 31 Schwingungen war kaum noch etwas zu hören.

Später hat Helmholtz¹⁾ dasselbe mit zwei von König hergestellten Stimmgabeln gezeigt, deren Stimmung durch an den Zinken verschiebbare Gewichte geändert werden konnte. Die Zahl der jeder Lage des Gewichts entsprechenden Schwingungen ist auf einer an den Zinken angebrachten Skala angegeben; die eine Gabel gibt in der Sekunde je nach der Lage des Gewichtes 25—35, die andere 35—61 Schwingungen. Die Gewichte haben die Form von Platten. Bringt man das Ohr ganz nahe an diese Platten, so hört man die tiefen Töne sehr gut. Bei 30 Schwingungen hört man noch deutlich einen schwachen dröhnenden Ton, bei 28 kaum noch eine Spur, obgleich man leicht Oscillationen von 9^{mm} Amplitude in dieser Weise ganz dicht vor dem Ohr erzeugen kann.

Preyer²⁾ glaubt indes die untere Grenze der Hörbarkeit doch noch erheblich tiefer setzen zu können. Er nahm mit solchen Stimmgabeln noch 24 Schwingungen als Ton wahr und glaubt mit schwingenden belasteten Zungen noch 16 Schwingungen als Ton empfunden zu haben. Gegen die letzteren Verhältnisse von Preyer wendet aber Helmholtz³⁾ ein, daß solche belastete Zungen bei jeder ihrer Schwingungen dem Befestigungspunkte zwei longitudinale Auslenkungen erteilen und zwar jedesmal wenn sie mit dem Maximum der Geschwindigkeit die Gleichgewichtslage passieren, er sieht es deshalb noch nicht als bewiesen an, daß unser Ohr erheblich unter der Zahl 30 liegende Schwingungen als Ton empfinden kann.

Darnach würde also das c_{-2} der tiefste musikalische Ton sein, und die ganze Subkontraoktave der Orgel keine eigentlichen Töne, sondern nur ein Geräusch geben, indem das Ohr die einzelnen Stöße fühlt. Es ist in der That für diese Töne selbst einem musikalisch gebildeten Ohre nicht möglich, eine bestimmte Tonhöhe anzugeben.

Nach oben hin ist die Reihe der hörbaren Töne weniger begrenzt, indes ist es sich hier, daß verschiedene Personen für solche Töne verschieden empfindlich sind, und selbst eine Person mit dem einen Ohr oft höhere Töne wahrnehmen kann als mit dem andern. So gibt Brewster an, daß er das Heimchenzirpen nur mit einem Ohre hörte, während für gewöhnliche Menschen beide Ohren gleich empfindlich waren⁴⁾.

Sind die Töne hinreichend stark, so können noch sehr hohe Töne gehört werden; so brachte Savart⁵⁾ mit seinem gezahnten Rade noch deut-

¹⁾ Helmholtz, Tonempfindungen III. Ausgabe. p. 279.

²⁾ Preyer, Physiologische Abhandlungen I. Reihe Heft I. p. 1.

³⁾ Helmholtz, Tonempfindungen IV. Ausgabe. p. 295.

⁴⁾ Brewster, Philosophical Magazin. vol. XXV.

⁵⁾ Savart, Annales de chim. et de phys. T. XLIV.

lich das fis_7 mit 24000 Schwingungen hervor, und Despretz¹⁾ fand, daß mittels Stimmgabeln, welche auf Resonanzkasten standen, noch das d_8 mit über 36000 Schwingungen hörbar war.

§ 160.

Analyse des Klanges. Wir haben bereits im § 153 darauf hingewiesen, daß Töne gleicher Höhe sich durch Verschiedenheit ihrer Klangfarbe unterscheiden, und bemerkt, daß die Verschiedenheit des Klanges ihren Grund darin habe, daß die Form der Schwingungen bei gleicher Periode eine verschiedene sei; eine Verschiedenheit, welche darauf beruht, daß die Schwingungen zusammengesetzt periodische sind, daß innerhalb der durch den Grundton angegebenen Periode die Luftteilchen gleichzeitig nach andern höhern Tönen angehörigen Perioden schwingen. Bei der Besprechung der zusammengesetzten Schwingungen (§ 145) sahen wir schon, daß bei den Schwingungen der meisten Körper nicht einfache Schwingungen, welche durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

dargestellt sind, sich finden, sondern daß zu diesen stets solche hinzutreten, deren Schwingungsdauern Vielfache der ersten sind, daß also die Schwingungen im allgemeinen durch die Gleichung

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} + b \cdot \sin 4\pi \frac{t}{T} + c \cdot \sin 6\pi \frac{t}{T} + \dots p \cdot \sin n\pi \frac{t}{T}$$

gegeben sind. Bei den verschiedenen schwingenden Körpern können die Verhältnisse zwischen den Amplituden der einzelnen Schwingungen, sowie die Anzahl der Glieder dieser Reihe je nach Art und Stelle der Erregung sehr verschieden sein.

Wie wir nun § 155 sahen, stellen die einzelnen Glieder der zuletzt hingeschriebenen Reihe die harmonischen Obertöne des durch das erste Glied dargestellten Tones vor, also wenn wir den letztern mit c bezeichnen, die Reihe

$$c, c_1, g_1, c_2, e_2, g_2, \text{Ton } 7, c_3, d_3 \dots$$

Ist demnach die vorhin ausgesprochene Annahme über die Ursache der Klangverschiedenheit die richtige, so würde das bedeuten, daß die verschiedenen Klänge nicht einfache Töne, sondern Accorde sind, welche von der Reihe der harmonischen Töne gebildet werden, und daß ihre Verschiedenheit darin beruht, daß in diesen Accorden mehr oder weniger Töne der Reihe vorhanden sind, und daß die Stärke der einzelnen Töne eine verschiedene ist.

Ohm²⁾ war der erste, der den Satz aufstellte, daß das Ohr die Fähigkeit habe, jede in einer zusammengesetzten vorhandene einfache Schwingung als Ton gesondert wahrzunehmen, ohne jedoch daran den Schluss zu knüpfen, daß in der Wahrnehmung der verschiedenen Obertöne der Grund der Klangverschiedenheit liege. Seebeck³⁾ nahm dem gegenüber an, daß in einer

¹⁾ Despretz a. a. O.

²⁾ Ohm, Poggend. Ann. Bd. LIX und LXII.

³⁾ Seebeck, Poggend. Ann. Bd. LX und LXIII. Doves Repertorium. Bd. VIII.

zusammengesetzt periodischen Schwingung die einzelnen Töne nicht zu unterscheiden wären, daß aber in der durch das Hinzutreten der weiteren Schwingungen bedingten Veränderung des Schwingungsgesetzes eine Ursache Klangverschiedenheit der Töne gleicher Höhe zu suchen sei. Erst Helmholtz¹⁾ war es, der den Nachweis lieferte, daß in einem Klange, dessen schwingende Bewegung durch obige Gleichung dargestellt ist, alle die Töne, wie das Gesetz von Ohm verlangt, wirklich vorhanden und dem Ohre wahrnehmbar sind, und daß die Verschiedenheit des Klanges wesentlich den vorhandenen Obertönen bedingt ist.

Zum Nachweis der objektiven Existenz der Partialtöne benutzte Helmholtz das Phänomen des Mittönens, dessen Theorie wir im nächsten Kapitel ausführlicher besprechen werden. Die Erscheinung besteht darin, wenn in der Nähe eines Körpers, welcher Schwingungen einer ganz bestimmten Periode vollführen, das heißt also einen einfachen Ton bestimmter Höhe geben kann, Schwingungen dieser Periode erzeugt werden, der Körper gerät mit in Schwingungen gerät, welche man entweder direkt oder indirekt wahrnehmbar machen kann, daß man den erregenden Ton aufheben läßt, wodurch dann der Ton des mitschwingenden Körpers allein hörbar bleibt. Spannt man z. B. auf einem Monochord zwei Saiten genau Einklang, und bringt die eine zum Tönen, so tönt auch die andere, oder legt man von zwei ganz genau gleichen Stimmgabeln, wie Fig. 258, die eine zum Tönen, so wird auch die andere in Schwingung versetzt. Dieses Mittönen tritt aber nur ein, wenn die Schwingungen des mittönenden Körpers dieselbe Dauer haben, wie die Schwingungen des ursprünglich tönenden Körpers, schon bei geringem Unterschiede der Schwingungen tritt das Mittönen nicht ein. Wenn man deshalb bei Erzeugung eines Klanges einen mitschwingenden Körper zum Mittönen bringt, dessen Schwingungszahl jener des im Klange vorhandenen Grundtones nicht entspricht, so kann man sich mit Sicherheit schließen, daß neben dem Grundtone der dem mitschwingenden Körper entsprechende Ton in dem Klange vorhanden ist.

Ein sehr bequemes Mittel, um das Mittönen zu zeigen, sind Membranen, wie Fig. 260 als Boden auf einer Flasche ausgespannt sind. Der Hals der Flasche bei *a* ist

die Membran *b* vertritt die Stelle des Bodens; man nimmt am besten eine nasse Schweinsblase, gleichmäßig aufgespannt wird, die man dann trocknen läßt, und wird mit Wachs ein Coccon befestigt, der an seinem anderen Ende ein Siegellackstück

Fig. 260.



trägt, das gerade vor der Mitte der Membran hängt. Wenn die Membran in Schwingungen gerät, so macht das Pendelchen die heftigsten Schwingungen. Wenn die Spannung der Membran und die Größe der Flasche richtig getroffen sind, so gibt die Membran fast nur ihren Grundton an, während sie als Ganzes schwingt, die Obertöne treten dann nur schwach hervor. Um dieselben zu erkennen, muß man die Flasche vertikal stellen,

¹⁾ Helmholtz, Tonempfindungen. Abschnitt II, III, IV, V, VI.

und die Membran zur Beobachtung der Klangfiguren mit Sand bestreuen. Die möglichen Schwingungsformen der Membran mit den dazu gehörigen Schwingungszahlen zeigt folgende kleine Tabelle:

Die Membran schwingt	Schwingungszahl
ohne Knotenlinie	1
mit einem Kreise	2,296
mit zwei Kreisen	3,599
mit einem Durchmesser	1,590
mit einem Durchmesser und einem Kreise	2,920
mit zwei Durchmessern	2,140

Bezeichnen wir den Grundton der Membran mit c , so gibt dieselbe als Obertöne $d_1 +$, $b_1 +$, as , $g_1 -$, cis_1 , die Zeichen $+$ und $-$ bei den Tönen sollen anzeigen, daß der Ton der Membran etwas höher oder etwas tiefer ist als der hingeschriebene.

Die mitschwingenden Membranen haben den Vorzug, daß sie die in einer Klangmasse vorhandenen Einzeltöne ganz ohne Mithilfe des Ohres zeigen, sie haben indes den Nachteil, daß sie für schwächere Töne nicht sehr empfindlich sind. In der Beziehung werden sie weit übertroffen von den von Helmholtz angegebenen Resonatoren. Es sind das Hohlkugeln oder Röhren, von Glas oder Messing (Fig. 261 a und b), mit zwei Öffnungen.

Fig. 261 a.



Fig. 261 b.



Die eine Öffnung a hat scharf abgeschnittene Ränder, die andere b ist trichterförmig und so geformt, daß man sie in das Ohr einsetzen kann. Man umgibt zu dem Ende die Öffnung b mit geschmolzenem Siegellack, und wenn dasselbe soweit erkaltet ist, daß man es mit den Fingern ungestraft berühren kann, aber doch noch weich ist, drückt man die Öffnung in den Gehörgang. Das Siegellack formt sich dann nach der innern Oberfläche des letztern, und wenn man dann

später den Resonator an das Ohr setzt, so schließt er leicht und vollständig dicht.

Ein solcher in das Ohr gesetzter Resonator gibt einen bestimmten Grundton und außerdem mehrere sehr viel höher liegende Obertöne. Wird der Grundton desselben außerhalb angegeben, so wird die Luft des Resonators sehr kräftig zum Mittönen gebracht, und der Ton dringt dann unmittelbar und deshalb sehr kräftig ins Ohr.

Verstopft man das eine Ohr und setzt an das andere den Resonator, so hört man die meisten in der Umgebung angegebenen Töne sehr gedämpft, wird dagegen der Ton des Resonators angegeben, so schmettert derselbe mit gewaltiger Stärke in das Ohr hinein.

Eine abgestimmte Reihe solcher Resonatoren, wie man sie jetzt von König in Paris beziehen kann, die harmonische Reihe der Töne von c_{-1} an enthaltend, ist deshalb ein vortreffliches Mittel, um die in einer Klangmasse enthaltenen Töne zu bestimmen. Es ist dabei zu bemerken, daß das Aufreten des Tones im Resonator ganz ebenso die objektive Existenz des Tones außerhalb des Resonators beweist, als die mitschwingende Membran. Denn der Ton tritt in dem Resonator nur hervor, wenn derselbe von Schwingungen getroffen wird, welche mit denen, welche die Luftmasse des Resonators annehmen kann, isochron sind; wird deshalb der Resonator zum Tönen gebracht, so beweist das, daß in den zusammengesetzten Schwingungen, welche zum Tönen bringen, die dem Resonator entsprechende einfache Schwingung vorhanden ist, und als solche aus den zusammengesetzten abgeschieden werden kann.

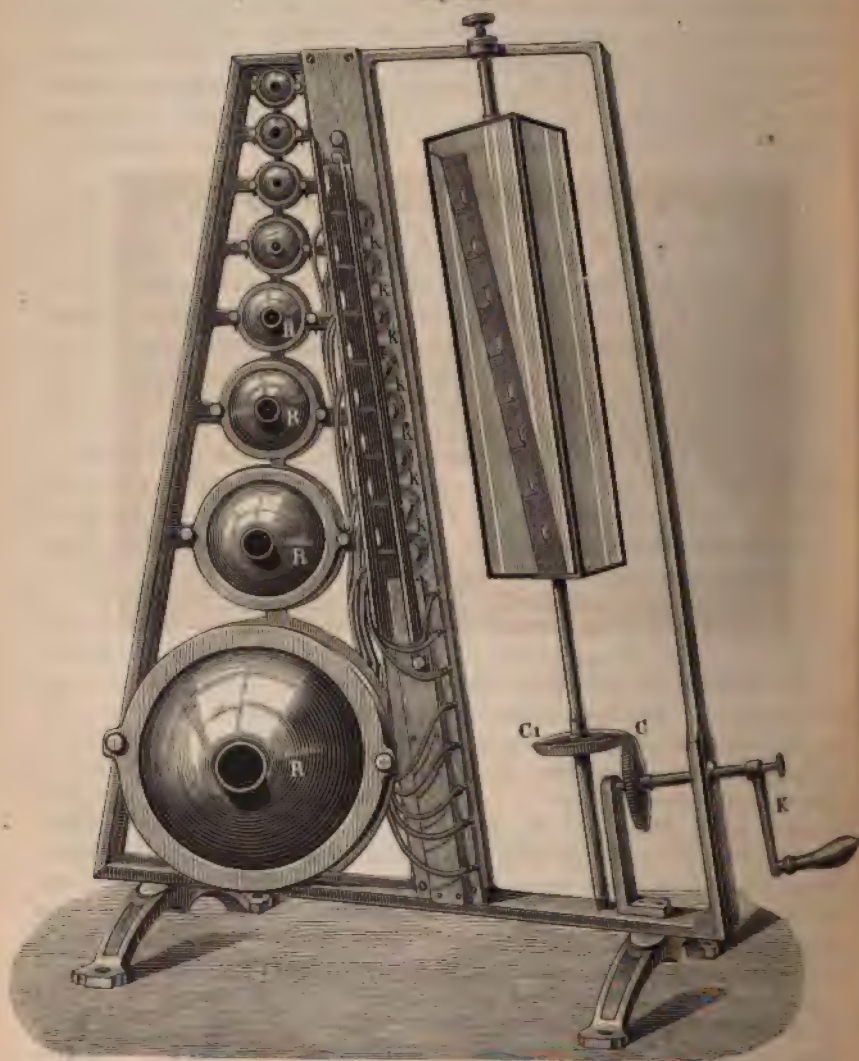
Den Vorzug der Membranen, die Zusammensetzung der Klänge unabhängig vom Ohr zu zeigen, mit der Empfindlichkeit der Resonatoren, verleiht ein von R. König in Paris konstruierter Apparat. Eine Reihe von abgestimmten Resonatoren, 8 oder 10 von c an sind auf einem Stative übereinander befestigt R, R (Fig. 262). Das Ende der Resonatoren, welches erst ins Ohr gesteckt wird, ist durch einen Kautschukschlauch mit einer über kleiner Kapseln kk in Verbindung. Mit Ausnahme der Eintrittsstelle des Kautschukschlauches sind die Kapseln rings geschlossen, und zwar an den Seitenwänden und hinten, wo der Schlauch eintritt, fest, vorn, der Verbindung des Schlauches gegenüber durch eine sehr feine elastische Membran. Wird nun durch einen außen angegebenen Ton die Luftmasse des Resonators in Schwingung versetzt, so pflanzt sich die Bewegung bis in die Kapsel fort, und die die Kapsel vorn abschließende Membran wird gerade in Schwingungen versetzt, wie das Trommelfell, wenn man den Resonator in den Gehörgang einschiebt. Um diese Schwingungen sichtbar zu machen, wendet König ein äußerst sinnreiches Mittel an; vor der Membran wird eine zweite Kapsel angebracht, so daß die Membran selbst die Hinterwand der vorderen Kapsel bildet. Durch ein seitliches Ansatzrohr läßt man die vordere Kapsel Leuchtgas eintreten, welches durch die (Fig. 262) neben den Resonatoren sichtbaren Brenner, die aus einer kleinen kreisförmigen, auf der obern Seite dünner Cylinder angebrachten Öffnung bestehen, entweicht.

Angezündet gibt dieser Gasstrom eine kleine spitze leuchtende, ruhige Flamme. Sobald aber der mit dieser Flamme in Verbindung stehende Resonator durch einen Ton in Schwingungen versetzt wird, geht auch die Flamme in isochrone Vibrationen, indem sie abwechselnd größer und kleiner wird. Denn indem die Membran durch die Schwingungen der Luft im Resonator abwechselnd etwas in die das Gas haltende Kapsel eingedrückt, abwechselnd aus ihr zurückgezogen wird, wird der Druck des Gases in der Kapsel abwechselnd etwas vergrößert, abwechselnd etwas verkleinert. Dem vergrößerten Druck entspricht ein verstärktes, dem verkleinerten ein geschwächtes Ausströmen des Gases und ersterem eine Vergrößerung, letzterem eine Verkleinerung der Flamme. Diese Vibrationen der Flamme erfolgen indes mit einer solchen Geschwindigkeit, daß sie bei genauer Betrachtung der Flamme nicht sichtbar sind.

Um sie sichtbar zu machen, benutzt König die schon mehrfach er-

wähnte Eigentümlichkeit unseres Auges, daß Lichteindrücke eine gewisse Zeit dauern und die aus dem Reflexionsgesetze sich ergebende Erscheinung, daß das Spiegelbild einer Flamme je nach der Stellung eines Spiegels an verschiedenen Orten erscheint. Das an der Seite der Flamme sich befindende Parallelepiped ist auf seinen vier Seitenflächen mit Spiegeln belegt, so

Fig. 262.



daß, wenn es in der Stellung ist, welche die Figur zeigt, die Spiegelbilder der Flammen, wie es in der Figur angedeutet ist, sichtbar sind. Durch zwei mittels der Kurbel *K* gedrehte konische Zahnräder *C* und *C₁* kann das spiegelnde Parallelepiped in Rotation versetzt werden. Dreht man Spiegel langsam, während die Flamme ohne Vibrationen brennt, so

at man die Flamme nach und nach an verschiedenen Stellen neben einander, dreht man ihn rasch, so sieht man alle diese Bilder einer Flamme gleichzeitig, und infolge dessen sieht man sie als ein horizontales Lichtband, gerade wie man eine rasch im Kreise geschwungene glühende Kohle leuchtenden Kreis sieht.

Anders jedoch, wenn die Flamme vibriert, wenn die leuchtende Spitze der Flamme nur immer einen Moment sichtbar ist; sie gibt dann im Spiegel jedesmal ein Bild, wenn sie aufzuckt, diese Bilder fallen aber, da der Spiegel zwischen dem jedesmaligen Aufzucken gedreht ist, neben einander, und man sieht dann im Spiegel eine Reihe von Flammenbildern neben einander, wie es Fig. 263 zeigt.

Fig. 263.



Der Abstand der einzelnen Flammenbilder hängt ab von der Schnelligkeit, mit der die Vibrationen erfolgen und der Schnelligkeit der Rotation des Spiegels, oder wenn die Schnelligkeit der Rotation des Spiegels gegeben ist, nur von der Schnelligkeit, mit der sich die Vibrationen folgen. Begleiten sich z. B. in einem Spiegel zwei Flammen, von denen die eine doppelt so rasch vibriert als die andere, so sieht man auch von der erstern doppelt so viel Bilder als von der letztern. So zeigt Fig. 263 die Erscheinung in dem rotierenden Spiegel, wenn man gleichzeitig c und c_1 ertönen lässt, die untere Flamme gibt die halbe Anzahl Bilder als die darüber liegende, da die Luft im untern Resonator nur halb so viel Schwingungen macht als im darüberliegenden.

Die Anwendung des Apparates ergibt sich darnach von selbst; man setzt den zu untersuchenden Klang auf den Grundton c an und setzt den Spiegel in Rotation. Alle die in dem Klange enthaltenen Obertöne bringen die Luft der ihnen entsprechenden Resonatoren in Vibration, welche sich den zugehörigen Flammen mittheilt. Man sieht dann die entsprechenden Flammen im rotierenden Spiegel als einzelne Bilder, ähnlich wie Fig. 263, während die Flammen, deren Resonatoren nicht mitschwingen, im Spiegel als flüchtige Lichtbänder erscheinen.

ichter *S* versehen ist. Jeder einfache Ton versetzt die Flamme in Schwingungen, wenn er mit hinreichender Stärke in den Trichter und durch diesen die Kapsel eindringt; betrachtet man die Flamme im rotierenden Spiegel, erhält man ein Bild, wie Fig. 263a oder b. Dringen dagegen gleichzeitig mehrere Töne in das Rohr, so wird die Flamme von jedem Tone in Schwingung versetzt, und die Flammenbilder werden andere. Treten z. B. Grundton und Oktave in die Kapsel, so zeigt der Spiegel das Bild Fig. 265. Dasselbe besteht aus einer hohen Flamme, die schmäler ist, als wenn der Grundton allein tönt, und einer kleinen Flamme, welche regelmäßig abwechseln. Die Entstehung dieses Bildes ergibt sich leicht aus der Überlegung, daß jede Bewegung der Membran gegen die vordere Hälfte der Kapsel die Flamme aufflackern machen muß. Wenn man gleichzeitig Grundton und Oktave und Duodecime in die Kapsel eindringen läßt, so erhält man das Bild Fig. 266. Zwischen die Flammenbilder Fig. 265 tritt jedesmal noch eine kleinere Flamme. Das Flammenbild Fig. 266 bildet sich z. B., wenn man das obere Ende einer offenen Orgelpfeife nahe an die Öffnung des Schalltrichters *S* hält und nicht zu stark in die Pfeife bläst; wenn man dagegen stärker in die Pfeife hinein bläst, wodurch neben dem Grundton auch der Oktave die Duodecime deutlich hörbar wird, so erhält man das Bild Fig. 266.

Fig. 266.



Hat man auf diese Weise die Flammenbilder der Klänge einmal studiert, erkennt man leicht, wie man dieses Mittel zur Analyse eines Klanges nutzen kann; man hat das durch ihn erzeugte Flammenbild mit dem durch ein zusammengesetztes einfache Töne zu vergleichen, um zu erkennen, welche Töne den Klang zusammensetzen.

Schließlich kann man auch die auf einem Monochord oder in einem Clavier oder überhaupt auf einem Resonanzboden ausgespannten Saiten benutzen, um die in einem Klange vorhandenen Einzeltöne zu bestimmen, da die Saiten sehr leicht und stark miltönen. Da indes die Saiten nicht nur ihren Grundton, sondern auch durch jeden ihrer harmonischen Ober- und Unter- in Schwingung versetzt werden, so läßt sich mit Hilfe derselben nicht direkt über die einzelnen Töne entscheiden, welche in der ganzen Klangmasse vorhanden sind.

Mit Hilfe des einen oder des andern Verfahrens kann man nun zunächst leicht den Nachweis führen, daß in einer zusammengesetzten Schwingung die einfachen Schwingungen als solche angenommen werden müssen, da also die einzelnen Partialtöne eine objektive Existenz haben, indem sie miltönen bewirken, also ihre Schwingungen an andere Körper abgeben. In der That alle Töne, die in einem Klange vorhanden sind, in dieser

Weise existieren, kann man mit Hilfe von gezupften Saiten zeigen. Wie wir im § 145 bemerkten, treten in gezupften oder geschlagenen Saiten sehr verschiedene Schwingungen auf, je nach der Stelle, die gezupft oder geschlagen wird. Alle die Schwingungszahlen fehlen, welche an der geschlagenen Stelle einen Knotenpunkt haben, alle übrigen treten auf. Wird eine Saite in der Mitte geschlagen, so fehlen die Töne 2, 4, 8 u. s. f. Die Töne 3, 5, 7 etc. und ihre Vielfachen treten auf, das heißt die zusammengesetzten Schwingungen der Saite kann man als aus diesen Schwingungen zusammengesetzt betrachten. Dafs in der That diese zusammengesetzten Schwingungen bei ihrer Ausbreitung in der Luft sich wirklich in die in ihnen vorhandenen einfachen Schwingungen zerlegen, das beweisen die Versuche über das Mittönen, denn die denselben entsprechenden Membranen oder Resonatoren werden in Schwingung versetzt.

Wie nun zuerst Brandt¹⁾ und dann im Verlaufe seiner Untersuchung Helmholtz²⁾ nachgewiesen haben, nimmt das einigermassen geübte Ohr bei dahin gerichteter Aufmerksamkeit diese einzelnen Töne in einer Klangmasse auch ohne Hilfe der Resonatoren wahr, so dafs damit das Ohmische Gesetz vollständig bewiesen ist. Ist man in solchen Versuchen nicht geübt, so kann man, wie Helmholtz angibt, das Ohr zunächst mit Resonatoren unterstützen.

Man schlage z. B. eine Saite, die c gibt, aufserhalb der Mitte, etwa in $\frac{1}{3}$ der Saitenlänge, so liefert dieselbe aufser dem Grundton c auch c_1 , c_2 etc. Nimmt man den Ton c , nicht sofort wahr, so halte man einen auf c_1 abgestimmten Resonator an das Ohr, und man hört den Ton sehr laut. Ist so das Ohr auf diesen Ton aufmerksam geworden, so hört es denselben auch nach Entfernung des Resonators, allerdings schwächer aber unzweifelhaft deutlich.

Da das Ohr in einer zusammengesetzten Schwingung in der That die einzelnen Töne wahrnimmt, so wird der Schluss berechtigt sein, dafs es in der That die verschiedenen und verschiedenen starken Obertöne, die den Grundton begleiten, sind, welche die Klangfarbe eines Tones ausmachen. Die von den musikalischen Instrumenten gelieferten Klänge sind deshalb keine einfachen Töne, diese können keine verschiedene Klangfarbe haben, sondern Zusammenklänge verschiedener Töne. Helmholtz bezeichnete dieselben daher auch nicht als Töne, sondern als Klänge, indem er das Wort Ton für die durch einfache Schwingungen bewirkte Empfindung wählte. Die Töne unterscheiden sich demnach nur durch ihre Höhe, die Klänge, deren Höhe durch die des Grundtones bezeichnet wird, durch die von ihrer Zusammensetzung abhängige Klangfarbe.

Dafs dieser Schluss über das Wesentliche der musikalischen Klangfarbe berechtigt ist, hat Helmholtz³⁾ schliesslich dadurch nachgewiesen, dafs er aus einfachen Tönen die Klänge zusammensetzte, nachdem er vorher die in denselben vorhandenen Teiltöne erkannt hatte. Wir werden auf die wichtigsten Versuche, die künstliche Zusammensetzung der Vokale, in einem spätern Paragraphen zu sprechen kommen, hier erwähnen wir nur einen

¹⁾ Brandt, Poggend. Ann. Bd. CXII.

²⁾ Helmholtz, Tonempfindungen. Abschnitt IV.

³⁾ Helmholtz, Tonempfindungen. p. 109 ff.

dahin zielenden Versuch. Bläst man eine Glasflasche an, welche in der Weise wie Fig. 267 eingerichtet ist, welche also mit einem Anblaserohr, am besten aus Guttapercha, dessen am Halse der Flasche liegende Mündung abgeplattet ist, versehen ist, indem man das Rohr mit einem Blasebalge in Verbindung setzt, so erhält man einen fast einfachen Ton, der in seinem Klange einem dumpfen *U* sehr ähnlich ist.

Stimmt man nun zwei solcher Flaschen so ab, daß die eine genau die Oktave der andern gibt, so liefern sie zusammen angeblasen einen Klang, dessen Höhe der des Grundtones entspricht, dessen Farbe aber derjenigen des Vokales *O* gleich ist. Läßt man nun abwechselnd bald die eine, bald beide Flaschen tönen, so kann man in dem Zusammenklange zunächst die einzelnen Töne leicht unterscheiden, sehr bald aber bei dauerndem Zusammenklange verschmelzen sie sich zu dem Klange *O*. Wenn man erst den höhern Ton angegeben hat, dann den tiefern hinzukommen läßt, hört man anfangs den höhern Ton noch in seiner ganzen Stärke weiter, daneben klingt der tiefe in seiner natürlichen Klangfarbe wie ein *U*. Allmählig aber, wie sich die Erinnerung des isoliert gehörten Tones verliert, wird jener immer undeutlicher und dabei auch schwächer, während der tiefe Ton scheinbar stärker wird und wie *O* lautet.

Gerade diese Verschmelzung eines Obertones mit einem Grundtone unter Änderung der Klangfarbe beweist, daß der Klang wesentlich durch die Obertöne bedingt ist.

Wie wir im § 131 nachwiesen, hängt das Gesetz der Schwingungen in einer schwingenden Punktreihe nicht allein ab von der Periode der Teilschwingungen, sondern auch von der Phase, mit welcher die Schwingungen zusammentreten, es wäre deshalb auch möglich, daß die Phase der komponierenden Teiltöne auf die Farbe eines Klanges von Einfluß ist. Helmholtz¹⁾ hat gezeigt, daß das nicht der Fall ist. Er benutzte dazu die Zusammensetzung von Klängen mit Hilfe von Stimmgabeltönen. Zwei im Verhältnis von Grundton und Oktave stehende Stimmgabeln geben zusammen zum Tönen gebracht und durch Resonanzröhren verstärkt (siehe § 167) einen dem *O* sehr ähnlichen Klang. Verstimmt man die eine Stimmgabel nur sehr wenig, so kommen die einzelnen Stöße nach und nach in immer anderer Phase zusammen, wie wir bereits § 145 sahen. Die Klangfarbe ändert sich indes damit durchaus nicht. Dadurch ist dann bewiesen, daß die Klangfarbe des musikalischen Teils eines Klanges nur abhängt von

Fig. 267.



¹⁾ Helmholtz, Tonempfindungen. p. 190 ff.

der Zahl und Stärke der Partialtöne, nicht von den Phasenunterschieden derselben. Wir sagen ausdrücklich, des musikalischen Theiles des Klanges, denn außerdem wird auch die Klangfarbe mit bestimmt durch die bei der Klangerzeugung eintretenden Geräusche, auf welche wir im nächsten Paragraphen noch hinweisen werden.

§ 161.

Klänge durch Schwingungen fester Körper. Wir sahen im zweiten Kapitel des vorigen Abschnitts, daß die festen Körper in drei verschiedene Schwingungsarten versetzt werden können, in longitudinale, in transversale und in drehende, entsprechend den verschiedenen Richtungen, nach denen sich die Elasticität äußert. Alle diese Schwingungen bringen Töne oder vielmehr, da sie in den seltensten Fällen einfache sind, Klänge hervor, indem durch sie die umgebende Luft in Schwingungen versetzt und durch diese der Ton bis zu unserm Ohre fortgepflanzt wird.

Als allgemeinen Ausdruck für die Schwingungszahl eines longitudinal schwingenden Stabes hatten wir

$$N = \frac{1}{A \cdot L} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}},$$

worin L die Länge, E den Elasticitätskoeffizienten in den Einheiten des absoluten Maßsystems, s die Dichtigkeit des Stabes und A eine von der Befestigungsweise und der Art des Streichens abhängige Konstante bedeutet.

Die Schwingungszahl und somit der Longitudinalton eines Stabes hängt also außer von der Materie des Stabes bei gleicher Befestigungsweise und gleichem Streichen nur von der Länge des Stabes ab; die Dicke oder der Querschnitt des Stabes haben auf die Höhe des Klanges keinen Einfluß.

Diesen Satz bestätigen schon die Versuche Chladni, welcher die longitudinalen Schwingungen der Stäbe und deren Töne untersuchte, bevor die Theorie dieser Bewegungen entwickelt war¹⁾.

Unter übrigens gleichen Umständen muß nach unserem Ausdrucke die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von longitudinal schwingenden Stäben sich verhalten wie die Quadratwurzel aus dem Quotienten der Elasticität und der Dichtigkeit; auch dieses wird schon durch die Versuche Chladni bestätigt.

Chladni liefs mehrere zwei Fuß lange an beiden Ende freie Stäbe frei schwingen und erhielt als Töne:

Mit einem Stabe 15 lötigen Silbers . . .	d_4
„ „ „ von Kupfer . . .	g_4
„ „ „ von Eisen . . .	cis_5

Die Schwingungszahlen dieser Töne verhalten sich, diejenige des viergestrichenen c als Einheit gesetzt, wie

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} : \frac{4}{5},$$

oder diejenige des viergestrichenen d als Einheit gesetzt, wie

$$1 : \frac{4}{3} : \frac{5}{3},$$

¹⁾ Chladni, Akustik. p. 103—109.

er wenn wir die temperierten Töne wählen, wie

$$1 : 1,33484 : 1,88775.$$

Nach § 48 ist der Elasticitätskoefficient

$$\begin{aligned} \text{für Silber } E &= 7004,3 \cdot 10^8 \frac{G}{CS^2} s = 10,47 \\ \text{„ Kupfer } E &= 10319,1 \cdot 10^8 \text{ „ } s = 8,78 \\ \text{„ Eisen } E &= 20398,9 \cdot 10^8 \text{ „ } s = 7,74. \end{aligned}$$

Mit diesen Werten wird das Verhältniß der Schwingungszahlen

$$N_1 : N_2 : N_3 = 2587 : 3428 : 5133 = 1 : 1,326 : 1,985.$$

Die von Chladni beobachteten Töne entsprechen also der Theorie; die Abweichung selbst beim höchsten Tone beträgt nur etwas mehr als ein comma; Chladni selbst gibt aber an, der Ton sei nur annähernd *cis* gewesen. Indes ist die Übereinstimmung so groß, wie sie bei so hohen Tönen zu sein kann, wo geringe Höhenunterschiede nur sehr schwer wahrgenommen werden können.

Für die Bestimmung der Schwingungszahl longitudinal schwingender Stäbe hatten wir drei Fälle zu unterscheiden.

1) Der Stab ist an einem Ende ganz fest. Dann wird

$$N = \frac{2n-1}{4L} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Die Schwingungszahlen des Stabes verhalten sich wie 1 : 3 : 5 u. s. w.

Auch dieses bestätigen die Versuche Chladnis, der als Töne eines an einem Ende festen longitudinal schwingenden Stabes, den Grundton, den langsamsten Schwingungen als *c* angenommen, gibt

$$c \, g_1 \, e_4 \, b_2 - d_3.$$

Das negative Zeichen bei b_2 bedeutet, daß der Ton etwas tiefer war als b_2 , es ist eben der in der Tonleiter nicht vorkommende Ton 7 in der zehnthöhrn Oktave von *c*.

2) Der Stab ist an beiden Enden frei.

3) Der Stab ist an beiden Enden fest.

In beiden Fällen ist die Schwingungszahl

$$N = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Die möglichen Schwingungen sind 1, 2, 3, 4 . . sie verhalten sich wie Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Der Grundton bei dieser Bestimmungswise ist die Oktave des Tones, wenn der Stab an einem Ende fest ist. Dem entsprechend gibt auch Chladni als Töne an

$$c_1 \, c_2 \, g_2 \, c_3 \, e_3,$$

an der Grundton, der die Oktave des Grundtones im vorigen Falle bezeichnet wird.

Wir können nach unserer Formel auch den Ton berechnen, welchen Chladni an seinen Stäben fand und so eine neue Bestätigung unserer früheren Theorie erhalten. Indes können wir hier keine absolut genaue Übereinstimmung erwarten, da wir einmal nicht annehmen dürfen, daß Chladni's Längenbestimmung absolut genau ist, und da wir wissen, daß E sowohl wie s selbst für die gleichen Substanzen je nach ihrer Behandlungsweise verschiedene Werte haben können.

Chladni bestimmt die absolute Schwingungszahl des c_6 zu 4086 Schwingungen, also kleiner, wie es nach der jetzigen Stimmung ist. Der Wert von c_{is_6} ergibt sich darnach zu 4296 Schwingungen. Berechnen wir aber die Schwingungszahl für den eisernen Stab, so wird dieselbe, wenn wir den rheinischen Fuß, den Chladni als Längeneinheit zu Grunde legt, gleich $31,3^{\text{cm}}$ setzen,

$$N = \frac{513\,300}{125,2} = 4103.$$

Der von Chladni beobachtete Ton ist demnach nur um 1,04 gegen den von uns berechneten Ton zu hoch, eine Übereinstimmung, welche in Anbetracht der eben erwähnten Umstände fast vollkommen zu nennen ist.

Als allgemeinen Ausdruck für die Schwingungszahl transversal schwingender gespannter Saiten erhielten wir, mit Beibehaltung der frühern Zeichen (§ 140),

$$N = \frac{n}{2l} \cdot \sqrt{\frac{gP}{qs}}.$$

Es folgt daraus, die Schwingungszahl und somit die Tonhöhe von Saiten gleicher Länge ändert sich der Quadratwurzel der Spannung proportional und bei gleicher Spannung umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Gewichte der Längeneinheit der Saite. Die Erfahrung bestätigt dieses vollkommen, und in der praktischen Akustik werden gerade diese Sätze zur Regelung der Tonhöhe bei den Saiteninstrumenten angewandt.

So sind bei allen Streichinstrumenten die Saiten, welche die tiefern Töne geben sollen, dicker und weniger straff gespannt, und meist sind die tiefern Saiten, um ihr Gewicht zu vergrößern, mit einem feinen Drahte umwickelt. Bei allen diesen Instrumenten wird die Stimmung nur durch die Spannung der Saiten erhalten, welche an dem einen Ende befestigt sind und mit ihrem andern Ende in einen drehbaren Wirbel eingesteckt sind, durch dessen Drehung man die Spannung ändern kann. Gleiches ist bei den Klavieren der Fall, wo außerdem die Saiten noch eine verschiedene Länge haben. Bei den Streichinstrumenten werden die verschiedenen Töne ebenfalls durch Verkürzung der Saiten hervorgebracht, indem der Spieler die Saite an den betreffenden Punkten auf das Griffbrett niederdrückt.

Nach unserer Gleichung für die Schwingungszahl gespannter Saiten ist die Tonhöhe bei einer und derselben Saite der Länge des schwingenden Theiles umgekehrt proportional und die Saite zerlegt sich, wenn sie nicht ihrer ganzen Länge nach schwingt, in n schwingende Theile. Die Versuche von Chladni und G. Weber geben die Tonreihe einer gespannten Saite genau der Theorie gemäß. Setzen wir den Grundton der Saite gleich 1 und bezeichnen wir ihn mit c_{-1} , so ist nach Chladni die Reihe der Töne¹⁾:

¹⁾ Chladni a. a. O. p. 67.

1	2	3	4	5	6	7	8
c_{-1}	c	g	c_1	e_1	g_1	$b_1 - c_2$	
9	10	11	12	13	14	15	16
d_2	e_2	$f_2 + g_2$	$a_2 - b_2$	$h_2 - c_3$			

G. Weber¹⁾ geht bis zu einer Teilung der Saite in $\frac{1}{32}$, somit bis zum viergestrichenen c .

Weil man meist die Tonreihe nach Saitenlängen des Monochords bestimmt, findet man auch häufig die Töne anstatt durch die Schwingungszahlen durch die Länge der Saite für den entsprechenden Ton bestimmt; es ist klar, daß dann die den Ton bezeichnenden Zahlen einfach die reciproken Werte der im Früheren angewandten Zahlen sind, oder daß nach dieser Bezeichnungsweise werden

c	d	e	f	g	a	h	c_2
1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$

Die Klänge der Saiteninstrumente können, wie sich schon aus den Erfahrungen des § 145 ergibt, äußerst verschieden sein und auf dieser Verschiedenheit beruht auch die vielfache Anwendung der Saiteninstrumente in der Musik. Die musikalischen Saiteninstrumente können wir in zwei Gruppen teilen, in solche, deren Töne durch Zupfen oder Schlagen der Saiten erregt werden, wie Guitarre, Zither und besonders das Klavier, und solche, deren Töne durch Streichen mit dem Bogen erregt werden, die sämtlichen Streichinstrumente. Für die wichtigsten derselben hat Helmholtz²⁾ die Klänge ziemlich ausführlich untersucht, wir begnügen uns hier damit, als Ergänzung zur Besprechung der Saitenschwingungen des § 145 die von Helmholtz für das Klavier und die Violine erhaltenen Resultate mitzuteilen.

Wir erwähnten in § 145 bereits, daß die Stärke und Anzahl der in den zusammengesetzten vorhandenen Einzelschwingungen, also der im Saitenklänge vorhandenen Obertöne wesentlich abhängen von der Art und Stelle des Anschlages, sowie von der Dicke, Steifigkeit und Elasticität der Saite.

Was zunächst die Art des Anschlages betrifft, so ergibt sich aus Helmholtz Untersuchungen, daß die Zahl und Stärke der höhern Obertöne desto bedeutender wird, je mehr und schärfere Diskontinuitäten die Art der Bewegung zeigt. Wird die Saite gezupft, entfernt der Finger sie, ehe er sie losläßt, in ihrer ganzen Länge aus der Gleichgewichtslage, so entsteht eine Diskontinuität nur dadurch, daß die Saite an der Stelle, wo sie gezupft wird, eine mehr oder weniger scharfe Ecke bildet, schärfer, wenn sie wie bei der Zither mit einem Stift als wenn sie wie bei der Guitarre mit dem weichen runden Finger gerissen wird. Deshalb gibt die erste Art des Reißens auch einen schärferen Klang mit einer größern Menge klimpernder hoher Obertöne als im letztern; die Intensität des Grundtones ist aber immer größer als die jedes Obertones.

Wird die Saite mit einem scharfkantigen harten Hammer geschlagen, der sofort wieder abspringt, so wird nur der vom Schlage getroffene Punkt sofort in Bewegung gesetzt. Unmittelbar nach dem Schlage ist der übrige

¹⁾ *Bindseil*, Akustik. p. 110.

²⁾ *Helmholtz*, Tonempfindungen. p. 128 ff. und p. 536.

Teil der Saite noch in Ruhe, er gerät erst in Bewegung, indem die durch den Schlag erregte Welle auf der Saite hin und her läuft. Die Beschränkung der ursprünglichen Bewegung auf nur einen Punkt gibt der Saite die schärfste Diskontinuität, und deshalb viele und hohe Obertöne, deren Intensität zum Teil die des Grundtones übertrifft.

Ist der schlagende Hammer weich und elastisch, so hat die Bewegung Zeit, auf der Saite sich auszubreiten, ehe der Hammer wieder zurückspringt, und zugleich wird durch den Anschlag eines solchen Hammers der geschlagene Teil der Saite nicht ruckweise in Bewegung gesetzt, sondern seine Geschwindigkeit wächst allmählich und stetig mit dem Drucke des Hammers. Die Diskontinuität der Bewegung ist deshalb viel kleiner und dem entsprechend ist die Stärke der Obertöne gegen jene des Grundtones viel geringer.

Mit scharfem Metall gerissen oder geschlagen ist deshalb der Klang der Saite schärfer und leerer, indem die mit Leerheit bezeichnete Eigentümlichkeit des Klanges eben in der verhältnismäßigen Stärke der Obertöne gegen den Grundton begründet ist. Ist der Grundton kräftig gegen die Obertöne und sind besonders die höhern unpaarigen Töne schwach, so ist der Klang voll und harmonisch.

Bei den Klavieren wird deshalb, um dies zu erreichen, der Hammer mit einer dicken Lage stark geprefsten und dadurch elastisch gewordenen Filzes bedeckt, und gleichzeitig werden die für die tiefern Töne bestimmten Hämmer schwerer gemacht als die für die höhern Oktaven, damit erstere länger an der Saite haften als letztere. Denn einmal ist das längere Haften des Hammers in den tiefern Lagen zur relativen Verstärkung des Grundtones deshalb notwendig, weil die Schwingungsdauer desselben größer ist als in der höhern, dann aber auch, weil bei der stärkern Spannung der Saiten in den höhern Lagen die höhern Obertöne sich doch nicht so stark ausbilden.

Um bei den Klavieren die Klänge nicht allein voll, sondern auch weich zu machen, ist die Anschlagsstelle der Saiten $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{5}$ von dem einen Ende. Damit fallen die Töne 7 und 9, die ersten, welche nicht in den Dreiklang hineingehören, und welche mit den andern keine konsonierenden Intervalle haben, aus der Reihe der Obertöne fort. Es treten dann nur die ersten sechs Töne auf, der fünfte und sechste indes schon sehr schwach.

Folgende kleine Tabelle gibt die Intensität der Partialtöne, von Helmholtz berechnet, wenn in $\frac{1}{4}$ der Saitenlänge der Ton in der über jeder Kolonne angegebenen Weise erregt wird.

Tabelle der Intensität der Partialtöne bei Saiten.

Ordnungszahl des Partialtones	Anschlag durch Reißsen	Anschlag durch einen elastischen Hammer, dessen Berührung dauert, in Bruchteilen der Schwingungsdauer des Grundtones			Anschlag mit einem ganz harten Hammer
		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	
1	100	100	100	100	100
2	81,2	99,7	189,4	249	324,7
3	56,1	8,9	100,9	242,9	504,9
4	31,6	2,3	17,3	118,9	504,9
5	13,0	1,2	0,0	26,1	324,7
6	2,8	0,01	0,5	1,3	100,0
7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0

Für das Klavier gelten die drei mittlern Kolumnen, und Helmholtz hat, daß die der mit $\frac{3}{4}$ überschriebenen Spalte entsprechende Kolumne in der Gegend des c_2 und noch höher hinauf gilt, daß indes in den viel höhern Lagen die Obertöne noch schwächer werden. In der eingestrichenen Oktave gilt die Kolumne $\frac{3}{10}$, in dieser ist also der erste Oberton schon intensiver als der Grundton, in den tiefern Lagen der kleinen, der großen und der Kontraoktave gilt die mit $\frac{3}{4}$ überschriebene Kolumne. Die Intensitätsverhältnisse können indes je nach der Güte und richtigen Stellung der Saiten beträchtlich schwanken.

Daß in den höhern Lagen die Obertöne so sehr weit zurücktreten, hat seinen Grund in der stärkern Spannung und der Steifigkeit der Klaviersaiten, denn bei steifen Saiten von einiger Dicke treten dieselben sehr schwach mehr hervor, da diese Saiten sich nicht leicht in so viele Unterabteilungen zerlegen, wie sie zu den hohen Obertönen erforderlich sind.

Daß der Klang der gestrichenen Saiten ein ganz anderer sein muß als jener der geschlagenen, ergibt sich nach den ausführlichen Besprechungen der Schwingungsform von Violinsaiten im § 145 unmittelbar. In den gestrichenen Saiten ist der Grundton stärker als jeder der Obertöne, deshalb ist der Klang der Streichinstrumente auch ein viel vollerer als der des Klaviers. Gleichzeitig ist aber auch die Stärke der höhern Obertöne, bei den meisten Tönen der Violine schon von dem dritten an, beim Violoncell im fünften an relativ größer als beim Klavier, und deshalb ist der vollere Klang gleichzeitig ein schärferer. An welcher Stelle zwischen Steg und Griffbrett man streicht, ist auf den Klang nicht von wesentlichem Einfluß, wenn man dem Griffbrett nur nicht zu nahe kommt, die Stelle, an welcher man gewöhnlich streicht, liegt in etwa $\frac{1}{10}$ der Saitenlänge, rückt man bis zum Steg, so streicht man in $\frac{1}{2}$, und da dann der fünfte und sechste Oberton mehr oder weniger fehlen, so wird der Klang dumpfer.

Auf den Klang der Streichinstrumente hat die Art des Streichens einen wesentlichen Einfluß; jede Störung in der Bogenführung hat eine Diskontinuität in den Schwingungen und damit ein kratzendes Geräusch zur Folge. Deshalb hängt bei keinem Instrument die Fülle und Reinheit des Klanges sehr von der Geschicklichkeit des Spielers ab, als gerade bei den Streichinstrumenten. Wesentlich hängt dieselbe indes auch ab von der Güte des Instruments, dem Bau des Resonanzkastens, ein Umstand, auf den wir später noch zu sprechen kommen werden.

Für die transversalen Schwingungen elastischer Stäbe erhielten wir den Ausdruck

$$N = \frac{\pi^2 \pi r}{4 l^3} \sqrt{\frac{E}{s}}.$$

Die Schwingungszahlen verhalten sich demnach bei cylindrischen Stäben direkt wie der Radius und umgekehrt wie die Quadrate der Längen derselben. In demselben Verhältnisse müssen daher die Tonhöhen stehen.

Die Versuche von Savart über die absoluten Schwingungszahlen cylindrischer Stäbe haben wir bereits angegeben. Ein Messingstab von 0^m,103 Länge und 2^{mm},4 Radius vollführte 1422 Schwingungen, ergab also einen Ton, welcher etwas höher liegt als das dreigestrichene f ; ein eiserne Stab von gleicher Länge und 1^{mm},7 Radius ergab eine

etwas höher lag als das dreigestrichene c . Die Übereinstimmung der Zahlen mit der Theorie haben wir erwähnt.

Die Töne, welche ein schwingender Stab überhaupt geben kann, fand wir verschieden, je nachdem der Stab verschieden befestigt ist; wir unterscheiden damals vier Fälle, nämlich:

1) Ein Ende des Stabes ist frei, das andere ist ganz fest. Die natürlichen Schwingungszahlen werden, für die langsamsten, wenn sie der Reihe angehört, n gleich 1 gesetzt:

$$N = \frac{(2n - 1)^2}{4}.$$

Die Töne müssen sich demnach bei einem und demselben Stabe verhalten wie

$$1 : 9 : 25 : 49 : 81,$$

wobei aber, wie wir damals erwähnten, die ersten drei Töne gegen folgenden zu hoch werden.

Chladni¹⁾ erhielt als zweiten Ton einen um zwei Oktaven und eine übermäßige Quint höhern Ton als den Grundton, als dritten einen um eine Oktave und eine verminderte Quint höhern als den zweiten, der vierte war dann wieder nahe um eine Oktave, der fünfte wieder um eine Sekunde höher. Diese Töne verhalten sich von dem Contra C als Grundton so, rechnet wie

$$c_{-2}, gis, d_2, d_3 -, b_3, f_4 +,$$

deren Schwingungsverhältnisse sind

$$\begin{array}{cccccc} 1 & \frac{25}{4} & \frac{144}{8} & \frac{288}{8} & \frac{288}{5} & \frac{256}{3} \\ 1 & 6\frac{1}{4} & 18 & 36 & 57\frac{3}{5} & 85\frac{1}{3}. \end{array}$$

Diese Zahlen sind aber fast genau gleich der im § 142 p. 645 für den gleichen Fall aufgefundenen Zahlenreihe. Wir können dieselben schreiben

$$1, 0,700 \cdot 9, 0,702 \cdot 25, 0,703 \cdot 49, 0,705 \cdot 81, 0,705 \cdot 121,$$

von der dritten an gerechnet verhalten sich also die Schwingungszahlen genau wie die Quadrate der ungeraden Zahlen.

2) Beide Enden des Stabes sind frei oder ganz fest. Die Zahl der Schwingungen ist

$$N = \frac{(2n + 1)^2}{4}.$$

Die Töne werden demnach sich verhalten müssen bei gleicher Stablänge wie die Quadrate der ungeraden Zahlen von 3 an, wie

$$9 : 25 : 49 \dots$$

Besitzt der Stab demnach die gleiche Länge und sonstige gleiche Beschaffenheit wie in dem vorigen Falle, so muß der tiefste Ton mit dem zweiten bei der vorigen Befestigungsweise zusammenfallen. Das ergab auch die Versuche Chladnis, der als Töne in diesem Falle angibt

$$gis, d_2, d_3 -, b_3, f_4 +,$$

¹⁾ Chladni, Akustik, p. 94—103.

, wie wir soeben nachwiesen, Schwingungszahlen besitzen, welche in den geforderten Verhältnisse stehen.

3) Das eine Ende des Stabes ist aufgelegt, das andere ganz fest oder frei. In beiden Fällen ist die Schwingungszahl

$$N = \frac{(4n + 1)^2}{16}.$$

Das Verhältnis zu einander ist demnach

$$25 : 81 : 169 \dots$$

Der erste Ton muß um zwei Oktaven tiefer sein als der dritte Ton im ersten Falle, wo ein Ende fest, das andere frei ist, wenn der Stab dieselbe Länge und sonstige gleiche Beschaffenheit hat, da wir hier im Nenner die Zahl 4 haben.

Nach der Angabe Chladni sind die Töne des Stabes

$$d, b_1 +, h_2 -, gis_3, dis_4, a_4,$$

man sieht, wie die beiden ersten Töne dem dritten und fünften Tone des ersten Falles entsprechen, jedoch um zwei Oktaven tiefer sind. Eine Bezeichnung der folgenden Schwingungszahlen weist auch für diese das gedachte Verhältnis nach.

4) Der vierte Fall ist der einfachste, wenn beide Enden nur angestemmt sind; der Stab schwingt entweder seiner ganzen Länge nach, oder teilt sich in zwei Teile, die Schwingungszahl ist demnach

$$N = n^2.$$

Die Schwingungszahlen und somit die Tonhöhen müssen sich verhalten wie

$$1, 4, 9, 16 \dots$$

Zu der ersten Schwingungsart, wo das eine Ende fest, das andere frei ist, würden sich die Schwingungszahlen des tiefsten Tones, der $n = 1$ entspricht, verhalten wie $1 : \frac{1}{4}$, wenn im ersten Falle der tiefste Ton der Schwingungsreihe angehörte. Wir sahen aber, daß im ersten Falle der erste Ton nicht der Schwingungszahl $\frac{1}{4}$ entspricht, sondern dem Quadrate 0,59686, oder nahezu 0,36; die Tonhöhe des tiefsten Tones bei dieser Festigungsweise muß sich daher zu der des ersten Tones im ersten Falle verhalten wie $1 : 0,36$, wie $\frac{25}{9}$. Bezeichnen wir demnach den Grundton im ersten Falle mit c_{-2} , so muß der Ton jetzt fis_{-1} die übermäßige Quart der nächsthöheren Oktave werden,

Chladni bestimmte ohne Kenntnis der Theorie die gehörten Töne im Verhältnis zum Grundtone c_{-2} im ersten Falle als

$$\begin{array}{cccccc} fis_{-1} & fis_1 & gis_2 & fis_3 & d_4 & gis_4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36, \end{array}$$

Die Töne verhalten sich demnach wie die Quadrate der natürlichen Zahlen und sind um zwei Oktaven höher als die entsprechenden Töne bei der ersten Festigungsart, denn dort hatten wir den Schwingungsverhältnissen 9 und entsprechend die Töne gis und d_2 .

Die Töne elastischer Stäbe werden selten in der Musik angewandt; es ist außer den später zu betrachtenden Zungenpfeifen nur einige wenige,

in der Orchestermusik jedoch nicht gebräuchliche Instrumente, deren Töne durch transversale Schwingungen elastischer Stäbe erzeugt werden. Einen praktischen Gebrauch von den Schwingungen an einem Ende fester, am andern freier Stäbe macht man in der Eisenvioline, welche aus eisernen Stiften besteht, die in einem halbkreisförmigen Steg auf einem Resonanzboden eingeschlagen sind und mit dem Violinbogen gestrichen werden. An beiden Enden freie Stäbe läßt man in der sogenannten Strohfiedel schwingen. Dieselbe besteht aus Stäben oder schmalen Streifen von Holz, Glas oder Stahl, die an ihren beiden Schwingungsknoten, welche bei dem tiefsten Tone auftreten, auf zusammengedrehtes Stroh oder andere weiche Unterlagen gelegt und mittels zweier Klöppel angeschlagen werden. In der Mozartschen Oper „Die Zauberflöte“ wird gewöhnlich ein solches Instrument als Glockenspiel des Papageno angewandt¹⁾.

Die Töne schwingender Platten und Glocken finden in der Musik ebenfalls nur wenig Anwendung; die Töne schwingender Platten werden neuerdings bei der Militärmusik gebraucht, indem eine Anzahl kleiner Stahlplatten, auf einem Gestell in ihrer Mitte befestigt, mit einem elastischen Hammer geschlagen werden; die gespannten Membranen bei den Pauken und Trommeln. In allen diesen Fällen wird nur der Grundton dieser Instrumente benutzt, der bei einfachen Schlägen entsteht.

Die Töne der Platten hat Chladni²⁾ sehr ausführlich untersucht und gefunden, daß jedem andern Ton eine andere Teilungsart der Platte entspricht, nicht aber jeder andern Teilungsart auch ein anderer Ton, oder zwei verschiedene Töne geben nie dieselbe Klangfigur, einem Tone können aber mehrere Klangfiguren zukommen. Wir begnügen uns hier einige der Chladnischen Angaben mitzuteilen. Bei einer kreisförmigen Scheibe fand er den tiefsten Ton, wenn die Figur aus zwei sich kreuzenden Durchmessern besteht. Nannte er den Ton c_{-1} , so ergab die aus drei sich schneidenden Durchmessern bestehende Figur den um eine Oktave und eine Sekunde höhern Ton d , die aus vier sich schneidenden Durchmessern bestehende e , also die dritte Oktave des ersten Tones. Bei einem Kreise (Fig. 231 γ) gab die Scheibe gis_{-1} , der Ton war eine übermäßige Quint höher als der Grundton (Fig. 231 δ), zwei Kreise gaben $gis_1 +$, einen um zwei Oktaven höhern Ton. Ein Kreis und ein Durchmesser (Fig. 231 ϵ) gab b , ein Kreis und das Kreuz (Fig. 231 ζ) g_1 ; zwei Kreise und ein Durchmesser oder die gleichbedeutende Figur 231 η gab $e_2 +$ und die Figur 231 θ , die mit zwei Kreisen und zwei Durchmessern gleichwertig ist, gab b_2 .

Wir haben diese Töne in ihren Schwingungszahlen bereits mit den aus der Theorie Kirchhoffs sich ergebenden im § 143 zusammengestellt, auch dort gingen wir wie hier von der zwei Durchmessern entsprechenden Schwingungszahl als 1 aus.

Die Folge der Töne war eine andere bei quadratischen Scheiben. Auch für diese entwirft Chladni eine vollständige Tabelle der gehörten Töne. Das auf den Quadratseiten senkrechte Kreuz gibt den tiefsten Ton, den die transversal schwingende Scheibe überhaupt geben kann. Das aus den Diagonalen bestehende Kreuz gibt die Quint des Tones; war der erstere g_{-1} ,

¹⁾ Chladni, Akustik, p. 98.

²⁾ Chladni a. a. O. p. 117 ff.

so wird dieser Ton d . Fig. 232 β , zwei Linien parallel einer Seite, eine Linie zu diesen senkrecht gibt den Ton h , nach beiden Richtungen zwei Linien, Fig. 232 γ gibt den Ton b_1 —. Die Fig. 232 ε gibt den Ton $g_{s_1} +$ und Fig. 232 ζ die höhere Oktave des vorigen $g_{s_2} +$. Fig. 232 η entsprach dem Tone c_{s_3} und Fig. 232 ϑ der tiefern Oktave des letztern Tones.

Die Unbrauchbarkeit der durch Schwingungen von Stäben und Platten erzeugten Klänge für die künstlerische Musik leuchtet nach den Bestimmungen der Obertöne derselben unmittelbar ein; die Obertöne sind fast sämtlich unharmonisch zum Grundton, sie müssen deshalb die Accorde, in welchen die Klänge gebraucht werden, dissonierend machen, oder man muß dieselben so anwenden, daß die Obertöne nicht auftreten. Letzteres geschieht bei der Pauke durch die Verbindung der Membran mit einem größern Luftraum, indem dieselbe über einen Kessel ausgespannt wird. Damit erhält dann der Klang das Dampfe eines einfachen Tones.

Zur Erzeugung eines einfachen Tones sind deshalb die Schwingungen von Stäben, wie die der Stimmgabel sehr geeignet; Helmholtz hat die Stimmgabeln, verbunden mit einem Luftraum, deshalb vorzugsweise zu diesem Zwecke verwandt, besonders weil man in dieser Weise am leichtesten auch alle Nebengeräusche vermeiden kann.

Schließlich sind unter den Tönen der festen Körper noch die durch drehende Schwingungen hervorgebrachten zu erwähnen. Wir erhielten als Ausdruck für die Schwingungszahl so bewegter Stäbe im § 144

$$N_1 = \frac{1}{4l} \cdot \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}}$$

und allgemein für alle möglichen Schwingungen

$$N = n \cdot N_1,$$

wenn N_1 die langsamsten Schwingungen bedeutet. Wie wir ferner sahen, sind auch hier wieder die verschiedenen Befestigungsweisen der Stäbe in Betracht zu ziehen. Obige Gleichung für N_1 gilt, wenn der Stab an einem Ende befestigt ist. In gleichem Falle erhalten wir für denselben Stab für den Longitudinalton

$$N = \frac{1}{4l} \cdot \sqrt{\frac{E}{s}},$$

somit für das Verhältniß des Longitudinaltones und des Torsionstones

$$\frac{N_1}{N} = \frac{1}{\sqrt{2(1+\mu)}}.$$

Dieses Verhältniß gilt gleichzeitig für alle Töne und für alle Befestigungsweisen. Der Torsionston muß also jedenfalls tiefer sein als der Longitudinalton, um wie viel, das hängt von dem Werte von μ ab.

Die Beobachtungen von Chladni¹⁾ führten ihn zu dem Schlusse, daß der Ton der drehenden Schwingungen eines Stabes, „so weit ich es habe bemerken können“, um eine Quinte tiefer sei als der Ton bei entsprechenden longitudinalen Schwingungen. Nach Chladni wären also die drehenden Schwingungen genau $\frac{2}{3}$ der longitudinalen. Savart²⁾ fand, daß der Ton

¹⁾ Chladni, Akustik. p. 110.

²⁾ In Poisson, Mémoire sur les Mouvements des Corps élastiques. Mémoires de l'Acad. de France. Tome VIII. p. 456.

bei den drehenden Schwingungen nahezu eine Sexte tiefer war als bei den longitudinalen, oder dafs

$$N = 0,6000 N'.$$

Wertheim¹⁾ fand den Longitudinalton um etwas mehr als eine kleine Sext höher wie den Torsionston, $N' = 1,635 N$ im Mittel. Auf die Bedeutung dieses Tonverhältnisses zur Bestimmung des Wertes von μ haben wir schon hingewiesen.

Die Torsionstöne werden in der Musik niemals angewandt, sie bieten daher nur ein theoretisches Interesse.

§ 162.

Töne durch Schwingungen luftförmiger Körper. Eine Art Ton-erzeugung durch Schwingungen luftförmiger oder flüssiger Körper haben wir bei Betrachtung der Sirene kennen gelernt. Von viel höherer Bedeutung sind aber die Töne, welche durch stehende Schwingungen von Luftsäulen erregt werden. Die größte Zahl der Blasinstrumente und die meisten Register der Orgel erzeugen ihre Töne auf diese Weise. Als Typus der Blasinstrumente können wir die Orgelpfeifen betrachten und an diesen die Bildung und die Reihe der Töne untersuchen.



Die Orgelpfeifen zerfallen in zwei Klassen, die Labialpfeifen und die Zungenpfeifen. In ersteren wird die schwingende Bewegung nur durch einen Luftstrom bewirkt ohne Zuhilfenahme eines festen Körpers, der Ton ist daher nur von der schwingenden Luftsäule abhängig; letztere sind eine Kombination elastischer Streifen und schwingender Luftsäulen, ihr Ton wird durch beide Schwingungsarten bedingt; wir werden sie demnächst besonders betrachten.

Die Labialpfeifen (Fig. 268 und 269) bestehen aus einem Fusse *a*, welcher auf die Mündung eines Windkastens gesetzt wird und durch welchen der Luftstrom in den Raum *b* unter der Bodenplatte der Röhre eintritt. Die Bodenplatte läßt an der Seitenwand einen Spalt, durch welchen der Luftstrom austritt, um sich an der obern Lippe *l*, welche die in der Seitenwand gelassene Mundspalte *lm* nach oben begrenzt, zu teilen. Durch den teilweise in die Röhre dringenden Luftstrom wird nun die in der Röhre zunächst über der Mundspalte befindliche Luft nach oben getrieben und verdichtet. Diese Verdichtung bewirkt dann, dafs die Luft nicht mehr

¹⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. L. p. 262.

in die Röhre eindringt, sondern nur vorbeistreicht, dadurch dehnt sich die vorher verdichtete Luft wieder aus und kehrt nach unten zurück, worauf dann neue Luft in die Röhre dringt und eine neue Verdichtung veranlaßt. Die Luft erhält also zunächst an der Mundspalte eine hin und her gehende Bewegung. Diese pflanzt sich in der Luftsäule der Röhre fort und wird an der obern Grenze reflektiert. Durch diese in entgegengesetzter Richtung in der Röhre sich fortpflanzenden Bewegungen wird die Luftsäule der Röhre in stehende Schwingungen versetzt und gibt einen Ton, der verschieden ist nach der Länge der Röhre und nach der Art des Verschlusses an der obern Grenze¹⁾.

Die Schwingungen der Luft in der Röhre R sind longitudinale Schwingungen; ist die Pfeife gedeckt (Fig. 269), so tritt an der obern Grenze eine Reflexion derselben mit Änderung des Vorzeichens ein, der ankommende Wellenberg wird als Wellenthal reflektiert und das dem ankommenden Berge folgende Wellenthal als Wellenberg. Gerade wie bei den longitudinal schwingenden, an einem Ende festen, am andern Ende freien Stäben wird daher die ganze Luftsäule zugleich hin und her schwingen können, wenn die Impulse an der Lippe sich so folgen oder die Schwingungsdauer T so ist, daß der Wellenberg bis zur Wand sich fortgepflanzt hat, während die Luftschicht bei $l \frac{1}{2}$ Schwingung zurückgelegt hat. Es entsteht dann nach § 147 eine stehende Welle, deren Länge gleich ist dem Doppelten der Röhrenlänge. Da die stehende Welle halb so lang ist als eine gleichzeitig schwingende fortschreitende Welle, so ist die Länge der Pfeife gleich einem Viertel der gleichzeitig schwingenden fortschreitenden Welle. Bezeichnen wir daher die Länge der Röhre mit l , so wird die Schwingungsdauer dieser Welle

$$T = 4l \cdot \sqrt{\frac{d}{c}},$$

oder wenn wir nach § 146 die Werte für d und c einführen,

$$T = 4l \cdot \sqrt{\frac{s}{H\sigma g k}},$$

worin H die Höhe des Barometers in Centimetern, σ die Dichtigkeit des Quecksilbers, s die dem Drucke $H\sigma g$ entsprechende Dichtigkeit der Luft und $k = 1,405$ den konstanten Koeffizienten bedeutet, mit dem wir den Quotienten $\frac{c}{d}$ multiplicieren mußten, um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung zu erhalten.

Für die Schwingungszahl erhalten wir demnach

$$N = \frac{1}{4l} \cdot \sqrt{\frac{H\sigma g}{s}} \cdot k = \frac{c}{4l}.$$

Da das Labialende der Röhre die Stelle ist, wo die Bewegung erzeugt wird, so kann, da an dem gedeckten Ende immer ein Schwingungsknoten entstehen muß, in derselben keine stehende Schwingung b
Länge gleich ist der Länge der Röhre, indem dann

¹⁾ Über die Erregung der Schwingungen in
Poggend. Ann. Bd. CLII, *Strouhal*, Wien

die reflektierte Bewegung die neu erregte vernichten würde. Lassen wir durch stärkeres Blasen in dem Fusse der Röhre die Impulse bei ∞ rasch auf einander folgen, so wird keine stehende Schwingung entstehen können, wenn sich die Bewegung bis zur obern Wand fortgepflanzt hat, während die erste Schicht eine halbe Schwingung zurückgelegt hat, wenn sich also zugleich von der Wand und von dem Labium Wellenthäler oder Wellenberge in der Röhre fortpflanzen, da dann eine stehende Welle sich bilden würde von der Länge der Röhre, an dem Labium somit ein Schwingungsknoten, ein Ort immerwährender Ruhe entstünde.

Folgen sich aber die Impulse so rasch auf einander, daß die schwingende Bewegung erst dann den Boden der Röhre erreicht hat, wenn die erste Schicht $\frac{3}{4}$ ihrer Schwingung zurückgelegt hat, so daß also zugleich von der festen Wand ein Wellenberg, von dem Labium die zweite Hälfte eines Wellenthals sich fortpflanzt, so bilden sich stehende Wellen, deren Länge $\frac{3}{2}$ von der Röhrenlänge betragen, in der Röhre bildet sich $\frac{1}{2}$ der Länge vom Labium entfernt ein Schwingungsknoten und an dem Labium befindet sich die Mitte einer stehenden Welle, ein Schwingungsmaximum. Die Schwingungsdauer dieser Welle wird

$$T = \frac{3}{2} l \cdot \frac{1}{c}$$

und die Schwingungszahl

$$N = 3 \cdot \frac{c}{4l}.$$

Weiter können Schwingungen in der Röhre stehende werden, deren Wellenlänge $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{9}{2}$ von der Länge der Röhre beträgt, aus denen also durch die Interferenz der eintretenden und der reflektierten Bewegung stehende Wellen von der Länge

$$\frac{5}{2} l, \frac{7}{2} l, \frac{9}{2} l \dots$$

entstehen (§ 138). Die Schwingungszahlen dieser Wellen sind

$$N = 5 \cdot \frac{c}{4l}, 7 \cdot \frac{c}{4l}, 9 \cdot \frac{c}{4l},$$

oder allgemein, es können sich in der Röhre stehende Wellen bilden mit der Schwingungszahl

$$N = (2n - 1) \cdot \frac{c}{4l},$$

worin n jede Zahl der natürlichen Zahlenreihe bedeuten kann.

Ist somit der Grundton der Röhre c_{-1} , so sind die Töne, welche wir mit dieser Röhre erhalten können,

$$\begin{array}{ccccccc} c_{-1} & g & e_1 & b_1 & - & d_2 & \\ 1 & 3 & 5 & 7 & & 9. & \end{array}$$

Man kann sich leicht von der Richtigkeit dieser Folgerungen überzeugen. Denn bläst man eine gedeckte Pfeife nur schwach an, so erhält man den tiefsten Ton, den sie geben kann, bläst man stärker, so erhält man die Quint der nächsthöheren Oktave, weiter die Terz der folgenden Oktave u. s. f., wie es die Entwicklung der Schwingungsgesetze verlangt.

Die Grundtöne, welche von jeder langen Pfeife gegeben können, hängen von der Länge der Pfeife ab, und zwar sind nach den obigen Rechnungen

sowohl, wie nach der Erfahrung die Schwingungszahlen der Länge der Pfeife umgekehrt proportional. Man kann daher leicht durch Herstellen einer Pfeifenreihe von verschiedener Länge sich die ganze Tonleiter mit allen ihren Tönen verschaffen.

Indes findet man, daß in diesem Falle sich die Töne nicht genau umgekehrt wie die Längen der Pfeifen verhalten, daß je nach der Gestalt und Größe des Mundlochs und des Querschnittes der Pfeife die Töne mehr oder weniger von der Theorie abweichen. Noch deutlicher tritt das hervor, wenn man den Ton theoretisch berechnet, den die Pfeife bei gegebener Länge geben soll. Nach § 146 ist

$$\sqrt{\frac{H \sigma g}{s}} \cdot k = 33180^{\text{cm}} = 331,8^{\text{m}},$$

verausgesetzt, daß die Luft eine Temperatur von 0° hat.

Ist daher die Länge der Röhre in Metern angegeben $= l$, so soll der Ton der Röhre eine Schwingungszahl haben

$$N = \frac{331,8}{4l}.$$

Der Versuch gibt aber stets einen etwas tiefern Ton, dessen Schwingungszahl

$$N = \frac{331,8}{4(l+x)}.$$

Liscovius¹⁾ hat nachgewiesen, daß unter übrigen gleichen Umständen die Vertiefung des Tones mit der Weite der Röhre zunimmt, und Wertheim²⁾ hat gefunden, daß die Größe x bei gleichgearbeitetem Mundstücke dem Durchmesser der Pfeife proportional, bei gleichem Mundstück und gleichem Durchmesser aber von der Länge der Pfeife unabhängig sei. Der Einfluß auf die Tonhöhe ist daher um so größer, je kleiner l ist. Ferner von wesentlichem Einflusse Form und Größe des Mundstückes.

Diese Angaben über die Umstände, welche die Größe x beeinflussen, geben uns Aufschluß über die Ursache der Abweichung der beobachteten Töne von der Theorie.

Die theoretische Entwicklung setzt nämlich voraus, daß die ganze untere Schicht zugleich in Vibrationen gerathe, und sich die Schwingungen von Schicht zu Schicht fortpflanzen, ferner daß die Pfeife ihrem untern Ende ganz offen sei. Beides ist nicht der Fall, da der Luftstrom zunächst nur die in der Nähe der Lippe liegenden Teile der ersten Schicht nach oben hin treibt, und dann erst die entfernteren in Schwingung versetzt werden, und da andererseits die Mundspalte die Pfeife nicht nur teilweise öffnet. Durch letzteren Umstand treten auch am Boden der Pfeife partielle Reflexionen ein, welche bewirken, daß sich nicht gerade am Boden der Pfeife das Schwingungsmaximum bildet und daß deshalb der erste Knoten nicht genau um $\frac{1}{4} L$, wenn wir mit L die Wellenlänge der schwingenden Bewegung bezeichnen, von der Mundspalte entfernt ist, sondern um etwas weniger, oder mit anderen Worten, daß die beim Grunde sich bildende Welle nicht genau gleich dem Vierfachen der Pfeifenlänge ist, sondern etwas länger.

¹⁾ Liscovius, Poggend. Ann. Bd. LVIII und LX.

²⁾ Wertheim, Ann. de chim. et de phys. III. Série. Tome XXIII. Poggend. Ann. Bd. LXXVII.

Mit dieser Entwicklung stimmen die Angaben von Wertheim über die Gröfse x vollkommen überein, denn die einzige Störung liegt sonach in der Anwesenheit des Bodens; es mufs daher bei gleichen sonstigen Verhältnissen x von der Länge der Pfeife unabhängig sein, ferner aber mufs x um so gröfser sein, je gröfser der Querschnitt der Pfeife ist; denn da das Mundloch immer nur an der einen Seite der Pfeife ist, wird auch die Pfeife an der untern Seite um so weniger offen, je gröfser der Querschnitt der Pfeife ist. Je vollkommener aber das Mundloch ist, um so mehr mufs auch die Störung zurtücktreten.

Man kann sich auch durch direkte Beobachtung von der Richtigkeit dieser Erklärung überzeugen. Bringt man eine Pfeife zum Tönen, welche anstatt eines festen Deckels einen verschiebbaren Stempel hat, und erzeugt man z. B. den vierten Ton mit der Schwingungszahl

$$N = 7 \frac{c}{4(l+x)},$$

so erhält man daraus

$$\frac{1}{4}(l+x) = \frac{c}{4N}.$$

Bestimmt man nun auf irgend eine Weise die Schwingungszahl N des gehörten Tones, so kann man mit Hülfe des berechneten c die Gröfse

$$\frac{1}{4}(l+x) = \frac{1}{4}L$$

oder die Wellenlänge L des gehörten Tones erhalten. Die Länge der stehenden Wellen ist nun gleich $\frac{1}{2}L$ oder

$$\frac{1}{2}L = \frac{3}{4}(l+x).$$

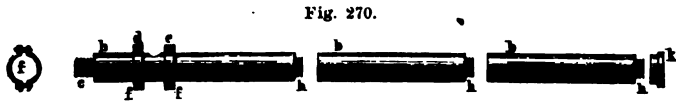
Dieser Ton ist der vierte Ton der Röhre von der Länge l ; verkürzen wir die Röhre um $\frac{3}{4}(l+x)$ dadurch, dafs wir den Stempel tiefer in die Röhre einschieben, so erhalten wir eine Röhre, deren dritter Ton gleich dem vorigen vierten sein mufs, verkürzen wir nochmals um $\frac{3}{4}(l+x)$, so mufs jetzt der zweite, und verkürzen wir nochmals um $\frac{3}{4}(l+x)$, der Grundton mit dem fröhern übereinstimmen. Der Versuch zeigt dieses nun in der That, so dafs dadurch feststeht, die einzelnen Knoten stehen um $\frac{L}{2}$ von einander ab; der erste Knoten aber um weniger als $\frac{L}{4}$ von der Mundöffnung, die Wellenlänge des Grundtones ist also gröfser als die vierfache Länge der gedeckten Pfeife¹⁾.

Dulong²⁾ wandte dieses Verfahren an, um die Gröfse x experimentell zu bestimmen; er nahm eine Pfeife mit Stempel und erzeugte z. B. den vierten Ton; dann verschob er den Stempel, bis der dritte Ton gleich dem vorigen vierten Ton war und erhielt durch Messung der Verschiebung die Gröfse $l+x$ oder die Länge der den Ton erzeugenden stehenden Welle. Er benutzte diese Versuche, wie wir später sehen werden, um die Gröfse c durch Beobachtung zu erhalten.

¹⁾ Hopkins Transakt. of the Cambridge Philosophical Society. Vol. V Poggend. Ann. Bd. XLIV.

²⁾ Dulong, Annales de chim. et de phys. T. XLI. Poggend. Ann. Bd. IV

Wertheim¹⁾ wandte ein anderes Verfahren an, um die Größe x zu bestimmen. Er nahm cylindrische Pfeifen, die aus mehreren Stücken zusammengesetzt waren, welche mittels Schrauben an einander befestigt werden konnten (Fig 270). Der Deckel k war mit einem gleichen Schrauben-



gewinde versehen, um jedes Stück der Pfeife gedeckt machen zu können. Auf diese Weise konnte also Wertheim Pfeifen herstellen, welche bei genau gleicher Weite und gleichem Mundstück sich nur durch ihre Länge $L_1, L_2 \dots$ unterschieden.

Wurde nun die Pfeife bei einer Länge L_1 zum Tönen gebracht, so hatte der erste Ton eine Schwingungszahl N_1 und es war

$$N_1 = \frac{c}{4(L_1 + x)}.$$

Wurde die Pfeife nun durch Ansatz eines Stückes b auf die Länge L_2 gebracht und wieder der erste Ton erzeugt, so hatte dieser eine andere Schwingungszahl N_2 und es war

$$N_2 = \frac{c}{4(L_2 + x)};$$

aus diesen beiden Größen läßt sich x ohne Kenntnis von c direkt erhalten, denn daraus folgt

$$\begin{aligned} 4 N_1 (L_1 + x) &= 4 N_2 (L_2 + x) \\ x &= \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2}. \end{aligned}$$

Wertheim teilt in seiner Abhandlung eine Anzahl von solchen Werten x für verschiedene Pfeifen mit, wir lassen einige folgen, um die Bedeutung derselben zu überblicken.

Werte von x für verschiedene Pfeifen in Luft
von der Temperatur 11,5 Grad C.

Material der Pfeife		Durchmesser	Länge	Werte von x
		Millimeter	Millimeter	Millimeter
Cylindrische Pfeifen von	Blei	20	62	30,7
	—	24	107	34,8
	—	20	120	27,1
	—	42	120	68,1
	Messing	40	298	60,0
	—	20	281	28,5
	—	10	288	17,0
	Glas	20	256	32,0
	Zink	50	668	66,1
	Glas	17	875	40,0

¹⁾ Wertheim a. a. O.

Vorstehende Tabelle läßt erkennen, daß der Wert der Berichtigung von der Weite der Röhre abhängig ist, daß aber auch bei Röhren gleicher Weite der Wert von x verschieden sein kann, infolge verschiedener Weite des Mundstückes.

In einer weiteren Untersuchung hat deshalb Wertheim¹⁾ die Abhängigkeit von x von diesen Umständen zu bestimmen versucht und gelangt zu folgender Beziehung für x . Nennen wir die Breite der Röhre B , die Dicke derselben D und den Querschnitt $B \cdot D = S$, ferner den Querschnitt der Mundöffnung s , so wird x

$$x = c(B + D) \left(1 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}} \right).$$

Hat die Röhre anstatt eines rechteckigen einen kreisförmigen Querschnitt, so tritt an die Stelle der Summe $B + D$ der Ausdruck $2\sqrt{S}$. Der Faktor c in dem Ausdrucke bedeutet eine Konstante, welche mit dem Material der Röhre etwas veränderlich ist, ihr Wert ist für Metall oder Glas 0,210, für Holz 0,240. In wie weit die so berechneten Werte von x mit den aus den Schwingungszahlen der beobachteten Töne abgeleiteten übereinstimmen, zeigt folgende kleine Tabelle; zu den in ihr mitgetheilten Versuchen wurden cylindrische Pfeifen benutzt.

Werte von x bei verschiedenen Pfeifen mit verschiedenen Mundöffnungen.

$$c = 0,210.$$

Material der Wand	\sqrt{S}	s	Tempera- tur	Länge der Pfeife	x	
					berechnet	beobachtet
Messing. . .	35,45	60,0	9° 0 C.	298,0	79,6	96,9
				631,0		84,0
				965,0		96,9
Messing. . .	17,72	36,0	9° 9	97,5	26,9	24,7
				190,0		27,9
				281,0		22,8
Messing. . .	8,86	13,7	21° 0	88,0	11,1	17,7
				188,0		22,1
				288,0		18,4
Glas	17,72	30,0	9° 3	100,0	29,7	31,9
				256,1		37,7
				231,0		34,4
Blei	17,72	36,0	11° 5	62,0	26,9	30,7
				110,0		32,0
				120,0		25,8
				120,0		68,1

Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Rechnung ist allerdings nicht vollkommen, jedoch so annähernd, daß man diese aus den Versuchen abgeleitete Formel zu den Rechnungen benutzen kann.

¹⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XXXI. Kröner Journal. Bd. II.

Dafs die berechneten Werte meist kleiner sind als die beobachteten, ist seinen Grund zum Teil darin, dafs Wertheim die Geschwindigkeit des Schalles in Röhren jener in freier Luft gleich setzt, was nach den neuern, später zu besprechenden Erfahrungen von Kundt und Regnault nicht mehr statthaltend ist.

Den Einflufs der Form und Gröfse der Mundöffnung benutzt man bei den Orgelpfeifen dazu, um den Ton der Pfeife etwas zu stimmen, wenn die Pfeife nahezu den richtigen Ton angibt. Zu dem Ende sind neben der Mundöffnung an den Seiten zwei verschiebbare Lappen angesetzt, welche stattdessen, dieselbe etwas breiter oder schmaler zu machen, und so die Tonhöhe zu verändern.

Die Töne einer offenen Pfeife sind andere, als die einer gedeckten Pfeife von gleicher Länge; der Grundton einer offenen Pfeife ist die höhere Oktave des Grundtones der gleichen gedeckten Pfeife, so dafs also die Schwingungszahl N des Tones gleich ist

$$N = \frac{c}{2l}.$$

Außer dem Grundtone können auch alle Töne erzeugt werden, welche zur Reihe

$$N = n \cdot \frac{c}{2l}$$

entsprechen, also wenn wir den Grundton mit c_{-1} bezeichnen, die Töne

$$\begin{array}{cccccc} c_{-1} & c & g & c_1 & e_1 & g_1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

Der gehen wir von dem Grundtone der gedeckten Pfeife gleicher Länge c_{-2} aus, die Töne

$$2 \ 4 \ 6 \ 8 \ 10 \ 12.$$

Der erste, dritte, fünfte, überhaupt $(2n - 1)$ Ton ist also die nächste höhere Oktave der ersten, zweiten etc. $(2n - 1)$ Tones der gedeckten Pfeife; außerdem gibt dann aber auch die offene Pfeife die dazwischen liegenden Töne $2n$.

Die offene Pfeife ist dem longitudinal schwingenden, an beiden Enden freien Stabe zu vergleichen; die an das offene Ende gelangenden Schwingungen werden reflektiert, weil die Luft außerhalb der Pfeife freier beweglich und deshalb gewissermaßen dünner ist als im Innern der Pfeife. Die Bewegung wird demnach ohne Änderung des Vorzeichens, der ankommende Wellenberg als Wellenberg, das ankommende Wellenthal als Wellenthal reflektiert. Die erste mögliche Schwingungsart, welche in der Röhre stehende Wellen erzeugen kann, ist daher diejenige, deren Wellenlänge gleich ist dem Doppelten der Röhrenlänge. Eine Schwingung z. B., deren Länge wie bei den gedeckten Pfeifen die vierfache Pfeifenlänge hätte, würde, wie man sieht nach § 138 und 147 entwickelt, an der Mundöffnung einen Schwingungsnoten zur Folge haben, würde also als stehende Welle in der Pfeife sich nicht erhalten können.

Diejenige Schwingungsbewegung beträgt, erzeugt dagegen Noten und bildet als stehende

die doppelte Pfeifen-
schwingungs-
noten

Länge gleich der Länge der Pfeifen ist. Die Schwingungsdauer und Schwingungszahl ist demnach

$$T = \frac{2l}{c}, \quad N = \frac{c}{2l}.$$

Eine schwingende Bewegung, deren Welle so lang ist, als die Länge der Pfeife, erzeugt in der Pfeife zwei Schwingungsknoten, welche von den Enden der Pfeife um $\frac{1}{2}$ Pfeifenlänge entfernt sind. Zwischen ihnen befindet sich eine stehende Welle von der Länge $\frac{1}{2} l$, und von jedem Schwingungsknoten bis zum Ende eine halbe Welle von der Länge $\frac{1}{2} l$; an beiden Enden befinden sich also Schwingungsmaxima. Es wird überflüssig sein, die weiteren Theilungen der Pfeife, welche den Tönen $g_1, c_1 \dots$ entsprechen, abzuleiten, da dieselben nach den Entwicklungen des § 138 und 147 unmittelbar hervortreten.

Für die offenen Pfeifen gilt das früher über den Einfluß des Mundlochs Gesagte gerade wie für die gedeckte Pfeife, auch bei diesen ist demnach die Länge der Welle länger als das Doppelte der Röhre oder

$$N = \frac{c}{2(l+x)},$$

und zwar muß diese Größe x hier ganz dieselbe sein, wie bei der gedeckten Pfeife. Vergleicht man nun die so berichtigte Schwingungszahl N mit derjenigen N' der gedeckten Pfeife, so müßte

$$N = 2 N'$$

oder der Ton der gedeckten Pfeife soll genau die tiefere Oktave des Tones der offenen Pfeife sein. Indes hört man bald bei einem Versuche, daß das nicht der Fall ist, daß der Ton der offenen Pfeife immer etwas tiefer ist als die höhere Oktave. So fand Wertheim bei einigen Versuchen, daß bei einer Pfeife von 24^{mm} Durchmesser der gehörte Ton bei der offenen Pfeife sich zu dem Tone $2 N'$ verhielt wie 23 zu 24, und in einem andern Falle bei einem Durchmesser von 50^{mm} wie 43,9 : 46,1, den Ton also verhältnismäßig noch tiefer.

Es muß daher bei der offenen Pfeife noch ein anderer Umstand störend einwirken, der die gehörten Töne von der Theorie abweichend macht. Wertheim sieht denselben darin, daß die Reflexion der schwingenden Bewegung nicht ganz genau in dem obern Querschnitt der Röhre stattfindet, sondern daß sich die schwingende Bewegung noch ein klein wenig über diesen Querschnitt hinaus erstreckt, die schwingende und tönende Luftsäule also etwas länger wird, als die Theorie annimmt. Daß diese kleine Verlängerung stattfindet, davon kann man sich durch den Versuch überzeugen, denn hält man ganz nahe über die Öffnung der Röhre eine feine schwach gespannte und mit Sand bestreute Membran, so sieht man an dem Hüpfen des Sandes die Ausdehnung der Bewegung über der Pfeife. Um den Ton der offenen Pfeife genau im Verhältnis zur Länge der Pfeife zu bestimmen, muß man daher für die Schwingungszahl desselben setzen

$$N = \frac{c}{2(l+x+y)}.$$

die Summe der beiden Berichtigungen $x + y$ zu bestimmen, ver-
ein gerade so, wie bei den gedeckten Pfeifen.

sind L_1 und L_2 die Länge zweier verschiedener Pfeifen von genau dem Durchmesser, N_1 und N_2 die Schwingungszahlen ihrer Grundtöne, man gerade wie vorhin

$$\begin{aligned} c &= 2 N_1 (L_1 + x + y) \\ c &= 2 N_2 (L_2 + x + y), \end{aligned}$$

daraus nach Elimination von c

$$x + y = \frac{N_2 L_2 - N_1 L_1}{N_1 - N_2},$$

Ausdruck, der dem vorigen für x ganz analog ist.

Für den Wert $x + y$ gelang es Wertheim ebenfalls¹⁾ eine von dem Querschnitt der Röhre und der GröÙe der Mundöffnung abhängige Beziehung zu finden. Bedeuten wieder B die Breite, D die Dicke der Röhre, ist S der Querschnitt derselben und s der Querschnitt der Mundöffnung, so gibt die Korrektur der Pfeifenlänge den Ausdruck

$$x + y = c_1 (B + D) \left(2 - \sqrt{\frac{s}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s}} \right),$$

wo c_1 eine von dem Material der Röhre unabhängige Konstante ist, welche $c_1 = 0,187$.

In folgender Tabelle ist eine Anzahl von Versuchen Wertheims zusammengestellt, welche zeigen, daß die für offene Pfeifen an der Länge anzubringende Korrektur in der That mit großer Annäherung die obige Gleichung wiedergegeben ist. Die benutzten Pfeifen sind auch zylindrische, so daß an Stelle von $B + D$ in jener Gleichung ein \sqrt{S} eintritt.

Tabelle der Korrekturen an offenen Pfeifen.

Material der Röhre	\sqrt{S}	s	Temperatur	Länge der Pfeife	Korrektur	
					berechnet	beobachtet
zinnig . . .	35,45	120,0	8°,0 C.	332,5 666,0 1000,5	65,4	65,1 67,4 68,6
zinnig . . .	35,45	60,0	26°,6	332,5 666,0 1000,5	84,2	88,9 84,8 87,8
zinnig . . .	17,72	36,0	9°,9	97,5 190,0 281,0	30,6	28,0 28,0 28,1
zinnig . . .	8,86	13,7	21°,0	88,0 188,0 288,0	13,2	18,0 22,1 19,0
zinnig . . .	17,72	30,0	17°,0	100,0 245,0	32,7	39,1 35,9
zinnig . . .	21,27	54,0	11°,5	110,0	36,6	37,1

¹⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome XXXI. Königsberg. Bd. II.

Wie man sieht, stimmen bei offenen Pfeifen die nach jener Beziehung berechneten Korrekturen mit den beobachteten zum Teil noch besser als bei gedeckten Pfeifen, so daß man bei jenen durch die Rechnung mit sehr großer Annäherung richtige Resultate erhält¹⁾.

Da nach diesen Erfahrungen die schwingende Bewegung nicht in der geometrischen Endfläche der Pfeife endigt, so wird eine teilweise Schließung der Endfläche die Tonhöhe der Pfeife ebenfalls verändern, und zwar, wie sich aus den Bemerkungen über die Korrektur an gedeckten Pfeifen ergibt, muß ein derartiger partieller Verschluss die Töne der Pfeife verflachen. Daß eine solche Vertiefung stattfindet, hat die Erfahrung der Orgelbauer längst gelehrt, sie versehen die offenen Orgelpfeifen oben gewöhnlich mit schrägstehenden Blechen, welche man auf- und abbiegen kann; biegt man sie herab, so wird der Ton vertieft.

Wertheim²⁾ ist es gelungen, auch für diesen Fall eine empirische Relation herzustellen, welche die an der Länge der Pfeife anzubringende Korrektur zu berechnen gestattet, so daß die Tonhöhe sich durch die Gleichung

$$n = \frac{c}{2(I + x + y)}$$

berechnen läßt.

Haben B , D und S dieselbe Bedeutung wie früher, und ist s_1 der Querschnitt der Mundöffnung, s_2 derjenige der obern Öffnung der Pfeife, so ist nach Wertheim

$$x = c(B + D) \left(1 - \sqrt{\frac{s_1}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s_1}} \right),$$

$$y = c_1(B + D) \left(1 - \sqrt{\frac{s_2}{S}} + \sqrt{\frac{S}{s_2}} \right),$$

worin c_1 wie bei ganz offenen Pfeifen den Wert von 0,187 hat.

Nachstehende Tabelle enthält eine Anzahl Versuche, welche Wertheim an einer quadratischen Orgelpfeife von Holz zur Prüfung obiger Relation angestellt hat. Die Länge der Pfeife betrug 240^{mm}, die Seite des quadratischen Querschnittes 120^{mm}; dieselbe Breite hatte die untere, die Mundöffnung, deren Höhe 5^{mm},5 betrug. Das Verhältnis $\frac{s_1}{S}$ ist darnach 0,0455; die Temperatur war bei allen Versuchen 15°. Die Tabelle stellt die von Wertheim beobachteten und die mit den nach obigen Gleichungen bestimmten Werten von x und y berechneten Schwingungszahlen zusammen.

¹⁾ Eine sehr einfache empirische Regel, welche für offene Orgelpfeifen in der That mit großer Annäherung die Schwingungszahl zu bestimmen gestattet, ist von dem französischen Orgelbauer Cavalier Colle aufgefunden. Bezeichnet man als theoretische Länge der Orgelpfeife die Länge der stehenden Welle des von ihr gelieferten Tones, so daß die Schwingungszahl

$$N = \frac{c}{2l_1}$$

des tiefsten Tones ist, so ist l_1 gleich der Summe der wirklichen Länge der Pfeife und der doppelten Tiefe derselben.

²⁾ Wertheim a. a. O.

Schwingungszahlen partiell gedeckter Pfeifen.

b_2	h_2	$\frac{s_2}{S}$	Schwingungszahl	
			berechnet	beobachtet
120	120	1,000 0	644,0	679,0
100	96	0,666 7	622,5	640,0
100	72	0,500 0	607,6	606,6
100	60	0,416 7	597,2	592,6
80	60	0,333 3	586,7	579,2
60	60	0,250 0	571,4	550,5
60	40	0,166 7	549,1	522,5
40	30	0,083 3	507,5	481,2
30	20	0,041 7	460,9	449,2
20	15	0,020 8	408,9	423,1
12	10	0,008 3	335,4	343,6
0	0	0,000 0	307,7	320,0

Die Spalten b_2 und h_2 enthalten die Seitenflächen der obern Öffnung der Pfeife. Wie die Tabelle zeigt, stimmen auch hier die berechneten Zahlen mit den beobachteten ziemlich gut überein, indes doch nur soweit, daß wir die von Wertheim gegebene Relation nur als eine angenähert richtige betrachten dürfen.

Die letzten Erfahrungen zeigen, daß die einfache von uns vorgetragene Theorie der Luftschwingungen in Pfeifen nur für sehr enge Röhren Gültigkeit hat, daß sobald der Querschnitt der Röhren einigermaßen groß ist, die anzubringenden Korrektionsglieder sehr beträchtlich sind. Es tritt das noch mehr hervor, wenn die Länge der Pfeifen gegen die Dimensionen des Querschnitts nicht mehr sehr groß ist, wenn die Länge der Pfeife nicht größer oder gar kleiner ist als die Breite der Röhre oder bei cylindrischen Röhren, als der Durchmesser. Würde man bei solchen Röhren den Ton einfach aus der Länge berechnen, so würde man ihn oft mehr als eine Oktave höher finden, als der Versuch ihn ergibt. Für derartige Röhren läßt sich indes wiederum mit sehr großer Annäherung die Tonhöhe nach den Wertheimschen Gleichungen berechnen, wie sich aus einer großen Anzahl von Versuchen, welche Wertheim mit Röhren der verschiedensten Form angestellt und in der schon mehrfach citierten Abhandlung mitgeteilt hat, deutlich ergibt. Wir begnügen uns hier damit, um zu zeigen, wie weit die Versuche mit den Formeln Wertheims übereinstimmen, eine Versuchsreihe an Holzpfeifen mitzuteilen. Die Pfeifen waren Röhren von rechteckigem Querschnitt, deren Länge 350^{mm} und deren eine Seite des Querschnitts $H = 200^{\text{mm}}$ betrug. Parallel dieser Seite konnten in den Kasten Schieber eingesetzt werden, welche so den Querschnitt der Röhre zu ändern gestatteten, indem man die Breite B desselben verkleinerte. Die Röhre war unten geschlossen, oben offen, und der obere offene Querschnitt konnte durch einen parallel der Kante H beweglichen Schieber, der die ganze Breite der Röhre einnahm, mehr oder weniger verkleinert werden. Die Pfeife wurde dann durch ein mit einem platten Mundstück von Messing versehenes Blaserohr, ähnlich wie Fig. 267, und in der dort dargestellten Weise angeblasen.

In nachfolgender Tabelle gibt die mit h überschriebene Spalte die Seite H parallele Ausdehnung der Öffnung, deren Breite b immer jener der Röhre war. Die zur Berechnung der Töne benutzte Konst. ist $= 0,240$, da die Pfeife von Holz war.

Töne kubischer Pfeifen.

h	$\frac{s}{N}$	Breite $B = 200^{\text{mm}}$		Breite $B = 100^{\text{mm}}$		Breite $B = 5$	
		Schwingungszahl berechnet	beobachtet	Schwingungszahl berechnet	beobachtet	Schwingungszahl berechnet	beob.
200	1,000	382,5	382,1	404,3	404,4	416,2	41
180	0,900	374,3	379,8	397,2	398,7	409,9	40
160	0,800	365,0	364,7	389,5	384,4	403,0	40
140	0,700	355,2	353,1	381,0	381,0	395,4	38
120	0,600	344,3	336,8	371,6	368,9	386,9	36
100	0,500	332,0	314,5	361,6	358,5	377,2	35
80	0,400	317,7	304,0	348,0	348,8	365,5	33
60	0,300	299,9	299,4	334,5	336,3	350,5	31
40	0,200	276,2	264,5	309,8	281,3	329,8	28
20	0,100	237,2	224,6	272,2	261,2	293,8	26
10	0,050	199,8	203,2	234,4	220,7	256,6	24

Für sehr kleine Mundöffnungen weichen die beobachteten und berechneten Zahlen nicht unbeträchtlich von einander ab, für grössere Öffnungen stimmen die Resultate ziemlich gut.

Als ein allgemeines Resultat ergibt sich aus diesen Versuchen, die Töne kubischer Pfeifen mit abnehmendem Volumen der Röhre zu werden, und weiter läßt sich aus den Versuchen und der Formel Wert der Satz ableiten, daß bei ähnlichen Formen der Pfeife und der Öffnung die Töne der Pfeife sich umgekehrt verhalten wie die Längen homologen Seiten.

Es genügt an diesen kurzen Andeutungen über das Verhalten kubischer Pfeifen¹⁾, da dieselben ausreichend sind, in den wenigen Fällen, in denen wir diese Pfeifen benutzen, uns die erforderliche Kenntnis derselben liefern. Das ergibt sich aus diesen Erfahrungen zur Genüge, daß die einfache Theorie der Pfeifentöne zur Bestimmung derselben nicht ausreicht und zwar deshalb nicht, weil die in Pfeifen schwingenden Luftsäulen so isolierte für sich schwingende Körper sind, wie longitudinal schwingende Stäbe, weil vielmehr die schwingende Bewegung auch der außerhalb der Pfeifen vorhandenen Luft sich mitteilt und dadurch die Schwingungen der Luftsäulen in den Pfeifen selbst modificiert wird.

Helmholtz²⁾ hat deshalb die Theorie der Luftschwingungen in Röhren einer neuen Behandlung unterzogen, bei welcher auf den eben bezeichneten Umstand, daß die Luftsäule in Röhren nicht ein ganz selbständiges

¹⁾ Man sehe auch *Sondhauss*, Poggend. Ann. Bd. LXXIX und *LI Masson*, Annales de chim. et de phys. III. Série. Tome XL. *Zimmermann*, Pogg. Annalen. Bd. XCVII.

²⁾ Helmholtz, Crelles Journal. Bd. LVII. p. 1.

schwingender Körper ist, Rücksicht genommen ist. Er behandelt gleichzeitig die Schwingungen im Innern der Röhre und in der umgebenden Luft, es ist ihm dadurch gelungen, mehrere der vorhin besprochenen Erörterungen theils theoretisch zu begründen, theils näher zu bestimmen. Es ist indes durch die hier uns gesteckten Grenzen versagt, auf diese Untersuchungen Helmholtz's näher einzugehen.

Das Tonbildende in den Pfeifen ist die schwingende Luftsäule, die Höhe der Pfeifen dürfen deshalb auf die Tonhöhe von keinem wesentlichen Einfluß sein. So lange die Wände aus ganz festem Material bestehen, ist auch nicht der Fall, die Tonhöhe ist wesentlich dieselbe in metallischen, hölzernen oder hölzernen Pfeifen.

Sind jedoch die Wände der Pfeifen nicht aus festem Material, so ändern sich die Höhe des Tones ab, und zwar wird der Ton bei weichen Wänden (er. Savart¹⁾) hat gezeigt, daß Pfeifen mit Pergamentwänden tiefer tönen als solche mit starren Wänden, und daß der Ton um so tiefer wird, je weicher man die Wände durch Benetzen erschläft. Dasselbe zeigte Liscovius²⁾, welcher gleichzeitig nachwies, daß man durch verstärkte Spannung des Pergaments den Ton erhöhe. Wird eine Pergamentwand derart gedrückt, daß sie nicht mitschwingen kann, wenn die Luftsäule schwingt, so gibt die Pfeife denselben Ton als eine solche mit starren Wänden.

Gerade dieser letzte Versuch beweist, daß der Einfluß einer nicht ganz starren Wand darin begründet ist, daß die Wand gleichzeitig mit der Luftsäule schwingt, und daß die Schwingungszahl der Luftsäule dadurch, daß die schwingende Wand auf sie einwirkt, eine andere wird. Die Einzelheiten der Erscheinung lassen sich indes noch nicht näher übersehen.

Wenn feste Wände auf die Tonhöhe keinen Einfluß haben, so sind doch von wesentlicher Bedeutung für den Klang der Pfeifen³⁾. Bei offenen cylindrischen oder rechteckigen offenen Pfeifen bildet sich neben dem Grundton auch die Reihe der harmonischen Töne in ähnlicher Weise wie bei den gestrichenen Saiten aus, deshalb haben sie einen vollen und schärferen, dem der gestrichenen Saiten ähnlichen Klang, bei weiteren offenen Pfeifen, den Principalstimmen der Orgel, besonders den hölzernen, tritt nur die Oktave noch deutlich zum Grundton, die höhere fast gar nicht, deshalb ist der Ton dieser Pfeife viel dumpfer. Die gedeckten Pfeifen geben die Töne 1, 3, 5 . . . , indes sind die Obertöne nur bei engen Pfeifen deutlich, bei weiteren tritt fast nur der Grundton auf, woher der dumpfe Klang der gedeckten Register rührt.

Der Klang in Holzpfeifen ist immer dumpfer und weicher als in Metallpfeifen, hauptsächlich, weil die rascheren Schwingungen der Obertöne sich dem Holz mittheilen und deshalb rasch verschwinden.

§ 163.

Töne durch Schwingung von Flüssigkeitssäulen. Wir haben erörtert, daß man durch einen Flüssigkeitsstrom, der durch die durchlöchernte Röhre einer in eine Flüssigkeit getauchten Sirene getrieben wird, einen

¹⁾ Savart, Annales de chim. et de phys. T. XXX.

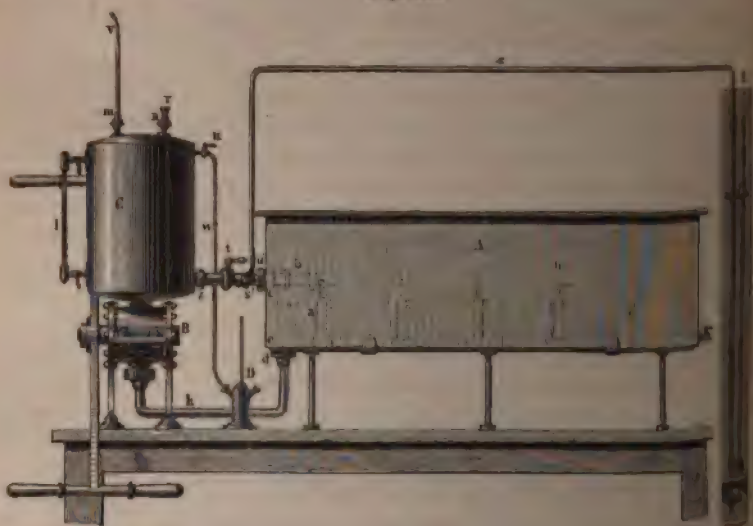
²⁾ Liscovius, Poggend. Ann. Bd. LVII.

³⁾ Helmholtz, Tonempfindungen. p. 150.

Ton erzeugen kann. Cagniard Latour und später in noch ausgereicherter Weise Wertheim ist es gelungen, in Flüssigkeiten stehende Wellen und dadurch Töne hervorzubringen.

Cagniard Latour¹⁾ brachte Flüssigkeitssäulen, welche in Glasröhren eingeschlossen waren, dadurch zum Tönen, daß er die Glasröhren longitudinal rieb. Die Höhe des erzeugten Tones bewies, daß nicht die longitudinalen Schwingungen des Glases es waren, welche gehört wurden, sondern die der Flüssigkeitssäule. Er wies durch den Versuch nach, daß der Ton die höhere Oktave ist, wenn die Röhre an beiden Seiten offen, die Flüssigkeitssäule also an beiden Enden frei ist, von dem Tone, den eine Flüssigkeitssäule gibt, welche in einer an einem Ende geschlossenen Röhre schwingt, deren eines Ende also an einer festen Wand anliegt. Die Töne einer an beiden Enden freien Flüssigkeitssäule konnten nicht dadurch erhalten werden, daß man eine an beiden Enden offene Röhre einfach in Wasser taucht und longitudinal rieb, sondern wurden dadurch erzeugt, daß man ein Rohr heberförmig, gleichschenkelig bog und dann longitudinal rieb. Wurde ein Ende des Hebers zugeschmolzen und derselbe bis zur gleichen Höhe mit Wasser gefüllt, als der offene, so war der Ton eine Oktave tiefer als bei dem offenen Heber.

Fig. 271.



Auch gelang es Cagniard Latour eine Pfeife unter Wasser zum Tönen zu bringen. Dies gelang aber in viel vollkommenerer Weise Wertheim, der in einer mit Flüssigkeit gefüllten Röhre durch einen Flüssigkeitsstrom den Grundton und die harmonischen Töne erzeugte²⁾.

Der Apparat, welchen Wertheim zu seinen Versuchen mit Wasser wandte, ist Fig. 271 abgebildet.

¹⁾ Cagniard Latour, *Annales de chim. et de phys.* LVI.

²⁾ Wertheim, *Annales de chim. et de phys.* III. Série. Tome II. *Poggend. Ann.* Bd. LXXVII.

Die offene Orgelpfeife bb liegt horizontal auf den Stützen a in dem großen gefüllten Wasserbehälter A . Der Fuß der Pfeife ist in c angeschraubt an eine in der Wand befestigte Mutter, welche der Pumpe gegenübersteht. Eine Ventilpumpe B , welche durch den davor befindlichen Hebel getrieben wird, saugt die Flüssigkeit durch das weite Rohr h aus dem Behälter und pumpt sie in das davorstehende Reservoir C .

Das Innere des Reservoirs C steht durch den Hahn m und das Rohr v mit großen Gefäßen voll komprimierter Luft in Verbindung. Durch den Druck dieser Luft bei geöffnetem Hahn m wird das im Behälter C angesammelte Wasser durch den Hahn t und das Rohr ss' in die unter Wasser befindliche Pfeife getrieben. Mittels des Hahnes t ist man imstande, den Zufluß des Wassers beliebig zu regulieren.

Auf dem Behälter C befindet sich noch ein zweiter Hahn n , der geöffnet die komprimierte Luft des Behälters in die Atmosphäre entweichen läßt, und auf den man bei r eine Sirene aufstellen kann, um die absolute Schwingungszahl des in der Wasserpfeife gehörten Tones, also die Tonhöhe, zu bestimmen. Außerdem dient dieser Hahn dazu, Versuche mit gewöhnlichen Orgelpfeifen in Luft anzustellen.

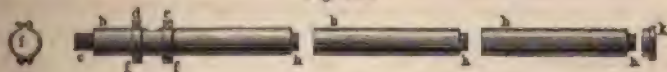
Um den Druck zu messen, unter welchem das Wasser in die Pfeifen eintritt, kommuniziert die Röhre ss' durch den Hahn u' und die Röhrenleitung x mit dem Manometer E und außerdem die Luft im Gefäße C durch den Hahn u und die Röhre uw mit dem Manometer D .

Ist nun der Apparat eingerichtet, so beginnt man die Versuche damit, daß man bei geschlossenen Hähnen m , n , t , mittels der Pumpe B Wasser aus dem Behälter A in den Behälter C pumpt. Ist die Wassermasse dort hinreichend, so setzt man den Behälter C durch Öffnen des Hahnes m mit den mit komprimierter Luft gefüllten Behältern in Verbindung. Der Druck dieser Luft ist es dann, der bei geöffnetem Hahne t das Wasser in die Orgelpfeife treibt und fernerer Pumpen während des Versuches dient nur dazu, das Wasser in C auf konstantem Niveau zu erhalten.

Damit die Versuche gelingen, muß auf die Konstruktion der Orgelpfeife besondere Aufmerksamkeit verwandt werden.

Wertheim wandte dazu die aus mehreren Stücken zusammengesetzte Pfeife (Fig. 272) an. Das erste Stück besteht aus der Schraube c , passend

Fig. 272.



für die Mutter bei c im Behälter A (Fig. 271) geschnitten, in deren Innern ein feines Drahtnetz angebracht ist, um zu verhindern, daß allenfalls feste im Wasser schwebende Körperteilchen in die Pfeife eintreten können, ferner aus dem Mundstücke d und der Röhre b , an deren Ende sich der Schraubengang b befindet, um daran die folgenden Röhrenstücke b oder den Deckel k anzuschrauben. Die beiden Labien des Mundlochs bestehen aus den Platten d und e , welche mit den Klammern f befestigt werden.

Man kann die Platten, welche die Labien bilden, nicht sogleich durch Löten unveränderlich fest mit der Pfeife verbinden, da die Stellung der Labien von wesentlichem Einfluß auf die Leichtigkeit ist, mit der die Pfeife

anspricht, und man deshalb durch den Versuch erst die Lage ermitteln muß, bei der die Pfeife in den Flüssigkeiten tönt. Für Flüssigkeiten im allgemeinen der Aufschnitt weniger breit und lang sein als für das Licht, die Mündung des Fusses in der Pfeife größer und der Stiel etwas mehr gegen das Innere der Pfeife gerichtet sein.

Mit diesem Apparate ist es Wertheim gelungen, Orgelpfeifen mit Wasser mittels eines Wasserstromes zum Tönen zu bringen, und es ist wie es nach § 147 zu erwarten ist, daß die Töne derselben Reihe feil wie bei Pfeifen, welche mit Luft angeblasen werden. Bei offenen Pfeifen nur diese gaben ein gutes Resultat, waren die Töne

$$\begin{array}{cccccccc} c_{-1} & c & g & c_1 & e_1 & g_1 & \dots & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & & \end{array}$$

Die Schwingungszahlen allgemein

$$N = n \frac{c}{2l},$$

wenn l die Länge der Pfeife bedeutet. Oder vielmehr genauer

$$N = \frac{c}{2(l + x + y)},$$

das heißt, es mußten dieselben Berichtigungen angebracht werden, bei den in Luft angeblasenen Pfeifen.

Für c erhielten wir § 146

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

oder, wenn wir E durch die von Grassi bestimmten Kompressionskoeffizienten μ ausdrücken, denen der Druck einer Atmosphäre zu Grunde liegt,

$$c = \sqrt{\frac{Hg\sigma}{\mu s}}.$$

Für Wasser ergab sich so § 146

$$c = 141\,800^{\text{cm}} = 1418^{\text{m}}.$$

Die Schwingungszahl N des Grundtones einer offenen Pfeife von Länge l sollte demnach sein

$$N = \frac{1418}{2l}.$$

Die Versuche von Wertheim gaben indes einen viel kleinern Wert, die Töne waren tiefer, als sie hiernach sein sollten und zwar so, daß beobachtete Schwingungszahl N' war

$$N' = \sqrt{\frac{2}{3}} N.$$

Wir werden auf diese Abweichung im nächsten Kapitel zurückkommen hier genüge die Bemerkung, daß nach der Ansicht von Wertheim GröÙe c , welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in dem Wasser bedeutet, hier einen andern Wert hat als den uns berechneten, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine andere

Flüssigkeitssäulen, wie in Orgelpfeifen, als in einer unbegrenzten Flüssigkeit und zwar, daß die Geschwindigkeit c' in Flüssigkeitssäulen gleich ist

$$c' = \sqrt{\frac{2}{3}} c.$$

§ 164.

Von den Zungenpfeifen. Die gewöhnlichen Zungenpfeifen unterscheiden sich von den Labialpfeifen dadurch, daß die Schwingungen nicht durch einen sich teilenden Luftstrom, sondern ähnlich wie bei der Sirene durch einen intermittierenden Luftstrom erregt werden. Die Zungenpfeife (Fig. 273 und 274) besteht aus dem Rohrwerk $abcd$, welches dem Fuße der Pfeife F sich befindet und welches, wie Fig. 273 zeigt, in die Öffnung der meist kegelförmig nach oben sich erweiternden Röhre R hineinsteckt ist.

Das Rohrwerk besteht aus einem Halbcylinder von starkem Messingblech, der an seiner Basis bei a geschlossen, oben jedoch offen ist (Fig. 274). Die mittlere Fläche des Messinghalbcylinders ist durch eine ebene Metallplatte bedeckt, welche jedoch nur ungefähr auf $\frac{1}{4}$ der Länge der Röhre fest und von da ab beweglich ist und als schwingende Zunge in die Höhlung des Cylinders hinein und heraus treten kann wie Fig. 274, oder die Öffnung des Cylinders hin- und herschwingen öffnen und schließen kann wie Fig. 273. Die Rohrwerke der erstern Art mit durchschlagender Zunge, welche einen weniger reinen Ton geben als die Rohrwerke der letztern Art mit aufschlagender Zunge, sind so gearbeitet sein, daß die Zunge

bei Eintreten in den Messingcylinder das Rohr vollkommen verschließt, so daß die Ränder der viereckigen Öffnung zu berühren. Im ruhenden Zustande ist die Zunge so gebogen, daß sie etwas von den Rändern der Öffnung abhebt, so daß die Luft des Fußes F mit derjenigen im Innern des Messingrohres und des Schallbechers der Röhre R kommuniziert. Der Fuß F ist rings, außer an der Durchtrittsstelle des Rohres r , welches den Luftstrom aus dem Windkasten eintreten läßt, geschlossen. Die Röhre R ist oben stets offen, damit die durch das Rohrwerk eintretende Luft entweichen kann.

Um die Zungenpfeife zum Tönen zu bringen, setzt man das Rohr r in den Kanal einer Windlade und läßt Luft einblasen. Die in den Fuß der Pfeife eintretende Luft dringt dann zunächst durch die von der Zunge

Fig. 273.



Fig. 274.



gelassene Spalte in die Pfeife ein; allein da nicht schnell genug alle Luft durch diese Spalte dringen kann, verdichtet sich dieselbe im Fuße und treibt die Zunge in die Röhre hinein, so daß auf einen Augenblick die Röhre ganz geschlossen ist und keine Luft aus dem Fuße mehr in die Röhre dringen kann. Durch das erste Eindringen der Luft in die Röhre gerät die Luft in derselben in Schwingung, und die Zunge dringt dann so weit in die Röhre ein, bis ihre eigene Elasticität und der von der schwingenden Bewegung der Luft in der Röhre sie treffende Impuls sie zurücktreibt, so daß sie die Öffnung von neuem frei läßt. Darauf wird dann neuerdings die Zunge an oder in die Röhre und wieder zurückgetrieben und das Spiel wiederholt sich so lange als der Luftstrom anhält.

Durch diese Vorrichtungen entstehen also Schwingungen der Luft in der Röhre, Schwingungen der Zunge und ebenso ein intermittierender Luftstrom gerade wie bei der Sirene, indem bei jeder Öffnung des Rohres ein Luftstrom in die Pfeife dringt, bei jedem Schlusse desselben der Strom unterbrochen wird.

Nach den Versuchen von Wilhelm Weber¹⁾ sind es nun weder die Schwingungen der Platte, welche den lauten und starken Ton der Zungenpfeife geben, noch die Schwingungen der Luftsäule, sondern die Stöße des intermittierenden Luftstromes wie bei der Sirene, der bei jeder Öffnung der Zunge in das Rohr eintritt, bei jedem Verschließen des Rohres durch die Zunge unterbrochen wird. Die Zahl der Luftstöße und somit die Tonhöhe aber hängt in der Pfeife nur von den Schwingungen der Zunge ab, wie in der Sirene von der Geschwindigkeit der Scheibe, indem die Schwingungen der Zunge es sind, welche das Rohr abwechselnd öffnen und schließen.

Die Schwingungen der Platte werden aber außer durch die Elasticität derselben wesentlich mit bestimmt durch die stehenden Schwingungen der Luftsäule in der Pfeife *R*, durch den abwechselnd zu- und abnehmenden Druck der dort schwingenden Luft.

Daß diese Anschauung von der Tonbildung in der Zungenpfeife die richtige ist, begründet Weber durch folgende Versuche. Würde der Ton in der Zungenpfeife nicht von den Stößen der Luft, sondern von den Schwingungen der Luftsäule in der Pfeife oder den vereinten Schwingungen der Luft und der Zunge erzeugt, so müßte der Ton aufhören, wenn man die Röhre *R* fort nähme; man weiß aber, daß das nicht der Fall ist. Bläst man das Rohrwerk allein an, wie es z. B. in der Mundharmonika immer geschieht, so ist der Ton der Höhe nach fast ganz derselbe, seinem Klange nach völlig derselbe, als wenn eine kurze Luftsäule mit schwingt.

Daß der Ton nicht von den Schwingungen der Platte herrührt, ergab sich daraus, daß wenn die Platte mit dem Violinbogen gestrichen wurde, also ohne die Luftstöße in Schwingungen versetzt wurde, ein nur ganz schwacher und in unmittelbarer Nähe hörbarer Ton entstand, der keinesfalls mit dem vollen und starken Tone der Zungenpfeife vergleichbar war. Selbst als er die Zunge vor einer Röhre in Schwingung versetzte, in der die stehenden Schwingungen der Luft denselben Ton gaben wie die Zunge, fand Weber den Ton nur matt und viel schwächer.

Also nur durch den intermittierenden Luftstrom, durch die von diesem

¹⁾ W. Weber, Poggendorffs Annalen. Bd. XVI.

e bei der Sirene erzeugten und durch die umgebende Luft fortgepflanzten Blase entsteht jener laute und volle Ton, welcher bei dem Anblasen der Zungenpfeife gehört wird.

Da indes ein Stoß nur beim Öffnen des Rohres entsteht, so sind die Blase mit den Schwingungen der Zunge gleichzeitig und man kann aus der Höhe des gehörten Tones auf die Schwingungszahl der Zunge schließen und diese mit den Schwingungen vergleichen, welche die für sich schwingende Platte vollführen würde. Eine solche Vergleichung beweist dann den zweiten Satz von Weber, daß die Schwingungen der Zunge bedingt werden durch die eigene Elasticität der Zunge und durch die in der Röhre aufstehenden stehenden Schwingungen der Luftsäule. Die Tonhöhe und somit die Schwingungszahl der Platte wird nämlich eine andere, wenn verschiedene Röhren mit der Zunge zur Pfeife verbunden sind.

Um die Änderungen der Tonhöhe zu erkennen, ist es notwendig zu beachten, daß die Pfeife auf doppelte Weise zum Tönen gebracht werden kann, durch Blasen von unten, so daß also in dem Fuße F der Pfeife die Luft dichter ist als im Innern der Pfeife und durch Saugen von unten oder Blasen von oben, so daß die Luft außerhalb der Röhre im Fuße F der Pfeife dünner ist als innerhalb.

Der Vergleich der Töne der Zungenpfeife mit dem Tone der isoliert schwingenden Zunge ergibt nun folgendes.

1) Ist die Pfeife so lang, daß die in ihr erregten stehenden Schwingungen mit dem Ton der isoliert schwingenden Zunge geben, so wird durch den Zusatz der Pfeife an das Rohrwerk der Ton seiner Höhe nach nicht wesentlich anders als der Ton der isoliert schwingenden Zunge. Es ist das sowohl der Fall, wenn der Grundton der Röhre, als wenn einer ihrer harmonischen Töne mit dem Tone der Zunge übereinstimmt. Ist also l die Länge der Röhre, deren Grundton mit dem Tone der Zunge gleiche Höhe hat, so hat der zweite Ton der Röhre $2l$, der dritte derjenigen von der Länge l u. s. f. Alle diese Röhren, deren Länge l oder irgend ein Vielfaches von l ist, ändern mit dem Rohrwerke zur Zungenpfeife verbunden die Höhe des Tones, den die Zunge für sich geben würde, nicht ab, die Schwingungen der Zunge erfolgen also unter vereinigter Wirkung der Elasticität der Zunge und der wechselnden Drucke der Luft gerade so, als bewegte sie sich nur Folge ihrer eigenen Elasticität. Das ist sowohl der Fall, wenn die Pfeife durch Blasen, als wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Hat die Röhre aber irgend eine andere Länge als l , $2l$, $3l$. . . so wird die Tonhöhe der Zunge geändert, sie wird tiefer, die Schwingungszahl kleiner, die Schwingungsdauer größer, wenn die Pfeife durch Blasen zum Tönen gebracht wird, sie wird höher, die Schwingungszahl größer, die Schwingungsdauer kleiner, wenn die Röhre durch Saugen zum Ansprechen gebracht wird.

Setzt man eine kurze Röhre an die Zunge, so wird beim Anblasen von unten der Ton nur unmerklich tiefer, wenn man die Röhre bis zu $\frac{1}{4}l$ verlängert, bei weiterm Verlängern wird er merklich tiefer, bis die Länge der Röhre $\frac{1}{2}l$ ist, bei noch weiterm Verlängern sinkt der Ton immer rascher, bis $\frac{3}{4}l$, fast ebenso rasch als die Länge der Röhre zunimmt, und zwischen $\frac{3}{4}l$ und l sinkt die Tonhöhe der Verlängerung proportional. Ist die Länge der Röhre nahe l , so ist der Ton fast eine Oktave tiefer als der Ton der sich schwingenden Zunge.

So fand Weber bei einer Zunge, welche denselben Ton gab als eine Pfeife von 195,3 Pariser Linien oder 44,1 Centimeter, nämlich das eingestrichene g , folgende Tonreihe, als die Zunge mit Röhren von den daneben angegebenen Längen zur Pfeife verbunden angeblasen wurde:

Länge der Röhre	Ton	Länge der Röhre	Ton
1" 6" $< \frac{1}{4} l$	g_1	9" 4" $> \frac{1}{2} l$	d_1
2" 1" "	g_1	10" 9" "	c_1
3" 5" "	g_1	12" 3" $> \frac{3}{4} l$	a_{is}
4" 9" $> \frac{1}{4} l$	f_{is_1}	13" 8" "	g_{is}
6" 11" "	f_1	14" 7" "	g
7" 10" "	c_1		

Bei weiterer Verlängerung sprang der Ton zum eingestrichenen g zurück, so daß bei der Länge l der Ton der Pfeife wieder das eingestrichene g_1 war.

Wurde das Rohr über l hinaus verlängert, so war zwischen l und $2l$ der Gang des Tones derselbe, nur reichte die Vertiefung viel weniger weit. Die größte Vertiefung nahe bei $2l$ betrug eine Quarte. Die von Weber beobachteten Töne waren folgende:

Länge der Röhre	Ton	Länge der Röhre	Ton
16" 2" $= l$	g_1	27" $> \frac{6}{4} l$	c_1
19" 4" $> l < \frac{5}{4} l$	g_1	28" 10" $> \frac{7}{4} l$	dis_1
21" 4" $> \frac{5}{4} l$	f_{is_1}	30" 9" $> \frac{8}{4} l$	d_1
24" $> \frac{5}{4} l$	f_1	32" $> \frac{9}{4} l$	d_1

Bei einer Länge von etwas über $2l$ wurde zuweilen noch c_{is_1} erhalten, sonst sprang der Ton bei $2l$ wieder zu g_1 zurück. Wurde die Röhre von $2l$ auf $3l$ verlängert, so sank der Ton wieder anfangs langsamer, dann rascher bis zur tiefen Terz, in den Weberschen Versuchen bis zum eingestrichenen c_1 .

Man erkennt darin ein bestimmtes Gesetz, nach welchem die Tonhöhe durch den Ansatz der Röhren sich ändert. Jedesmal, nachdem die Röhre um l verlängert ist, springt der Ton zurück, vor dem ersten Sprunge war er um eine Oktave, vor dem zweiten um eine Quarte, vor dem dritten um eine Terz vertieft, so daß also das Schwingungsverhältnis vor und nach dem Sprunge sich verhielt

beim ersten Sprunge wie	1 : 2
" zweiten "	" 3 : 4
" dritten "	" 5 : 6,

vor den folgenden Sprüngen würde er demnach so vertieft sein, daß die Töne vor und nach dem Sprunge sich verhielten wie 7 : 8, dann wie 9 : 10 und so weiter. Für einige weitere Sprünge bestätigen die Versuche von Weber das Gesetz.

Weber folgert aus diesen Erscheinungen, daß wirklich die Luft in den Zungenpfeifen in stehende Schwingungen gerät. Denn zunächst tritt es hervor, daß jedesmal dann, wenn die Röhre die Länge l oder ein Vielfaches von l besitzt, die Schwingungen der Röhre also mit denen der Zunge zusammenfallen, der Ton wieder seine ursprüngliche Höhe erhält. Ähnliches ist auch bei den übrigen Tönen der Fall, auch dort bilden sich in der Röhre schwingende Abteilungen und jedesmal, wenn die Röhre um eine

schwingende Abteilung größer geworden ist, wird der Ton der Zungenpfeife auch wieder derselbe, und zwar ist die Länge dieser schwingenden Abteilungen gleich der Länge der in stehenden Schwingungen befindlichen Luftsäule, welche dieselbe Schwingungszahl haben würde.

Setzen wir nämlich in Pariser Fufs den Gröfse c des § 162, welche uns durch

$$N = \frac{c}{2l}$$

die Schwingungszahl der Luftsäule einer offenen Pfeife von der Länge l gibt,

$$c = 1052,$$

so erhalten wir als Länge der Röhre, welche den Ton g_1 gibt, den Weber zu 388 Schwingungen in der Sekunde bestimmte,

$$l = \frac{1052}{776} = 1,356 \text{ Fufs} = 193,3 \text{ Linien.}$$

Für die tiefen Töne bestimmte Weber nun ebenfalls die Schwingungszahlen und zugehörigen Röhrenlängen und verglich dann die Längen der Zungenpfeifen, bei denen diese Töne jedesmal auftraten. So fand er z. B., dafs ein Ton auftrat von 365 Schwingungen bei der Länge der Röhre 87,3 Linien, dann bei 293,0 und 504,0 Linien, also jedesmal, wenn die Länge der Röhre um 205,7 und um 416,7 Linien zugenommen hatte. Berechnen wir nun aber die Länge l der diesen Ton gebenden offenen Röhre, so wird

$$l = \frac{1052}{730} = 1,441 \text{ Fufs} = 207,5 \text{ Linien.}$$

Die beobachteten Längenzunahmen weichen von diesem berechneten l und $2l$ nur um 1,9 und 1,5 Linien ab, erstere ist um so viel zu klein, letztere zu groß.

Man sieht also, wie die Luftsäule der Röhre in gleichzeitige Schwingungen mit denen der Zunge versetzt wird, indem jedesmal, wenn die Länge der Röhre um die Länge einer mit dem Tone gleichen stehenden Welle vergrößert wird, derselbe Ton wiederkehrt.

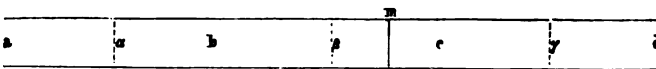
Der Vorgang der Bewegungen in den Zungenpfeifen wird durch diese Erfahrungen so festgestellt, wie wir ihn vorhin aussprachen. Der Ton rührt her von dem intermittierenden Luftstrom, der durch das abwechselnde Öffnen und Schließen der Zunge hervorgebracht wird. Die Schwingungen der Zunge werden aber bedingt durch die Elasticität der Zunge und die mit den Schwingungen der Zunge isochronen und synchronen Schwingungen der Luftsäule in den Pfeifen. Diese ändern die Schwingungsdauer der Zunge ab und bewirken, dafs dieselbe entweder langsamer schwingt, wenn die Pfeife angeblasen wird, oder rascher als die Zunge allein, wenn sie durch Saugen zum Tönen gebracht wird.

Um diese Wechselwirkung der schwingenden Luftsäule und der schwingenden Zunge zu verstehen, denken wir uns mit W. Weber¹⁾ eine Zunge, wo die Zunge in einer zur Längsaxe der Röhre senkrechten Platte ad (Fig. 275) eine an beiden Seiten offene Röhre, deren

¹⁾ W. Weber, Poggendorffs Annalen. Bd. XVII.

in stehende Schwingungen versetzt ist, so daß bei α, β, γ Schwingungsknoten und bei a, b, c, d Schwingungsmaxima sich befinden; bei m sei in derselben eine Zunge, welche, wie in den Zungenpfeifen, genau dieselben Bewegungen besitzt, wie eine an dieser Stelle befindliche Luftschicht, wenn wir eine einfache offene Röhre hätten. Eine solche Platte wird die Schwingungen der Luft durchaus nicht stören, wenn sie unserer Annahme gemäß wegen ihrer eigenen Elasticität und wegen des, sie gerade so wie eine dort befindliche Luftschicht treffenden, Druckes der mitschwingenden Luft genau dieselbe Bewegung besitzt, als eine dort befindliche Luftschicht. Wenn

Fig. 275.



aber eine solche Platte sich in m befindet, so kann die Luft sowohl in dem Röhrenstücke md gerade so schwingen als vorher, wenn das Röhrenstück ma ganz fortgenommen ist und die Platte m die Rolle einer Zunge in der Zungenpfeife spielt, als auch in der Röhre ma , wenn das Stück md ganz fortgenommen wird. Diese beiden Zungenpfeifen werden dann genau denselben Ton geben, da die Schwingungen in beiden gleich sind, obwohl sie verschiedene Längen haben; die Pfeife ma aber nur, wenn sie von innen, die Pfeife md , wenn sie von außen angeblasen wird.

In den Schwingungsknoten der stehenden Schwingungen ist die Luft immerfort in Ruhe, in den Längen $\alpha\beta$. . hat die Luft eine hin und her gehende Bewegung, so daß sie z. B. zugleich von α und γ sich nach β und in der folgenden Zeit von β nach α und γ hin bewegt. Dabei haben dann die Teilchen a, b, c, d die schnellste Bewegung und die größten Exkursionen, in α, β und γ dagegen treten abwechselnd Verdichtungen und Verdünnungen der Luft ein.

Wenn wir statt der ganzen Röhre ad nur das mit der Zunge m verschlossene Stück md nehmen, so muß, wenn die Bewegung genau so bleiben soll wie vorher, durch Anbringen der Zunge also keine Änderung stattfinden soll, die Zunge m nach außen schwingen, wenn die Luftteilchen zwischen m und γ nach außen schwingen, wenn also bei nicht vorhandener Zunge bei β eine Verdichtung einträte; dagegen nach innen, das heißt sie muß die Röhre verschließen, wenn die Luft zwischen m und γ nach innen schwingt, also bei γ eine Verdichtung eintreten würde.

Wenn wir dagegen das mit der Zunge m verschlossene Röhrenstück ma nehmen, so bewegt sich dort die Zunge nach außen, das heißt sie öffnet die Röhre, wenn bei β und auf der Strecke βc eine Verdünnung eintritt, indem auch dann die Schwingungen der Platte mit denen der durch sie ersetzten Luftschicht gleich sein müssen. Im ersten Falle öffnet sich daher die Zunge, wenn vor ihr bei β und in ihrer ganzen Umgebung, da auch die Strecke $c\beta$ dann verdichtet wird, eine Verdichtung eintritt; im zweiten Falle aber, wenn die Luftschwingungen verdünnend sind, wenn bei m eine Verdünnung der Luft eintritt.

Wenn wir eine Zungenpfeife anblasen, das heißt die Luft in dem Behälter des Fuls F verdichten, so folgt aus dem Vorigen, daß die Pfeife sich verhalten muß wie die Röhre md , daß die Röhre sich öffnen muß,

den die Schwingungen der Luft in der Nähe der Platte verdichtende sind; nun wenn die Schwingungen in der Pfeife md ganz dieselben sein sollen, so in der offenen Pfeife ad , so muß die die Zunge umgebende Luft sich gerade so verhalten, wie die an ihrer Stelle befindliche Luft in der offenen Pfeife.

Blasen wir aber die Pfeife von innen an oder bringen wir sie durch Saugen zum Tönen, das heißt machen wir die Luft im Behälter des Fusses immer als im Innern der Pfeife, so muß die Öffnung der Pfeife mit einer verdünnenden Schwingung der Luftsäule zusammenfallen, die Luft muß, wie bei dem mit der Zunge verbundenen Röhrenstücke ma , in der Umgebung der Zunge dünner werden, sie muß sich von dem Schwingungsknoten β fortbewegen, wenn die Zunge die Röhre öffnet. Denn auch hier wieder muß die Luft in der Umgebung der Zunge sich gerade so verhalten, wie in unserer Pfeife ad , wenn die Zunge m die Pfeife ma abschließt und die Bewegung doch die frühere bleiben soll.

Es folgt also daraus, daß, wenn eine Zungenpfeife durch Blasen zum Sprechen gebracht wird, im Innern der Pfeife der Zunge ein Schwingungsmaximum zunächst liegt, wenn aber durch Saugen, ein Schwingungsknoten der Zunge zunächst liegt.

Diese Folgerung hat Weber durch folgende beiden Erfahrungssätze bestätigt.

1) Bei einer angeblasenen Pfeife besteht die Luftsäule der Pfeife aus einer beliebigen Anzahl stehender Wellen plus einem Reste, der größer als null, aber kleiner als eine halbe stehende Welle ist.

2) Bei einer durch Saugen zum Tönen gebrachten Zungenpfeife besteht die schwingende Luftsäule aus einer beliebigen Anzahl ganzer stehender Wellen plus einem Reste, der größer als eine halbe, aber kleiner als eine ganze stehende Welle ist.

Da nun immer an dem obern offenen Ende der Pfeife bei a oder d ein Schwingungsmaximum sich befindet, so folgt aus diesen beiden Sätzen die vorige Folgerung, bei einer angeblasenen Pfeife befindet sich zunächst bei der Zunge ein Schwingungsmaximum, bei einer durch Saugen zum Tönen gebrachten ein Schwingungsknoten.

Einen Zahlenbeleg für den ersten Erfahrungssatz haben wir bereits oben mitgeteilt.

Die Zungenpfeife gab beim Anblasen einen Ton von 365 Schwingungen in einer Pfeifenlänge

$$l = 87,3 \text{ Linien} = 0 \cdot 207,5 + 87,3$$

$$l = 293 \quad \text{,,} \quad = 1 \cdot 207,5 + 85,5$$

$$l = 504 \quad \text{,,} \quad = 2 \cdot 207,5 + 89.$$

Jedesmal bleibt ein Rest, der kleiner ist als 103,75 der Länge einer ganzen stehenden Welle.

Aus dieser Art, wie die Schwingungen der Luft mit denen der Platte zusammenreffen, folgt nun auch, daß die Schwingungen der Zunge beim Anblasen langsamer, der Ton also tiefer, beim Ansaugen aber rascher in der Pfeife also höher werden muß.

Beim Anblasen ist nämlich, wenn die Zunge gegen das Innere der Pfeife schwingt, die Endabteilung der schwingenden Luft

verdünnt; sie beschleunigt daher die Zunge nach dem Innern der Pfeife, während die eigene Elasticität der Zunge derselben, da sie nach innen zu von ihrer Gleichgewichtslage sich entfernt hat, eine Beschleunigung nach aussen erteilt. Die Verdünnung der Luft in der Röhre hält folglich einen Theile der Elasticität der Zunge das Gleichgewicht. Während die Zunge nach aussen schwingt, ist die Endabtheilung der Luft verdichtet, sie beschleunigt daher die Zunge nach aussen, während die Elasticität der Zunge die Platte wieder nach der entgegengesetzten Richtung beschleunigt; also auch hier wieder wirkt der Luftdruck der Elasticität der Platte entgegen.

Da also der Einfluss der schwingenden Luftsäule der Elasticität der Platte entgegenwirkt, so schwingt die Platte langsamer, gerade so, als wenn ihre Elasticität vermindert wäre. Der Ton der Zungenpfeife ist daher stets tiefer als der der isoliert schwingenden Zunge und kann höchstens, wenn die Zunge sich gerade an der Stelle des Schwingungsmaximums befindet, wo die Luft eine hin und her gehende Bewegung ohne Verdichtung oder Verdünnung besitzt, die Tonhöhe der isoliert schwingenden Platte erhalten.

Wird die Pfeife durch Saugen zum Ansprechen gebracht, so ist die Endabtheilung der schwingenden Luftsäule, wenn die Zunge nach innen sich von ihrer Gleichgewichtslage entfernt hat, verdichtet, und zwar am meisten, wenn die Zunge gerade ihre äusserste Stellung nach innen erreicht hat. Zugleich treiben sie also der Druck der verdichteten Luft und ihre eigene Elasticität nach aussen hin; die Wirkung der Luft kommt also mit der einer Vermehrung der Elasticität der Zunge überein. Dasselbe ist bei der Abweichung der Zunge von ihrer Gleichgewichtslage nach aussen der Fall. Die Luft ist dann in der Endabtheilung verdünnt, und zwar am meisten, wenn die Platte ihre äusserste Lage nach aussen erreicht hat. Auch dort treibt dann sowohl der Druck der Luft als die Elasticität der Zunge dieselbe zurück; der Druck der Luft wirkt also wieder wie eine Vermehrung der Elasticität der Zunge.

Die Schwingungen der Zunge müssen also in diesem Falle rascher, der Ton höher sein als der der isoliert schwingenden Zunge. Die Grenze ist wieder die Tonhöhe der Zunge, wenn sie gerade an der Stelle eines Schwingungsmaximums sich befindet.

Je näher die Zunge einem Schwingungsknoten rückt, um so grösser ist der Einfluss der Luft, da die Verdichtungen und Verdünnungen an der Platte immer grösser werden. Wenn man nun die Länge der Röhre vergrössert, so rückt dadurch in beiden Fällen die Platte dem Schwingungsknoten näher, der Ton muss sich beim Anblasen von unten daher vertiefen, bis die Pfeife sich soweit verlängert hat, dass sie wieder ein Vielfaches der Wellenlänge des ursprünglichen Tones ist; dann theilt sie sich wieder in schwingende dem Tone der Zunge entsprechende Abtheilungen und an der Zunge bildet sich wieder ein Schwingungsmaximum.

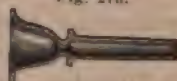
Wir müssen uns begnügen, soweit die Änderung der Tonhöhe nachgewiesen zu haben; die Grösse derselben, wie sie sich aus Webers Versuchen ergibt, lässt sich ohne die vollständige Theorie von Weber, die uns hier zu weit führen würde, nicht ableiten.

Während bei den bisher besprochenen Zungen durch den Einfluss der in der Röhre schwingenden Luftsäule der Ton der freien Zunge nur mehr

er weniger modificiert wird, hängt bei einer andern Gattung von Zungen der Ton lediglich von den Schwingungen der mit Hilfe der Zungen bewegten Luftsäule ab, bei den sogenannten weichen Zungen. Weiche Zungen sind die aus elastischen Rohrplatten geschnitzten Zungen der Holzblasinstrumente, Klarinette, Oboe und Fagott, sowie die zur Tonerzeugung der Blechblasinstrumente benutzten menschlichen Lippen. Die Klarinette hat eine breite Zunge, welche im Mundstücke derselben ähnlich befestigt ist wie die Zungen in den Rohrwerken der Zungenpfeifen; Oboe und Fagott haben zwei Zungen, welche am Ende des Mundstückes einander gegenüber gestellt und nur durch einen schmalen Spalt von einander getrennt sind. Setzt man hinein, so wird der Spalt durch den Druck der im Munde zusammengepressten Luft abwechselnd geschlossen, abwechselnd durch die Elasticität der Zungen geöffnet, und dieser intermittierende Luftstrom erzeugt die Schwingungen in den mit den Zungen verbundenen Röhren, die er dann als Ton wahrnehmen.

Bei den Blechblasinstrumenten wird die schwingende Bewegung der Luft an dem Mundstücke durch rasch folgendes abwechselndes Schließen und Öffnen der Lippen erzeugt. Das Mundstück hat dort eine trichterförmige Gestalt (Fig. 276). Die Lippen des Bläfers liegen in der obern Öffnung und sind im Ruhezustande geschlossen. Durch den Druck der in der Mundhöhle angesammelten Luft werden sie geöffnet, und der Luftstrom dringt in das Instrument. Ist eine geringe Menge Luft aus dem Ende entwichen, so schließen sich die Lippen wieder, weil die Spannung der Luft kleiner geworden ist. Da dann die Luft keinen Ausweg hat, öffnet ihr Druck die Lippen wieder, und so erneuert sich das Spiel der Lippen immerfort. Der intermittierende Luftstrom erzeugt dem Rohre stehende Schwingungen, und diese sind es, die wir als Ton wahrnehmen.

Fig. 276.



Damit nun aber diese stehenden Schwingungen existieren können, müssen Stöße bei den Holz- und Blechblasinstrumenten in derselben Periode erfolgen, es müssen also die Zungen mit denselben isochron schwingen. Die Schwingungen der weichen Zungen hängen nun nach der von Helmholtz¹⁾ entwickelten Theorie derselben nicht wesentlich von der Elasticität der Zungen ab, sondern von der in der Röhre schwingenden Luft, sie schwingen mit der Luftsäule isochron, wenn der durch die in der Tiefe des Rohres vorhandenen Luftwellen bewirkte Wechsel des Luftdruckes hinreichend ist, die Zungen in eine schwingende Bewegung zu versetzen. In einer schwingenden Luftsäule ist aber der Druckwechsel am größten in den Schwingungsknoten, wie an dem geschlossenen Ende einer gedeckten Pfeife; deshalb gibt eine solche mit einer weichen Zunge versehene Röhre diejenige Note, welche die Röhre geben würde, wenn sie an der Stelle der Zunge geschlossen und unten angeblasen würde.

Befindet sich deshalb die Zunge, wie bei der Klarinette, an dem einen Ende eines cylindrischen engen Rohres, so sind die Töne der Klarinette, die Quint seiner Oktave, die Terz der folgenden Oktave u.

¹⁾ Helmholtz, Poggend. Ann. Bd. CXIV.

bei einer gedeckten Pfeife derselben Länge. Man kann alle die Töne erzeugen, indem man das Rohr in verschiedener Stärke anbläst.

Ist das Rohr kegelförmig, so ist die Reihe der Töne eine andere. Für an beiden Seiten offene konische Röhren, oder für solche, welche vollständige Kegel und an der Spitze geschlossen sind, ergibt sich sowohl aus den Versuchen Zamminers¹⁾ als aus der Theorie von Helmholtz²⁾, daß die in ihnen möglichen Töne genau übereinstimmen mit denen einer ihnen an Länge genau gleichen offenen cylindrischen Röhre. Ist dagegen das Rohr ein abgestumpfter Kegel, und die schmalere Fläche verschlossen, so stimmt die Reihe der Töne weder mit der einer offenen noch mit der einer gedeckten Pfeife überein, sie nähert sich derjenigen einer offenen Pfeife indes um so mehr, je kleiner das Stück ist, welches an einem vollständigen Kegel fehlt. Die Tonreihe läßt sich dann nur durch eine transcendente Gleichung berechnen. Ganz ebenso verhält es sich mit den kegelförmigen Röhren, die mit Zungen versehen sind, also mit Oboe und den Blechblasinstrumenten. Setzt man die Länge des Rohres l und die an derselben anzubringende Korrektur für das untere offene Ende a , so erhält man die Schwingungszahlen n aus der Gleichung

$$\text{tang } \frac{2n\pi(l+a)}{c} = - \frac{2n\pi r}{c},$$

worin r der Abstand der Zunge von der ideellen Spitze des Kegels und c die Geschwindigkeit des Schalles bedeutet³⁾. Um die entstehenden Töne zu übersehen, geben wir im Folgenden die Reihenfolge, welche Helmholtz für eine konische Röhre von Zink beobachtet und berechnet hat, deren Länge 122,7 oder mit der Korrektur 124,77^{cm} war, deren untere Öffnung 5,5, deren obere 0,7^{cm} war, für welche also r , der Abstand des oberen Endes von der ideellen Spitze des Kegels 18^{cm},2 war.

Die Tabelle gibt die Wellenlängen, also die Werte $\frac{c}{n}$ und daneben die Länge der offenen oder gedeckten Pfeife, in welchen der betreffende Ton als Grund- oder Oberton bestehen kann.

	Ton	Wellenlänge	Länge der entsprechenden Pfeife	
			offen	gedeckt
1	$H-$	283,61	141,80	70,90
2	$h-$	139,83	139,84	104,88
3	fs_1	91,81	137,71	114,76
4	$h_1 +$	67,94	135,88	118,89
5	dis_2	53,76	134,39	120,95
6	g_2	44,40	133,21	122,11
7	b_2	37,79	132,26	122,82
8	c_3	32,87	131,50	123,98
9	dis_3	29,22	131,47	124,17

¹⁾ Zamminer, Poggend. Ann. Bd. XCVII.

²⁾ Helmholtz, Poggend. Ann. Bd. CXIV. Tonempfindungen p. 580.

³⁾ Helmholtz, Poggend. Ann. Bd. CXIV. p. 326.

in den beiden letzten Spalten gemachten Angaben sind so zu ver-
dass die in einer Horizontalreihe angegebene Pfeifenlänge den in
en Reihe angegebenen Ton als den sovielten Oberton hat, als dieser
r Oberton in der Zungenpfeife ist. Eine offene Pfeife z. B., deren
134^{cm},39 ist, gibt als fünften Ton dasselbe dis_2 , welches als fünfter
der Zungenpfeife entsteht, und ebenso würde es der fünfte Ton
gedeckten Pfeife von 120^{cm},95 Länge sein, also neunmal soviel
lungen haben, wie der Grundton einer solchen Pfeife.

ie man sieht, würden bei dieser Röhre die ersten Töne, wenn man
he als diejenige einer offenen Pfeife betrachten wollte, gegen die
viel zu tief sein, erst die letzten würde man als einer offenen Pfeife
rig betrachten können, deren Länge dann aber grösser ist als die
ischen Röhre und kleiner als die Länge des ganzen Kegels. Anderer-
ann man die letzten Töne als jene einer gedeckten Pfeife auffassen,
Länge gleich jener der konischen Röhre ist.

kleiner übrigens der Wert von r ist, das heisst, je näher die Zunge
r Spitze des Kegels befindet, um so näher rückt die Reihe der Töne
einer offenen Pfeife, welche sie auch nach der Gleichung für $r = 0$
t, denn die Werte, für welche

$$\text{tang } \frac{2n\pi(l+a)}{c} = 0,$$

$$\frac{2n}{c}(l+a) = 1, 2, 3, \dots, p,$$

e Reihe der natürlichen Zahlen. Ist r klein, so kann man die Ton-
als jene einer offenen Pfeife betrachten, deren erste Töne gegen die
ten etwas zu tief sind.

§ 165.

Die Blasinstrumente. Die sämtlichen Blasinstrumente lassen sich
wendungen der Labialpfeifen und Zungenpfeifen betrachten. Die
feifen sind geradezu solche Apparate, das Flageolet und die Flöten
abialpfeifen, die Harmonika und das Aeolodicon Zungen ohne Pfeifen,
arinetten, Bassethörner, Oboen, Fagotte sind Zungenpfeifen mit
n Zungen, Klarinetten und Bassethorn mit cylindrischem, Oboe und
mit kegelförmigem Ansatzrohr, bei denen die Zunge der Spitze des
sehr nahe liegt; die Erzeugung des Tones ist daher bei allen diesen
nenten nach dem Vorigen klar.

ir haben nur einiges hinzuzusetzen, um die Mittel zu erklären, durch
man auf diesen Instrumenten anstatt des Grundtones und der harmo-
Töne eine ausgedehnte Reihe von Tönen erzeugt.

fenn man in die Wand einer Pfeife (Fig. 277) an irgend ein
ch einbohrt, so kann an dieser Stelle die Luft auch nach
ngen als nach der Längsaxe der Röhre bei einer ankomm
g entweichen, es tritt demnach auch dort eine
de einer offenen Pfeife; es muß bei stehen

sich ein Schwingungsmaximum bilden. Blasen wir eine offene Pfeife so an, daß sie ihren zweiten Ton gibt, also mit zwei Knoten, jeder $\frac{1}{4}$ vom Ende der Röhren und einem Schwingungsmaximum in der Mitte, so wird es demnach keine Änderung in dem Tone der Pfeife machen, wenn wir in der Mitte der Wand eine Öffnung herstellen, da sich dort schon ein Schwingungs-

Fig. 277.



maximum befindet. Durch die Öffnung in der Wand wird die Pfeife gewissermaßen halbiert und der Ton wird der Grundton dieser halb so langen Pfeife. Öffnen wir dagegen die Pfeife bei a oder an der Stelle des untern Schwingungsknotens bei e Fig. 277, so muß jetzt an diesen Stellen ein Schwingungsmaximum entstehen und der Ton springt in die höhere Oktave über, die Luftsäule zerlegt sich in sechs schwingende Abteilungen, deren Knoten $\frac{1}{6}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{6}$, $\frac{5}{6}$ der Länge der Röhre von dem Boden der Pfeife entfernt sind.

Ebenso würde eine Änderung des Tones entstehen müssen, wenn wir an irgend einer andern Stelle der Wand außer bei b eine Öffnung anbringen, da stets an dieser Stelle ein Schwingungsmaximum eintreten muß, die Länge der schwingenden Abteilungen also geändert wird. Je nach der Stelle der Öffnung wird dann der Ton ein anderer.

Ganz dasselbe ist der Fall, wenn wir durch verändertes Anblasen einen der andern Töne der Pfeife hervorbringen; auch dann wird eine angebrachte Öffnung im allgemeinen den Ton ändern und durch eine Öffnung an einer bestimmten Stelle können wir einen bestimmten Ton hervorrufen. Diesen Kunstgriff wendet man bei den meisten Blasinstrumenten an, um eine bestimmte Tonreihe zu erhalten, sowohl bei den Flöten als den Zungeninstrumenten, den Klarinetten etc.

Haben wir zum Beispiel eine Flöte, deren Rohr als Grundton den Ton d_1 angibt und versehen wir dieselbe in passenden Abständen mit sechs Öffnungen von ihrem Ende zur Mundöffnung hin, so wird die Flöte beim Verschlusse aller der Löcher den Ton d_1 geben; öffnen wir sie nun nach und nach, so werden wir dadurch die Reihe der Töne $e_1, f_1, g_1, a_1, b_1, c_2$ erhalten können.

Um z. B. den Ton a_1 zu erhalten, bedarf es nicht einmal einer Öffnung der weiter von dem Mundloch entfernten Löcher, bleiben die drei letzten Löcher geschlossen und wir öffnen nur das dritte Loch, von der Mundöffnung an gerechnet, so muß schon der Ton a_1 entstehen.

Durch verstärktes Anblasen erhalten wir dann bei geschlossenen Löchern den zweiten Ton der Röhre d_2 , und bei reihenweiser Öffnung erhalten wir dann die Oktaven der vorigen Töne e_2, f_2 u. s. w. Werden dann noch weitere Öffnungen oder Klappen zwischen den vorigen angebracht, um die erhöhten oder vertieften Töne dis, fis - - zu erzeugen, so sind wir imstande, mit diesem Instrumente die Töne der chromatischen Tonleiter durch je zwei Oktaven d_1 bis d_3 und andere höhere Töne zu erzeugen.

Bei den Blechblasinstrumenten, Trompete, Horn, Posaune hat man diese Hilfsmittel der Tonveränderung nicht, sie sind deshalb auf ihre natürlichen Töne beschränkt. Da diese Instrumente aus langen kegelförmigen Röhren bestehen, bei welchem das Mundstück der Spitze des Kegels ent-

nahe liegt, so ist die Tonreihe dieser Instrumente sehr nahe derjenigen der offenen Pfeife gleich. Um die verschiedenen hohen Töne hervorzubringen, hat der Bläser hier nur das Mittel, die Stärke des Luftstromes damit die Schnelligkeit, mit denen die Öffnungen des Mundes sich schließen, zu ändern. Je stärker der Luftdruck ist, um so rascher folgen sich einzelnen Stöße, ein um so höherer Ton tritt aus dem Instrumente hervor. Die Kunst des Bläfers ist es, die betreffenden Drucke für die einzelnen Töne im Gefühl zu haben und hervorzubringen.

Um eine große Anzahl von Tönen auf diesen Instrumenten zu haben, macht man sie sehr lang und gibt ihnen nur eine kleine Weite, da die Erfahrung gelehrt hat, daß die engen Röhren leichter ansprechen. Das Horn hat nach Zamminer eine Länge von 27 Fufs, sein Grundton ist daher es_{-2} , die Reihe der Töne ist

1 es_{-2}	9 f_1	17 c_2
2 es_{-1}	10 g_1	18 f_2
3 b_{-1}	11 $as_1 +$	19 $fis_2 +$
4 es	12 b_1	20 g_2
5 g	13 $h_1 +$	21 $gis_2 +$
6 b	14 $c_2 +$	22 $as_2 +$
7 $des_1 -$	15 d_2	23 $a_2 +$
8 es_1	16 es_2	24 b_2

Die ersten beiden Töne werden nicht gebraucht, in den höhern Lagen hat man, liegen die Töne ziemlich nahe beisammen, sie sind indes zum Höheren als die hingeschriebenen. Um diese Töne brauchbar zu machen, immet man dieselbe Art des Stimmens an, wie bei den offenen Pfeifen, man macht die Instrumente zu teilweis gedeckten, indem der Spieler die kalte Faust in die trichterförmige Erweiterung bringt. Bei den Posaunen sind die Auszüge des Rohres nach, die gleichzeitig den Zweck haben, die Instrumente in verschiedenen Tonarten brauchen zu können. Bei den andern erreicht man letzteres durch Einschieben von Röhrenstücken in Windungen.

In neuerer Zeit hat man auch an den Blechinstrumenten Klappen zur Änderung der Tonhöhe angebracht, der Klang solcher Instrumente hat es eine viel geringere Fülle.

Die Klänge der Zungeninstrumente sind viel schärfer als jene der Flöten und Streichinstrumente, da in ihnen wegen der scharfen Discontinuität bei der Tonerzeugung, der einzelnen durch den Schluß der Zunge unterbrochenen Stöße, viel mehr und höhere Obertöne vorhanden sind. Die schärfsten Klänge haben die Blechblasinstrumente, da in diesen die schnellern Schwingungen der hohen Töne nicht so rasch vernichtet werden. Darin beruht im wesentlichen die Klangverschiedenheit zwischen Blechinstrumenten und den theoretisch ähnlich gebauten Holzblasinstrumenten wie Oboe und Fagott. Der Unterschied letzterer gegen die Klarinette beruht in der Verschiedenheit der Obertöne, die Klarinette nur die ungeradzahlgigen, Oboe und Fagott haben auch die geradzahlgigen.

§ 166.

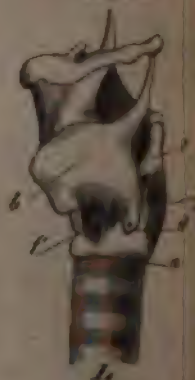
Die menschliche Stimme. Das menschliche Stimmorgan ist nach den Untersuchungen von Johannes Müller¹⁾ als eine Zungenpfeife anzusehen, da der Vorgang, mittels dessen wir die Töne erzeugen, sowie die Mittel, um ihre Höhe zu ändern, wesentlich mit denen der Zungenpfeifen übereinstimmen.

Das Stimmorgan des Menschen befindet sich im Kehlkopf *k* an dem obern Ende des die Lungen mit der Mund- und Nasenhöhle *M* und *N* Verbindung setzenden Luftweges, der Luftröhre *L* (Fig. 278 und Fig. 279).

Fig. 278.



Fig. 279.



Der Kehlkopf ist aus einer Anzahl fester Knorpel gebildet, zwischen denen die Stimmbänder ausgespannt sind. Die feste Basis des Kehlkopfes ist der Ringknorpel, cartilago cricoides, ein fester Ring, der das untere Ende der Luftröhre umschließt, *a* Fig. 278 im Durchschnitte, und Fig. 279 von der Seite gesehen, und welcher hinten höher ist als vorn. Auf ihm ruht als größere, aber nach hinten offene Umhüllung des Kehlkopfes der Schildknorpel, cartilago thyreoides, *b* Fig. 278 und Fig. 279, bestehend aus zwei Platten, die mit ihren vorderen Rändern in einer nach oben

¹⁾ Johannes Müller, Handbuch der Physiologie des Menschen. Bd. II.

so hervorspringenden Kante fest verwachsen zusammenstoßen, wie 278 bei *b* im Durchschnitt, 279 bei *b* von der Seite und Fig. 280 oben gesehen zeigt.

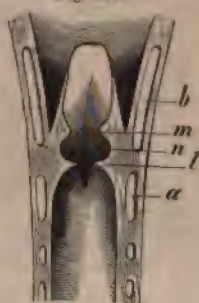
Der Schildknorpel ist um eine Axe drehbar, *d* Fig. 279 und 280, die an einem Fortsatze befindet, welcher von der untern Ecke des hintern Randes der Schildknorpelplatte an jeder Seite ausgeht, und welcher vorderseits im Ringknorpel befestigt ist. Die Richtung der Axe, um welche der Schildknorpel drehen kann, ist Fig. 280 durch die Linie *cc* angedeutet; die Bewegung, welche er also annehmen kann, ist nach vorn und ab gerichtet und nach hinten und hinauf. Der Kante des Schildknorpels, welcher die beiden Platten zusammenstoßen, gegenüber, stehen auf dem hintern hintern Rande des Ringknorpels dicht neben einander, die beiden Gießbeckenknorpel, *cartilagines arytaenoides*, *c* Fig. 279 von der Seite 280 von oben gesehen. Ihre Basis steht mit dem Ringknorpel durch Gelenk in Verbindung, das ihnen gestattet, sich erstens vor- und rückwärts zu bewegen, also sich dem Schildknorpel zu nähern und von ihm zu entfernen, zweitens nach rechts oder links zu bewegen, also einander zu nähern oder von einander zu entfernen.

Von der Basis jedes der Gießbeckenknorpel springt eine Ecke nach oben, der *processus vocalis*. Zwischen diesen beiden Ecken und der hervorspringenden Kante, in welcher die beiden Platten des Schildknorpels zusammenstoßen, sind die Stimmbänder *l* (Fig. 278, 280, 281) ausgespannt.

Fig. 280.



Fig. 281.



selben sperren die Luftröhre bis auf eine schmale Ritze, die Stimmritze, die in der Ansicht von oben (Fig. 280) dunkel gehalten ist, ab. Nur eine kleine Öffnung befindet sich als Verlängerung der Stimmritze oben den Rändern der Gießbeckenknorpel, die sogenannte Athemritze. gewöhnlich sind wahrscheinlich die Stimmbänder ganz zusammengelegt, die Stimmritze geschlossen, so daß der Luftweg nur durch die Athemritze geöffnet ist.

Die Stimmbänder sind die Zungen des mit der Zungenpfeife zu verbindenden Stimmapparates, über ihnen befindet sich nun als Ansatzröhre Fortsetzung des Luftweges. Zunächst über den Stimmbändern befindet sich eine nach oben von zwei parallel mit den Stimmbändern verlaufenden Falten, den falschen Stimmbändern *m* (Fig. 281) verschlossene Röhre, der *ventriculus Morgagni* *n* (Fig. 278 und Fig. 281). Die falschen Stimmbänder verbinden die Gießbeckenknorpel mit dem Kehlkopf, der

epiglottis; und über ihnen endet sich der Luftweg in den Schlund, der in der Mundhöhle und Nasenhöhle ausläuft.

Das Stimmorgan vervollständigen die Muskeln, welche durch Bewegung des Schildknorpels und der Giefsbeckenknorpel die Stimmbänder schließen oder öffnen, spannen oder erschlaffen. Die Stimmbänder werden gespannt durch den musculus cricothyreoideus *f* (Fig. 279), welcher den Schildknorpel nach vorn, und den cricoarytaenoideus posterior *g* (Fig. 279 und Fig. 280), der den Giefsbeckenknorpel nach hinten herunter zieht. Die Stimmbänder werden erschlafft durch den musculus thyreoarytaenoideus *i* (Fig. 280), welcher den Schildknorpel und Giefsbeckenknorpel gegen einander und den musculus cricoarytaenoideus anterior *h* (Fig. 280), welcher den Giefsbeckenknorpel nach vorn zieht.

Die Stimmritze wird geschlossen durch die musculi arytaenoidei *k* (Fig. 280), welche an beiden Giefsbeckenknorpeln inserieren und dieselben gegen einander ziehen, sie wird geöffnet durch die beiden musculi cricoarytaenoidei *g* und *h* (Fig. 280), welche, indem sie zusammenwirken, die Giefsbeckenknorpel seitwärts herabziehen.

Durch Versuche an aufgeschnittenen Kehlköpfen sowohl, als an lebenden Menschen, welche eine Luftröhrenfistel besaßen und durch Beobachtungen mit dem Kehlkopfspiegel ist es nun erwiesen, daß zur Tonbildung die Athemritze vollständig geschlossen und ebenso die Ränder der Stimmbänder fast vollständig an einander gelegt werden. Zugleich müssen die Stimmbänder durch die betreffenden Muskeln in einem gewissen Grade gespannt sein.

Der aus den Lungen dringende kräftige Luftstrom öffnet die Stimmritze, deren Bänder dann gerade so wie die Zunge der Zungenpfeife in Schwingungen geraten. Diese Schwingungen sieht Johannes Müller als das Tongebende an, nicht die durch das abwechselnde Schließen oder mehr oder weniger Öffnen derselben entstehenden Luftstöße. Die Gründe, welche ihn bestimmen, von der Weberschen Ansicht der Tonbildung bei den Zungenpfeifen abzugehen¹⁾, sind indes nach Seebecks Kritik derselben²⁾ nicht beweisend.

Was indes als das eigentlich Tonbildende anzusehen sei, ist im Effekt ziemlich einerlei, da so wie so die Tonhöhe nach beiden Ansichten von der Schwingungszahl der Bänder abhängt, indem jeder ganzen Schwingung derselben auch ein Stoß der austretenden Luft entspricht.

Bei der menschlichen Stimme haben wir einen doppelten Apparat zu unterscheiden, den tongebenden, der die Höhe der Töne bestimmt, und den Sprechapparat, der sie zu artikulierten Lauten macht.

Die höheren Teile der Luftwege, der ventriculus Morgagni und der Schlund dienen in Bezug auf die Töne der menschlichen Stimme nur wie ein Schallbecher bei der Zungenpfeife, sie dienen, indem die in ihnen enthaltene Luftsäule und die umgebenden Weichteile mitschwingen, nur zur Verstärkung des Tones. Müller zeigte das an ausgeschnittenen Kehlköpfen. Beim Anblasen von unten gaben die unteren Stimmbänder bei enger Stimmritze einen vollen und reinen Ton, der den Tönen der menschlichen Stimme nahe kam, und die sich von den Tönen, welche man bei Anwesenheit des

¹⁾ J. Müller a. a. O. p. 175.

²⁾ A. Seebeck, in Doves Repertorium. Bd. VI.

tricularis Morgagni, der oberen Stimmbänder und der epiglottis erhielt, nur durch geringere Stärke unterscheiden.

Die Tonhöhe hängt nur von der Spannung der Stimmbänder ab und von ihrer Länge, nicht aber davon, ob die Stimmritze etwas mehr oder weniger geöffnet ist, jedoch spricht der Ton leichter an bei enger Stimmritze.

Die menschliche Stimme hat überhaupt einen Umfang von nicht ganz vier Oktaven, die sich aber niemals in einem Individuum vereinigt finden, sie reicht vom sogenannten großen *E*, also dem Tone c_{-1} bis zum dreiestrichenen *C*. Man unterscheidet Männer- und Frauenstimmen, und bei letztern Bass und Tenor, bei letztern Alt und Sopran.

Der Umfang der Stimmen ist in der Regel

Bass	c_{-1}	— f_1
Tenor	c	— h_1 oder c_2
Alt	f	— f_2
Sopran	c_1	— c_3

Die Stimmapparate unterscheiden sich bei diesen Stimmen durch die Länge der Stimmbänder. Bei den Männern springt die Kante des Schildknorpels viel weiter vor als bei den Frauen, und von den Männern heissen die Bassisten die größten Kehlköpfe. Einige wenige Messungen von Johannes Müller haben als mittlere Länge der männlichen Stimmbänder 8 und der weiblichen Stimmbänder etwas über 12 Millimeter, also ein Verhältnis von 3 : 2 ergeben.

An einem und demselben Individuum werden die verschiedenen Töne durch verschiedene Spannung der Stimmbänder hervorgebracht. An ausgeschnittenen Kehlköpfen hat Müller durch Steigerung der Spannung von etwa 8 bis zu 560 Gramm den Ton um mehr als zwei Oktaven erhöht, nämlich bei einem männlichen Kehlkopf von *ais* bis *dis*₃. Die verstärkte Spannung, die wir bei den hohen Tönen durch die rasche Ermüdung der Stimme fühlen, ist indes nicht das Einzige, welches die Höhe des Tones bestimmt. Versuche von Müller und die bekannte Erfahrung, daß wir die höchsten Töne nur im Forte, die tiefsten nur im Piano singen können, weisen, daß die Tonhöhe auch durch die Stärke des Luftstromes verändert wird.

Beobachtungen von Garcia mit dem Kehlkopfspiegel haben ferner gezeigt, daß bei verschiedenen hohen Tönen auch die Länge der schwingenden Membran sich ändert. Bei einem Tenoristen fand er, daß bei *d*, *e*, *f* die Bandknorpelränder der glottis ihrer ganzen Länge nach schwingen, bei *d*₁ beginnen die hintern Enden der processus vocales sich an einander zu legen und bei *f*₁ und *g*₁ haben sich die proc. voc. ihrer ganzen Länge nach an einander gelegt, es schwingen nur noch die Bänder allein¹⁾.

Man sieht, alle diese Erfahrungssätze über die verschiedene Tonhöhe stimmen mit den Schwingungsgesetzen elastischer Streifen überein, verstärkte Spannung und Verkürzung der schwingenden Teile vergrößern ihre Schwingungszahl und somit die Tonhöhe, die Tonbildung des mensch-

¹⁾ Ludwig, Lehrbuch der Physiologie des Menschen. Bd. I. p. 572. In Hens Handbuch sind dessen sämtliche Versuche und ältere Erfahrungen, in Ludwigs Lehrbuch auch die neuern über die menschliche Stimme zusammengestellt.

lichen Stimmorgans stimmt demnach mit derjenigen der Zungenpfeifen überein.

Wegen der weiteren Erfahrungen über die menschliche Stimme, besonders über die verschiedenen Register, die Brust- und Fistelstimme müssen wir auf die Lehrbücher der Physiologie verweisen, da sie in physikalisch-akustischer Beziehung nichts Neues darbieten.

§ 167.

Die menschliche Sprache. Wenn die Endigungen des Luftweges, der Schlund und die Mundhöhle, auf die Tonhöhe keinen Einfluß haben, so sind sie das allein Bedingende bei der Artikulation, bei der Modifikation der Töne zu Lauten; es ist die Aufgabe der Physik, das Wesen der Laute akustisch zu definieren, und die der Physiologie zu zeigen, wie durch geänderte Stellung der Sprachwerkzeuge diese Klangverschiedenheiten zustande kommen.

Dafs die verschiedenen Vokaltöne nichts sind als Klangverschiedenheiten, und dafs sie somit den verschiedenen den Grundton begleitenden Obertönen zuzuschreiben sind, hat zuerst Wheatstone¹⁾ behauptet, der volle Nachweis ist indes erst Helmholtz²⁾ gelungen, indem er einmal mit Hilfe der Resonatoren die die verschiedenen Vokalklänge zusammensetzenden Partialtöne bestimmte, und ganz besonders, indem es ihm gelungen ist, mit Hilfe einfacher Töne die Vokalklänge zusammenzusetzen.

Das Mittel, um die einfachen Töne zu erzeugen, lieferten ihm Stimmgabeln, welche in der Weise wie Fig. 282 es zeigt, vor Resonanzröhren aufgestellt waren. Die Stimmgabel *a* (Fig. 282) ist mit ihrem Stiel in das Fußbrett *dd* eingeschraubt, welches auf untergeklebten Stücken von Gummischläuchen ruht, damit die Schwingungen der Gabel nicht direkt auf den Tisch übertragen werden. Die oberen Enden der Stimmgabelzinken befinden sich zwischen den Schenkeln des Elektromagnetes *bb*, gerade den Polflächen desselben gegenüber-gestellt. Die Schwingungen der Gabel werden durch intermittierende elektrische Ströme erregt, welche den Elektromagnet während jeder Schwingung der Gabel und zwar in dem Momente, in welchem die Zinken der Gabel sich von einander zu entfernen beginnen, magnetisch machen. Um den elektrischen Strom genau in dieser Weise zu unterbrechen, wandte Helmholtz als Stromunterbrecher ebenfalls eine Stimmgabel an, in der Weise wie Fig. 283 angeordnet. Der von der galvanischen Batterie gelieferte Strom tritt in die Messingsäule *i*, welche oben ein zur Hälfte mit Quecksilber, zur Hälfte mit Alkohol gefülltes Näpfchen *d* enthält. In das Quecksilber dieses Näpfchens taucht ein Platindraht *c*, der an der oberen Zinke der Stimmgabel befestigt ist, so eben hinein, so dafs der Strom aus dem Quecksilber in die Stimmgabel tritt und durch diese bis zur Klemme *e* geleitet wird. Von der Klemme *e* tritt der Strom dann in die den Elektromagnet umgebenden Drähte und von diesen aus weiter in die Drahtleitung, welche die Elektromagnete der tönenden Stimmgabeln enthält. Dadurch.

¹⁾ Wheatstone in seiner Kritik über Versuche von Willis, der zuerst mit diesen die Vokale künstlich zu bilden versuchte (Poggend. Ann. Bd. XXIV).

²⁾ Westminister Review 1837 October.

Helmholtz, Tonempfindungen, p. 163 ff. und p. 184 ff.

Der Strom den Draht des Elektromagnets *bb* (Fig. 283) durchläuft, der Magnet erregt, und mit ihm alle Magnete der tönenden Stimmgabel. Der Magnet *bb* zieht dann die Zinken der Stimmgabel an, damit

Fig. 282.

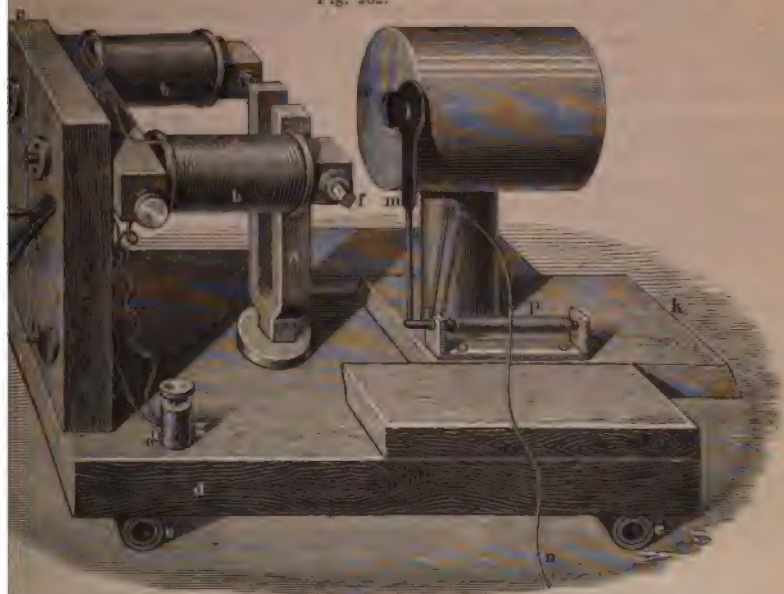
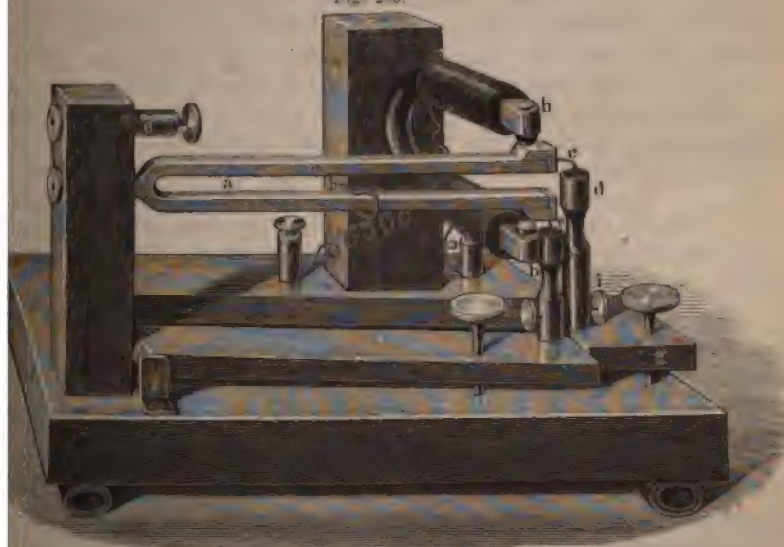


Fig. 283.



Draht *c* aus dem Quecksilber empor und unterbricht an dieser Stelle Stromkreis und damit den Strom. Sofort aber verlieren auch die Zinken ihren Magnetismus, und die Zinken der Gabel schwingen mit der

durch ihre Dimensionen bedingten Geschwindigkeit gegen ihre Gleichlage hin und darüber hinaus. Der Draht *c* taucht infolge dessen in das Quecksilber, der Strom wird neuerdings geschlossen und dies wiederholt sich in der angegebenen Weise.

Ist die Unterbrechungsgabel mit der Gabel (Fig. 282) genau so wird die Gabel *a* jedesmal, wenn die Zinken durch die Gleichlage nach aufsen sich bewegen, eine kurze Zeit vom Magneten, an sie erhält also bei jeder Schwingung einen neuen Antrieb, und die Bewegung dauert ungeschwächt fort, so lange der Unterbrechungsgabel Thätigkeit bleibt. Dasselbe ist aber auch der Fall, wenn die (Fig. 282) genau $2, 3 \cdot n$ mal öfter schwingt als die Unterbrechungsgabel, nur daß diese Gabeln dann erst nach je $2, 3 \dots n$ Schwingungen neuen Anstoß erhalten.

Um diesen genauen Isochronismus der Gabeln herzustellen, ist die Gabel *a* (Fig. 283) ein kleiner Schieber *h* angebracht, durch dessen Bewegung man die Schwingungsdauer der Gabel etwas verändern kann; wenn man den Schieber dem Ende der Gabel näher gebracht, so wird dadurch das Hebelmoment der schwingenden Masse etwas vergrößert, und die Schwingung wird langsamer.

Die auf diese Weise erregten Schwingungen der Gabel *a* (Fig. 283) geben keinen hörbaren Ton, wie ja überhaupt eine in freier Luft schwingende Gabel nur gehört werden kann, wenn man sie unmittelbar vor sich hält. Um den Ton hörbar zu machen, ist vor der Gabel eine Resonanzröhre angebracht, eine gedeckte Pfeife, welche in der Mitte des dem zugewandten Bodens eine kreisförmige in der Höhe der Zinkenenden befindliche, mit dem Deckel *l* verschließbare Öffnung hat. Befindet sich die Röhre mit geöffnetem Deckel nahe vor der Gabel, so wird sie, wie der Grundton mit dem der Gabel übereinstimmt, wie eine Pfeife zum Tönen gebracht, und der Ton der Gabel tritt ohne Oberton deutlich hervor. Sind die Röhre passend zu stimmen, sind die Dimensionen derselben nach den Sätzen des § 162 passend zu wählen. Um den Ton der Gabel stärker und schwächer machen zu können, ist die Röhre auf einem Schlitten *k* befestigt, so daß man die Röhre der Gabel näher oder entfernt stellen kann. Andererseits kann man den Ton auch dadurch schwächen, daß man durch teilweise Bedeckung der Öffnung die Röhre etwas abstimmt, wodurch der Ton der Röhre beträchtlich geschwächt wird.

Zu seinen ersten Versuchen wählte Helmholtz acht Gabeln der beschriebenen Art an, die tiefste gab den Ton b_{-1} , die übrigen gaben die sieben ersten Obertöne, $b, f_1, b_1, d_2, f_2, a_3$ und b_3 , später ließ er diesen noch d_3, f_3, a_3 und b_4 hinzutreten und benutzte dann als Grundton den zweiten Gabel, b .

Ist der Apparat in Gang gebracht mit geschlossenen Resonanzröhren, so hört man zunächst nur ein leises Summen. Öffnet man dann die Röhren mit dem Ton b_{-1} , so hört man ein dumpfes *U*, viel dumpfer als der menschlichen Sprache. Der Klang wird dem gesungenen *U* ähnlich, wenn man schwach den zweiten und dritten Ton b und f_1 mittönen läßt.

Der Vokal *O* entstand, wenn bei etwas gedämpftem b_{-1} der Oberton b sehr stark und schwächer b_1, f_1 und d_2 angegeben wurde.

Ein nach *O* gezogenes *A*, das schwedische \bar{A} entstand, als die Töne a_2 , as_2 und b_2 , also die Töne 5—8 möglichst stark genommen wurden, tieferen dagegen geschwächt waren.

A, \bar{A} und *E* gelang es Helmholtz mit den zwölf Gabeln vom *b* anzustellen. Dann gibt *b* allein *U*, dasselbe stark von b_1 , schwächer von f_1 begleitet. *O*, *A* erhält man, wenn man zu *b* zunächst b_1 und f_2 mäßig, dagegen b_2 und d_2 als charakteristische Töne kräftig tönen läßt. *A* in \bar{A} überzuführen, muß man b_1 und f_2 , die Nachbarn des tiefern charakteristischen Tones d_2 etwas verstärken, b_2 dämpfen, dagegen d_3 und möglichst stark hervortreten lassen. Für *E* muß man die beiden tiefsten der Reihe *b* und b_1 mäßig stark halten als Nachbarn des tiefern Verzungstones f_1 , und die höchsten f_3 , as_3 , b_3 möglichst heraustreten lassen. *I* und \bar{U} herzustellen, gelang nicht, da die diese Vokale charakterisierenden sehr hohen Obertöne sich nicht mit Gabeln herstellen ließen.

Dafs die zur künstlichen Darstellung benutzten Bestandteile der Vokale Hilfe der Resonatoren in den gesungenen oder gesprochenen Vokalen nachgeahmt wurden, ja dafs man gerade durch derartige Beobachtungen die Bestandteile kennen lernte, braucht wohl nicht besonders hervorgehoben werden. Es mag nur in Bezug auf die Analyse der Vokale bemerkt werden, dafs die in § 160 beschriebenen Flammenapparate von König für alle vorzugsweise geeignet sind. Eine interessante Anwendung hat sich von dem Fig. 262 angegebenen Apparate gemacht. Da die verschiedenen Vokale durch Kombination der verschiedenen Partialtöne charakterisiert sind, so liefert natürlich jeder Vokal ein eigentümliches Flammenbild, welches bei der geringsten Änderung des Vokalklanges sich ebenfalls ändert. Man hat nun durch solche Flammenbilder nicht nur die einzelnen Vokale, sondern auch die verschiedenen Nüancen derselben gezeichnet, wenn man Vokale in verschiedener Tonlage singt, so dafs man mit Hilfe der Flammenbilder genauer als auf irgend einem andern Wege jede Vokalnüance benennen kann¹⁾. Fig. 284 und Fig. 285 zeigen die Bilder für die Vokale *U* und *O*, wie ich sie erhielt, jeden auf *c* gesungen und mit möglichster Reinheit im reinen Vokalklang gehalten; besonders bei *O* gibt die geringste Veränderung ein anderes Bild.

Ehe wir zur Besprechung der Bildung der Vokale in der menschlichen Stimme übergehen, wird es gut sein, darauf hinzuweisen, dafs gerade mit Hilfe dieses Stimmgabelapparates von Helmholtz der bereits § 160 erwähnte Apparat geliefert wurde, dafs die Phase der komponierenden Teiltöne auf den Klang ohne Einflufs ist. Wir erwähnten soeben, dafs man die Schwächung eines Stimmgabeltones durch weitere Entfernung der Resonanzröhre oder teilweises Schließen des Deckels erhalten kann; letzteres Mittel bewirkt eine kleine Verstimmung des Tones und bewirkt dadurch, dafs die

¹⁾ König, Poggend. Ann. Bd. CXLVI. Tafel III des Bandes gibt die Flammenbilder der 5 Vokale *U*, *O*, *A*, *E*, *I*, für jeden Ton der beiden, der der Stimme entsprechenden Oktaven c_{-1} bis c_1 . Für *E* und *I* sind die Bilder, die König auch hervorhebt, wenig charakteristisch. Die Bilder sind indes individuelle, bei einer andern Stimme fallen sie anders aus, da nicht bei allen Individuen die verschiedenen Obertöne in derselben Weise verstärkt werden (Helmholtz, Tonempfindungen III. Ausgabe p. 163). So entsprechen die oben beschriebenen Bilder wenig der Königschen Zeichnung.

Schwingungen etwas rascher oder langsamer werden, somit daß die Schwingungen einer verstimmtten Gabel mit den andern nach und nach in immer andern Periode zusammentreffen. Wurde nun ein Vokalklang deutlich erhalten, dadurch daß der Ton einer Gabel durch Verschiebung der Resonanzhöhe geschwächt wurde, so erhielt man genau denselben Klang, wenn der Ton durch Schließung des Deckels geschwächt wurde; da aber im letztem Falle die Phase der komponierenden Töne eine relativ immer andere wurde, so folgt aus diesem Versuche, daß die Phase auf die Klangfarbe von keinem Einflusse ist.

Fig. 284.



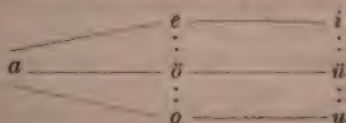
Fig. 285.



Die Möglichkeit einer so reichhaltigen Klangbildung durch die menschliche Stimme ist durch die Form unseres Sprachorganes gegeben. Wir haben vorhin unser Sprachorgan als eine Zungenpfeife mit weichen Zungen bezeichnet. Von den gewöhnlichen Zungenpfeifen dieser Art unterscheidet es sich aber wesentlich dadurch, daß die Pfeife, das Schallrohr nicht eine unveränderliche Gestalt hat, sondern durch unsern Willen willkürlich geändert werden kann. Das Schallrohr der menschlichen Stimme sind die höheren Teile der Luftwege über dem Kehlkopf und ganz besonders die Rachenhöhle und Mundhöhle. Durch die Beweglichkeit der weichen Teile in den Umgebungen dieser Höhlen, den weichen Gaumen, die Zunge und die Lippen können wir diesen Höhlen die verschiedensten Gestalten geben und es ist nach den Bemerkungen über die Tonbildung bei den weichen Zungen klar, daß es wesentlich von der Form der Rachen- und Mundhöhle abhängig ist, welche von den harmonischen Obertönen eines von der Stimmgabel gebildeten Grundtones verstärkt werden, welche nicht. Denn wie wir im Schluß des § 165 erwähnten, sind in jedem durch Zungen gebildeten Klange die Obertöne in großer Zahl vorhanden, alle, die deshalb bei einer bestimmten Stellung der Mundhöhle infolge der Resonanz verstärkt werden finden sich in dem Klange, welcher dieser Stellung der Mundhöhle entspricht. Es sind das vorzugsweise die Töne, welche die Mundhöhle in dieser bestimmten Form als einfache Pfeife angeblasen geben würde. Wenn

Die das sind, bestimmte Helmholtz¹⁾ im allgemeinen dadurch, daß er vor der Mundöffnung Stimmgabeln hielt, und den Ton aufsuchte, der bei einer bestimmten Vokalstellung des Mundes die stärkste Resonanz gab.

Daß in der That die der Mundhöhle gegebene Form für die Bildung der Vokale von wesentlichem Einfluß ist, hat man schon früher erkannt²⁾, indem schon der ältere Du Bois Reymond die Vokale in drei Reihen ordnete, nach der Stellung des Mundes. Die drei Reihen sind



Der Vokal *A* ist der gemeinsame Ausgangspunkt für alle drei Reihen. Bei seiner Bildung nimmt die Mundhöhle eine ziemlich gleichförmig trichterförmig erweiterte Gestalt an. Bei *O* und *U* wird die Mundhöhle vorn mit den Lippen verengert, so daß sie bei *U* am engsten ist, während sie in der Mitte durch Herabziehen der Zunge erweitert wird. Sie nimmt also die Gestalt einer Flasche ohne Hals an, deren Öffnung vorn der Mund ist. Der Ton einer solchen Flasche ist um so tiefer, je enger die Öffnung ist, so daß dem entsprechend fand Helmholtz, daß bei der *U*-Stellung des Mundes der Eigenton der Mundhöhle *f* ist³⁾, und zwar ziemlich gleichmäßig bei männlichen und weiblichen Mundhöhlen, bei welchen letzteren das, was der Schlund an Geräumigkeit abgibt, durch engern Verschluss ersetzt wird. Der Eigenton der Mundhöhle bei *O* ist *b*. Geht man vom *O* allmählich über *Oa* und *Ao* zum *A*, so wird der Mund offener, und der Ton der Mundhöhle steigt um eine Oktave bis *b*₂⁴⁾.

Beim Übergang vom *A* durch *Ac* in *E* und *I* wird die Gestalt der Mundhöhle eine ganz andere. Die Lippen werden dabei zurückgezogen und geöffnet, die Zunge gehoben, so daß zwischen Zunge und hartem Gaumen ein enger Kanal bleibt, während der Raum unmittelbar über dem Kehlkopf durch Herabdrücken der Zungenwurzel erweitert wird. Die Mundhöhle bekommt also die Gestalt einer Flasche mit engem Halse, den Bauch der Flasche bildet der Schlund, den Hals der enge Kanal zwischen Zunge und Gaumen, der Hals ist am engsten bei *I*, seine Länge von dem hintern Rande der Flasche bis zum hintern Rande des Gaumes fand Helmholtz gleich 1 Centimeter.

Derartige Flaschen haben zwei Grundtöne, den des Bauches für sich und den des Halses, den man, besonders wenn er gegen den Bauch sehr lang ist, als eine beiderseits offene Röhre ansehen kann. Dem entsprechend

¹⁾ Helmholtz, Tonempfindungen p. 166 ff.

²⁾ Du Bois Reymond, Norddeutsche Zeitschrift von De la Motte Fouquet 17. Helmholtz a. a. O. p. 167.

³⁾ Donders gibt die höhere Oktave *f*₁, welche auch Auerbach, Wiedemann in Bd. III durch Perkussion der Mundhöhle findet. Wie mir vor einigen Jahren Weinhold zeigte, kann man die Mundhöhle durch einen kräftigen Luftstrom, den man an dem in der *U*-Stellung befindlichen Munde wie am Mundloch einer Flöte vorüber führt, tönend anblasen, man erhält dann bei richtiger Stellung stets einen nahe dem *f*₁ liegenden Ton.

⁴⁾ Auerbach a. a. O. gibt *f*₁.

hat die Mundhöhle bei *Ae*, *E* und *I* zwei Eigentöne, bei *Ae* die Töne d_1 und g_3 bis as_3 , bei *E* die Töne $f_1^{1)}$ und b_3 und bei *I* als tiefsten Ton etwa f_1 , wie bei *U* und als Ton des Halses d_4 .

Die Vokale *Ö* und *Ü* unterscheiden sich von *E* und *I* dadurch, daß bei ihnen auch die Lippen röhrenähnlich geformt werden, so daß diese eine Fortsetzung des engen Kanales bei *E* und *I* bilden. Für diese Vokale ändert sich deshalb nur der Ton des Halses, er wird tiefer als bei *E* und *I*, er wird cis_3 und g_3 bis as_3 wie bei *Ae*. Die tiefern Eigentöne bleiben f_1 und $f_1^{2)}$.

Wie eben erwähnt wurde, sind es nun gerade die Obertöne des Klangs, welche mit den Eigentönen des Mundes zusammenfallen oder doch ihnen nahe genug sind, welche vorzugsweise verstärkt werden, während die andern gedämpft werden, und eine Vergleichung der zuletzt gemachten Angaben mit den bei der künstlichen Bildung der Vokale angegebenen charakteristischen Tönen der einzelnen Vokale wird die Übereinstimmung beider und damit erkennen lassen, daß das Wesen der Vokalbildung in dem durch die Form der Mundhöhle bewirkten Auftreten der verschiedenen Obertöne bedingt ist. Es wird eben jedesmal, auf welchen Grundton wir einen Vokal auch bilden, immer derjenige Oberton des Grundtones, am meisten verstärkt, der dem Eigentone der Mundhöhle am nächsten kommt. Die Vokalklänge unterscheiden sich von den Klängen der übrigen musikalischen Instrumente gerade dadurch, daß die Stärke ihrer Obertöne nicht von der Ordnungszahl derselben, sondern von deren absoluter Tonhöhe abhängt. Wird z. B. der Vokal *A'*, dessen charakteristischer Ton b_2 ist, auf die Note es_{-1} gesungen, so ist der verstärkte Ton der 12. Ton des Klangs, wird derselbe Vokal auf b_1 gesungen, so ist der verstärkte Ton der zweite des Klangs. Daher rührt es denn auch, daß der reine Vokalklang, besonders für die Vokale, deren charakteristischer Ton tiefer liegt, am besten bei gewissen Tonhöhen herauskommt, bei denen nämlich, bei welchen ein Oberton genau mit dem charakteristischen Ton zusammenfällt³⁾.

Zur Bildung der menschlichen Sprache gehört außer jener der Vokale auch die der Konsonanten; diese sind keine Selbstlauter, es sind nur Tönmehrungen oder Verzögerungen, welche durch das Anfangen oder Abschließen eines Vokallautes oder höchstens als Geräusche wahrnehmbar sind.

Nach Brücke⁴⁾ teilt man die Konsonanten je nach dem Orte des Verschlusses im Munde in drei Gruppen, an deren Spitze die drei mutae *p*, *t*, *k* stehen.

Die erste Gruppe bilden *p*, *b*, *f*, *v*, *w*, *m*; den Verschluss bilden ent-

¹⁾ Nach Auerbach g_1 bis a_1 .

²⁾ Nach Auerbach a_1 und f_1 .

³⁾ Wie es möglich ist, daß die Eigentöne der Mundhöhle auch durch solche Töne verstärkt werden können, zu deren harmonischer Reihe der Eigentön nicht gehört, werden wir im § 173 zeigen, wodurch der hauptsächlichste Einwand von Quantens gegen die Helmholtzsche Vokaltheorie (Poggend. Ann. CLIV) widerlegt wird. Genauer über die Zusammensetzung der Vokale, die Intensitätsverhältnisse der Partialtöne und die Abhängigkeit derselben von der Tonhöhe, auf welcher die Vokale angegeben werden, sehe man in der interessanten Abhandlung von F. Auerbach, Poggend. Ann. Ergbd. VIII und neue Folge Bd. III. Bd. IV, an welcher letzterer Stelle Auerbach auch die von der Helmholtzschen abweichende Vokaltheorie Graßmanns, Poggend. Ann. neue Folge (Wiedem. Ann.) Bd. I bespricht.

⁴⁾ Ludwig, Lehrbuch der Physiologie. S. 589.

weder die beiden Lippen oder eine der Zahnreihen mit den Lippen. *P* entsteht durch ein plötzliches Öffnen der vorher fest verschlossenen Lippen, während ein Luftstrom aus dem Kehlkopf gegen die Mundöffnung dringt, entsteht gerade so, nur sind die Lippen etwas weniger gespannt und das Öffnen geschieht etwas weniger energisch. *F* wird gebildet, indem wir die untere Lippe an die oberen Schneidezähne legen und einen Luftstrom hindurchsenden, desgleichen *v*, ein mildes *f*, und *w*, bei dem zugleich eine Hemmung des Luftstromes, ein dichter Verschluß stattfindet, welcher das *w* dem *b* nähert.

Das *m* entsteht schließlic, indem man die Lippen wie zu *b* stellt und die Luft mit tönender Stimme zur Nase hinausströmen läßt.

Die zweite Gruppe umfaßt *t*, *d*, die verschiedenen *s*, *l* und *n*. Für diese bildet die Zunge den Verschluß, indem sie sich entweder an die obern Schneidezähne oder an den vordern Teil des harten Gaumens anlegt. *T* wird gebildet durch Anstemmen der Zunge an die Schneidezähne und plötzliche Fortnahme derselben, *d* verhält sich zum *t*, wie *b* zum *p*.

Das harte *s*, *sz*, *ss* bildet sich, wenn bei der dem *t* zugehörigen Zungenstellung eine kleine Spalte geöffnet und durch diese Luft ausgestoßen wird, durch schwächeres Anstemmen entsteht das weiche *s*. Das *l* entsteht, wenn man den Verschluß der Zunge vorn wie bei *d* läßt, dagegen hinten neben den Backzähnen beiderseitig eine kleine Öffnung läßt, durch welche die Luft hindurchstreicht. Wird ferner die Zunge wie bei *t* gestellt und läßt man die Luft durch die Nase entweichen, so entsteht *n*.

In die dritte Gruppe gehören die Gaumenlaute *k*, *g*, *ch*, *j* und das Gaumen-*n* (vor *g* in *ng*). *K* entsteht wie *t* und *p*, nur daß der Verschluß hier von dem hintern Teile der Zunge und dem Gaumen gebildet wird. *G* entsteht aus *k* wie *b* und *d* aus *p* und *t*, *ch* wie *s* und *f*, nur daß auch hier zwischen dem tiefern Teile der Zunge und dem Gaumen die enge Öffnung bleibt, zwischen der der Luftstrom hindurchgeht.

J bildet sich, indem die Zunge mehr nach der Mitte hin sanft gegen den Gaumen angelegt und Luft durchgehaucht wird, und schließlich das Gaumen-*n*, indem die Zunge wie beim *ch* nur fester gegen den Gaumen gelegt wird und die Luft bei tönender Stimmritze durch die Nase entweicht.

Der noch übrig bleibende Konsonant *r* kann labial, lingual und guttural sein; er entsteht, indem wir einen der leichtschwingenden Mundteile mittels des Luftstromes in schwingende Bewegung versetzen, deren einzelne Stöße so langsam auf einander folgen, daß wir die einzelnen Stöße gesondert wahrnehmen; diese Schwingungen können die Lippen, die Zungenspitze, wenn sie wie zum *t* gestellt ist, und das Zäpfchen vollführen.

Zweites Kapitel.

Von der Ausbreitung und Wahrnehmung des Schalles.

§ 168.

Ausbreitung des Schalles in der Luft. Wir sahen in § 152, daß es zur Wahrnehmung des Schalles erforderlich sei, daß die Schwingungen des festen Körpers oder die andern tonerzeugenden Schwingungen auf ein

elastisches Medium übertragen und zu unserem Ohre fortgepflanzt werden. Da in einem jeden solchen Mittel die Schallschwingungen longitudinale werden, wie alle unsere Entwicklungen über den Schall zeigen, oder da es die longitudinalen Schwingungen der elastischen Medien sind, welche wir durch die gegen unser Gehörorgan ausgeübten Stöße als Schall wahrnehmen, so müssen die Gesetze der Ausbreitung des Schalles mit den Gesetzen der Verbreitung longitudinaler Wellen übereinstimmen, welche wir im vorigen Abschnitte entwickelt haben.

Zunächst folgt aus dem Früheren, daß der Schall sich von einem erregenden Mittelpunkte aus in kugelförmigen Wellen nach allen Richtungen ausbreiten muß.

Mit dem Abstände von der Quelle des Schalles muß dann die Intensität desselben abnehmen; und zwar nach einem bestimmten Gesetze. Die schwingende Bewegung, welche von einem Mittelpunkte ausgeht, teilt sich immer größern und größern Kugelwellen mit, und nach der Zeit t sind alle Luftteilchen auf einer Kugelschale in Bewegung, deren Radius r gleich ct ist. Das Maximum der Geschwindigkeit, welches diese Teilchen beim Verlassen ihrer Gleichgewichtslage besitzen, sei gleich v . Die Masse der zugleich bewegten Teilchen ist proportional der Größe der Fläche, auf der alle Teilchen zugleich bewegt werden oder proportional der Oberfläche der Kugel $4\pi r^2$.

Nach der Zeit t' werden ebenso alle Teilchen auf einer Kugelfläche vom Radius $r' = ct'$ eine Geschwindigkeit v' erhalten und die Masse der zugleich bewegten Teilchen ist $4\pi r'^2$.

Nach einem Satze der analytischen Mechanik ist die lebendige Kraft eines bewegten Systems konstant, wenn die Bewegung nur Folge ist von innern zwischen den einzelnen Punkten des Systems thätigen Kräften. Die schwingende Bewegung ist nun eine solche, bei welcher die Bewegung der einzelnen Punkte nur Folge der Elasticitätskräfte ist, demnach ist hier jener Satz anwendbar, oder es muß die Gleichung bestehen

$$4\pi r^2 \cdot v^2 = 4\pi r'^2 \cdot v'^2$$

oder

$$r^2 \cdot v^2 = r'^2 \cdot v'^2$$

$$v : v' = r' : r.$$

Die Geschwindigkeit, welche den einzelnen schwingenden Teilchen in verschiedenen Abständen vom Mittelpunkte der Schwingung erteilt wird, ist dem Abstände der Teilchen vom Mittelpunkte der Schwingung umgekehrt proportional. Nennen wir demnach die Geschwindigkeit im Abstände 1, v , so ist sie im Abstände r vom Mittelpunkte $\frac{v}{r}$.

Wir haben bereits bemerkt, daß wir die Intensität des Schalles der Stärke des Stoßes gleichsetzen, welchen unser Gehörorgan von den schwingenden Luftteilchen erhält. Die Stärke des Stoßes ist aber der lebendigen Kraft der stoßenden Teile proportional, da dieselbe durch die Größe des Weges gemessen wird, durch welchen der widerstehende Körper wirken muß, um die Geschwindigkeit des stoßenden zu vernichten. Da nun die Geschwindigkeit der schwingenden Teile abnimmt in demselben Verhältnis, wie sie weiter vom erregenden Mittelpunkte entfernt sind, und

da wir den Schall bei der konstanten Gröfse unseres Gehörorgans immer durch den Stoß einer gleichen Menge Luftteilchen vernehmen, so folgt, daß die Intensität des Schalles abnimmt, wie die Quadrate der Entfernung von der Quelle des Schalles wachsen.

Daß der Schall schwächer wird, wenn wir uns von der Quelle desselben entfernen, ist eine bekannte Thatsache, auch daß er rascher schwächer wird, als die Entfernungen wachsen, ist bekannt.

Genauere Messungen über die Abnahme der Schallstärke mit der Entfernung, wie überhaupt über die Stärke des Schalles gibt es nicht, da es für den Schall keinen exakten Messapparat gibt und die vorhandenen Sonometer nur dazu dienen können, ein Mehr oder Minder der Schallstärke zu zeigen, nicht aber genaue Messungen anzustellen. Es liegt das im Wesen des Schalles, der eigentlich nur in einer Empfindung besteht, da er nur eine besondere Wahrnehmung einer bestimmten Bewegungsart ist, und nur insofern Schall ist, als wir diese Bewegungsart mit unserem Ohre wahrnehmen; wir können denselben daher nur nach seinem Eindrucke auf das Ohr beurteilen. Auch beim Licht ist das zwar der Fall, daß wir es nur durch die Eindrücke auf das Auge beurteilen können, dort können wir aber mehrere Lichtwirkungen gleichzeitig beurteilen, wir können sie kompensieren, indem wir Flächen zugleich von entgegengesetzten Seiten beleuchten und auf manche andere Weise vergleichen. Schalle gleicher Qualität können wir aber nur, wenn sie nach einander wirken, mit einander vergleichen, und dadurch ist jede Messung ausgeschlossen.

Da der Schall eine Wellenbewegung ist, so muß die Geschwindigkeit seiner Verbreitung mit derjenigen der Wellenbewegung übereinkommen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung ist in einem und demselben Mittel konstant, sie hängt nur ab von der Dichtigkeit und Elasticität des Mittels nach der Gleichung

$$c = C \sqrt{\frac{e}{d}},$$

also nicht von der Oscillationsdauer der schwingenden Bewegung oder ihrer Wellenlänge, bei transversalen Wellen vorausgesetzt, daß die Länge der Wellen gegen den Abstand der Moleküle sehr groß ist. Für die Töne der Musik, deren Wellenlänge kaum unter vier Centimeter herabgeht, wird man letzteres annehmen dürfen, alle Töne müssen sich daher in einem und demselben Mittel mit der gleichen Geschwindigkeit fortpflanzen. Es ist das auch eine bekannte Erfahrung, auf der allein die Möglichkeit einer harmonischen Musik beruht. Selbst in der größten Entfernung wird die Harmonie derselben nicht gestört, ein Beweis, daß die höchsten wie die tiefsten Töne sich mit gleicher Geschwindigkeit fortpflanzen.

Ganz vollkommen gleich scheint indes nach den neuern Versuchen von Regnault die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der tiefen und hohen Töne nicht zu sein. Bei den gleich näher zu besprechenden Versuchen über die Fortpflanzung des Schalles liefs Regnault an dem einen Ende des auf dem Boulevard St. Michel zu Paris befindlichen Wasserleitungsrohres, welches einen Durchmesser von 1^m,1 und eine Länge von 1417^m,95 hatte, eine Zungenpfeife tönen, deren Grundton c_2 war, und welche ein kegelförmiges Ansatzrohr besafs. In dem andern Ende des Rohres waren acht Helw-

holtzsche Resonatoren, die c_2 und seinen harmonischen Obertönen entsprachen, angebracht, welche durch Kautschukröhren mit einem größern Kasten von Holz verbunden waren, an dessen Öffnung man das Ohr anlegen konnte. Die den Resonatoren entsprechenden Töne wurden deutlich und klar gehört. Man hörte bei diesen Versuchen konstant zuerst den Grundton c_2 , auf diesen folgte erst die Oktave, die Quint derselben und dann erst die höhern Partialtöne, so daß stets die tiefern vor den höhern Tönen gehört wurden. Die tiefern Töne haben demnach eine etwas größere Fortpflanzungsgeschwindigkeit als die höhern, und ein Klang verändert deshalb in großer Entfernung einigermassen seine Farbe. Der Unterschied in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit war indes so klein, daß er sich nicht weiter messen liefs.

Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen in der Luft wurde unser Ausdruck

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}} = \sqrt{\frac{gH\sigma}{s}} \cdot k(1 + \alpha t)$$

somit, wenn wir g und H in Metern angeben,

$$c = \sqrt{\frac{9,808 \cdot 0,76 \cdot 13,59}{0,001293}} \cdot 1,405(1 + \alpha t) = 331^m,8 \cdot \sqrt{1 + \alpha t}.$$

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft muß daher bei 0° gleich $331^m,8$ sein, oder allgemein, da α , wie wir in der Wärmelehre nachweisen werden, gleich $0,003665$ ist,

$$c = 331^m,8 \sqrt{1 + 0,003665 t}.$$

Die Versuche, welche man angestellt hat, um die Geschwindigkeit des Schalles direkt zu messen, geben ein mit der Theorie vollkommen übereinstimmendes Resultat. Die ersten genauern Versuche waren die berühmten Versuche der Mitglieder der Pariser Akademie, Cassini, Maraldi und La Caille im Jahre 1738¹⁾. Als Stationen waren das Observatorium zu Paris, der Montmartre, Fontenay-aux-Roses und Monthlery gewählt. Die Beobachtungen wurden des Nachts angestellt und begannen auf ein vom Observatorium gegebenes Signal.

Man löste von 10 zu 10 Minuten auf einer der Stationen eine Kanone und beobachtete auf allen andern die Zeit, welche verfloß zwischen der Wahrnehmung des Lichtblitzes beim Abfeuern der Kanone und der Ankunft des Schalles. Da der Abstand der einzelnen Stationen vorher genau gemessen war, so erhielt man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch Division des Abstandes durch die beobachtete Zeit.

Diese Beobachtungen wurden längere Zeit unter sehr verschiedenen atmosphärischen Verhältnissen fortgesetzt, und man fand der Theorie gemäß:

1. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist unabhängig von dem Drucke der Luft.
2. Sie wächst mit der Temperatur der Luft.
3. Sie ist dieselbe in jeder Entfernung von der Schallquelle, das heißt, der Schall pflanzt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit fort.

¹⁾ Mémoires de l'Acad. de Paris 1738 und 1739.

4. Mit dem Winde pflanzt sich der Schall rascher fort als gegen den Wind, und zwar ist sie im ersten Falle die Summe, im zweiten Falle die Differenz der Geschwindigkeiten des Schalles und des Windes.

5. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ist in ruhiger trockner Luft bei 0° 1038 pariser Fufs oder 337 Meter, oder nach der Berechnung aus den Versuche von Le Roux¹⁾ gleich 332^m.

Da durch den Einflufs des Windes die Geschwindigkeit des Schalles verändert wird, so ist zur Erzielung genauerer Resultate erforderlich, dafs man an beiden Enden einer Standlinie den Schall erzeuge und beobachte; in einer Richtung wird dann der Schall so viel beschleunigt, als er in die andere verzögert wird, und das Mittel aus beiden Resultaten ergibt vom Einflufs des Windes befreite Zahl für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in ruhiger Luft.

Mit dieser Vorsicht wurde im Jahre 1822 bei Paris zwischen Monthlery und Villejuif die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles auf neue Weise bestimmt²⁾. Es wurden an beiden Orten von 10 zu 10 Minuten Kanonenschüsse, die so gestellt waren, dafs von jedem Orte die Explosion der andern Station gesehen wurde. Man war übereingekommen, dafs die Kanonenschüsse zu Monthlery 5 Minuten früher anfangen sollten, als zu Villejuif.

Beobachter waren zu Monthlery Humboldt, Gay-Lussac und Bouvard, zu Villejuif Arago, Mathieu und Prony. Die Kanonenschüsse von Monthlery wurden zu Villejuif alle gut gehört, zu Monthlery wurden von den 12, die geschossen wurden, nur 7 wahrgenommen. Dieser unaufgeklärte Umstand gestörte die Korrektur wegen Bewegung der Luft nicht so vollständig, als man wünschte; indes ergaben die beiderseitigen Beobachtungen nahezu übereinstimmende Resultate. Die Beobachtungen zu Villejuif nahmen im Mittel 54,84 Sekunden nach dem Lichtblitze den Schall wahr, diejenigen zu Monthlery nach 54,43 Sekunden. Das Mittel aus beiden Zahlen ist 54,63.

Die Distanz beider Stationen bestimmte Arago zu 18622,27 Meter, die Geschwindigkeit des Schalles ist darnach

$$c = \frac{18622,27}{54,63} = 340,8 \text{ Meter.}$$

Die Temperatur der Luft bei diesen Beobachtungen war 16° C., die Geschwindigkeit bei 0° wird daher

$$c_0 = \frac{340,8}{\sqrt{1 + 0,003665 \cdot 16}} = 331,2.$$

Kurz nachher wurde mit noch gröfserer Vorsicht von den holländischen Physikern Moll, van Beek und Kuytenbrouwer³⁾ die Geschwindigkeit des Schalles bei Amsterdam nochmals bestimmt und diese erhielten als Resultat die Geschwindigkeit des Schalles in ruhiger und trockner Luft bei 0° C.

$$c_0 = 332,26 \text{ Meter}$$

¹⁾ Le Roux, Ann. de chim. et de phys. IV. Série T. XII.

²⁾ Annales de chim. et de phys. XX, 210. Poggend. Ann. Bd. V. p. 477.

³⁾ Poggend. Ann. Bd. V. p. 351. 469. In einem Anhang zu dieser Abhandlung sind auch die sonstigen auf gröfsere Genauigkeit Anspruch machenden Versuche zusammengestellt.

oder nach einer neuen Berechnung von Schröder van der Kolk¹⁾

$$c_0 = 332,77.$$

Nach der Theorie muß die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, da sie nur von dem Quotienten der einander proportionalen GröÙe $\frac{H}{s}$ abhängt, unabhängig sein von der Dichtigkeit der Luft, also dieselbe sein, wenn sich der Schall aufwärts in dünner Luft oder abwärts in dichtere Luft fortpflanzt. Dies ist durch die Versuche von Bravais und Martins bei einem bedeutenden Höhenunterschiede am Faulhorn bestätigt worden²⁾. Die eine Station war am Faulhorn, die andere am Brienzer See, ihre schiefe Entfernung betrug 9560 Meter, der Höhenunterschied 2079 Meter, so daß die Neigung der vom Schall durchlaufenen Linie $12^\circ 26'$ betrug. Es wurde mit Anwendung wechselseitiger Schüsse auf dem Berge von A. Bravais und Martins, am See von C. Bravais beobachtet, die beiden erstern hörten 18, der letztere 14 Schüsse im ganzen an drei Tagen. Die direkt beobachtete Geschwindigkeit des Schalles war aufwärts $337^m,92$, und abwärts $338^m,10$, also im Mittel $338^m,01$. Auf 0° und trockne Luft reduciert, wird daraus

$$c_0 = 332,37,$$

eine Zahl, die fast vollkommen mit der von Moll und van Beek erhaltenen übereinstimmt.

Gegen die mitgeteilte Beobachtungsmethode hat Regnault³⁾ den Einwurf erhoben, daß dieselbe keine absolut genauen Resultate liefern könne, da es bei derselben dem Beobachter unmöglich sei, den Moment der Schallerzeugung und den der Wahrnehmung mit absoluter Genauigkeit zu bestimmen. Der Beobachter werde stets durch den aufflackernden Lichtblitz wie durch den ankommenden Schlag überrascht, und ebenso sei es keineswegs sicher, daß bei dem Markieren des Sekundenzählers zwischen der Wahrnehmung und der dadurch hervorgebrachten Willensäußerung eine durchaus unmeßbare Zeit liege. Deshalb sei dieses Verfahren nur statthaft bei sehr großen Standlinien und deshalb sehr intensiven Schallen. Bei sehr intensiven Schallen sind aber, wie schon Schröder van der Kolk⁴⁾ hervorgehoben hatte, die Voraussetzungen der Theorie, welche als Maß der Elasticität den augenblicklichen Luftdruck setzt, nicht mehr gestattet, da dann in den Verdichtungswellen eine merkliche Verdichtung stattfindet, bei welcher die Gase dem Mariotteschen Gesetze nicht mehr folgen. Bei großen Standlinien und im freien Raume ist allerdings nach den Bemerkungen von Schröder dieser Einfluß unmerkbar, indes bleibt immer die erste Unsicherheit bestehen. Die nahe Übereinstimmung der gefundenen Werte unter einander und mit der Theorie beweist deren Richtigkeit auch nicht, da der Wert von k sich nicht direkt mit Sicherheit bestimmen läßt, vielmehr, wie wir im dritten Teile sehen werden, am besten aus der Schallgeschwindigkeit abgeleitet wird. Wir haben oben für k den aus Versuchen von Masson, Hirn und Weißbach abgeleiteten Wert für k eingesetzt, welche unter sich zwischen 1,419 und 1,3845 schwanken.

¹⁾ Schröder van der Kolk, Poggend. Ann. Bd. CXXIV.

²⁾ Bravais und Martins, Annales de chim. et de phys. III. Série. T. XIII. Poggend. Ann. Bd. LXVI. p. 351.

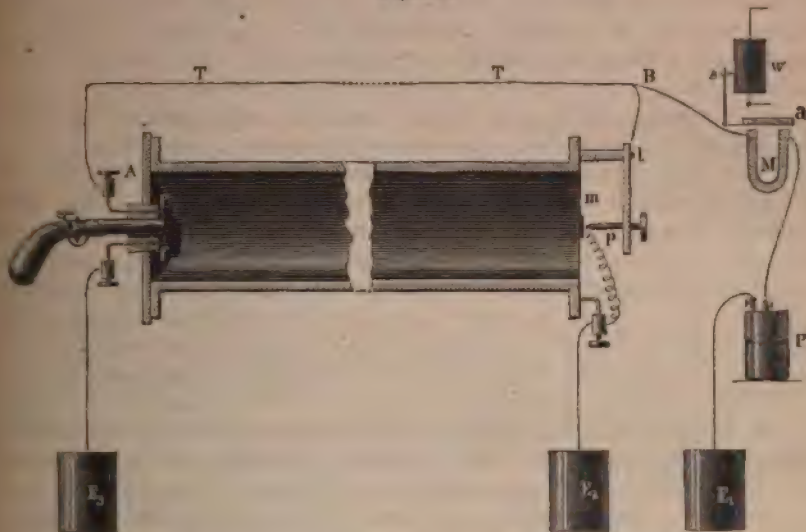
³⁾ Regnault, Mémoires de l'Acad. de France. T. XXXVII.

⁴⁾ Schröder van der Kolk, Poggend. Ann. Bd. CXXIV.

Regnault hat deshalb neuerdings eine ausgedehnte Untersuchung über die Fortpflanzung des Schalles durchgeführt und dabei die Wasserleitungsröhren benutzt, welche in den Jahren 1862 und 1863 in Paris neu gelegt wurden; gleichzeitig suchte er auch die Fortpflanzung des Schalles in freier Luft durch Kanonenschüsse zu bestimmen.

Der wesentliche Unterschied der Regnaultschen Methode von den frühern ist der, daß er den Moment der Erzeugung des Schalles und den der Ankunft am Orte der Beobachtung nicht durch den Beobachter selbst bestimmen, sondern ihn an einem selbstthätigen Registrierapparate sich aufzeichnen liefs. Er benutzte dazu die elektrische Telegraphie, in einer Weise, wie sie das Schema Fig. 286 deutlich macht. Der Schall wurde erzeugt bei den Röhren durch den Schuß einer Pistole, in freier Luft durch den einer Kanone. Von dem Orte *A*, wo sich die Pistole befand (Fig. 286), war eine Telegraphenleitung zur Station *B*, wo beobachtet wurde, geführt.

Fig. 286.



Von der Leitung ging bei *B* ein Draht zu dem Elektromagnet *M* und von diesem zu dem einen Pol der Batterie *P*. Der andere Pol der Batterie war durch die Platte *E*₁ mit der Erde in leitender Verbindung. Wurde noch ein anderer Punkt der Leitung mit der Erde in leitende Verbindung gebracht, so wurde der Strom geschlossen, der Magnet magnetisch, und der Anker *a* angezogen; wurde die Leitung wieder unterbrochen, so wurde der Anker wieder von dem Magnete entfernt. War der Anker angezogen, so schrieb der Stift *s* auf einem geschwärzten Cylinder, der ebenso wie bei den Phonographen mit gleichmäßiger Geschwindigkeit gedreht wurde.

Eine solche Verbindung der Leitung *TT* mit der Erde wurde bei dem Beginne der Versuche bei *A* hergestellt, indem in der Lücke *ff* der Leitung, die *T* mit *E*₃ verband, unmittelbar vor der Mündung der Feuerwaffe ein feiner Metalldraht ausgespannt wurde. Diese Verbindung wurde dann in dem Moment unterbrochen, in welchem das Geschütz abgefeuert

wurde, indem ein fester auf die Ladung gesetzter Filzpfropf den Draht ff zerrifs. Die Unterbrechung des Stromes entfernte den Stift s von der geschwärzten Walze, so daß das Aufhören des von s geschriebenen Striches dem Moment der Schallerzeugung angab. In dem Augenblicke nun, in welchem der Schall in B ankam, wurde der Strom wieder geschlossen, so daß durch einen neuen von dem Stift s auf der Walze gezogenen Strich dieser Moment markiert wurde. Zu dem Ende war bei B in passender Weise eine sehr feine Membran m ausgespannt, welche durch die ankommende Schallwelle in Schwingungen versetzt wurde. Die Membran trug in ihrer Mitte ein kleines Platinplättchen, welches durch einen feinen äußerst biegsamen Draht mit der in die Erde versenkten Platte E_2 in Verbindung stand. Unmittelbar vor der Platte befand sich ein Stift p , welcher mit der Leitung T durch p/B in metallischer Verbindung war. Die bei m ankommende Welle gab der Membran einen Stoß und bewirkte dadurch, daß der Stift p mit dem Platinplättchen in Kontakt kam und damit, daß der Strom geschlossen und der Stift s wieder gegen die geschwärzte Walze gedrückt und ein Strich gezogen wurde. Der Abstand der beiden Striche gab dann die zwischen Abgabe und Ankunft des Schalles verstrichene Zeit, wenn man die Zeit bestimmte, welche die Walze zu der beobachteten Drehung gebraucht hatte. Zu dem Ende wurden auf der Walze durch ein schwingendes Pendel die einzelnen Sekunden markiert, und gleichzeitig von einer schwingenden Stimmgabel eine Wellenlinie gezogen. Diese drei Linien, die des Pendels, der Stimmgabel und die von dem Stifte s gezogenen, waren unmittelbar unter einander. Man hatte deshalb nur die Wellen vom ersten Aufhören des von s gezogenen Strichs bis zum ersten folgenden Sekundenzeichen, und von dem letzten Sekundenzeichen vor dem zweiten von s gezogenen Strich bis zu diesem Strich selbst zu zählen, um in selbst tausendstel Sekunden die Zeit zu erhalten, welche der Schall gebraucht, um von A bis B sich fortzupflanzen. Eine genaue Messung des Abstandes AB gab die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles.

In Bezug auf die Einzelheiten der Ausführung und der Versuche selbst müssen wir auf die Abhandlung Regnaults verweisen, wir begnügen uns hier, die erhaltenen Resultate mitzuteilen.

Zunächst schloß Regnault aus den Versuchen in den Wasserleitungsröhren, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der That mit der Intensität des Schalles abnehme. Bei diesen Versuchen wurde die Pistole bei A in das eine Ende der Wasserleitungsröhre hineingesteckt, welches im übrigen ganz verschlossen war und das andere Ende bei B ebenfalls ganz geschlossen. Die Schallwelle kam dann zunächst direkt von A nach B , wurde bei B reflektiert und kehrte dann nach einer zweiten Reflexion bei A wieder nach B zurück, nachdem sie das Rohr dreimal durchlaufen hatte u. s. f. Dabei zeigte sich, daß trotzdem sich der Schall in cylindrischen Röhren ausbreitete, seine Intensität sehr rasch abnahm, und zwar um so rascher, je enger die Röhre war, in welcher der Schall sich ausbreitete. So wurde der von einer mit 1 Gramm Pulver geladenen Pistole erzeugte Schall nicht mehr gehört, als er in einer Röhre vom

Durchmesser $0^m,108$ durchlaufen hatte 1150^m .

„ $0^m,300$ „ „ 3810^m

„ $1^m,100$ „ „ 9540^m .

Durch die Bewegung der Membran *m* konnte man indes die Rückkehr der Welle viel länger beobachten, man erkannte sie in den drei eben genannten Röhren und unter den angegebenen Umständen noch, nachdem sie resp. 4056^m, 11430^m und 19851^m durchlaufen hatte.

Entsprechend der Abnahme der Intensität zeigte sich auch eine Abnahme der Geschwindigkeit des Schalles, wie folgende Zahlen zeigen:

Röhre von 0 ^m ,108 Durchmesser		Röhre von 0 ^m ,300 Durchmesser	
durchlauf. Weg	Geschw.	durchlauf. Weg	Geschw.
566 ^m ,74	330,99	3810 ^m ,3	332,18
1700 ^m ,22	328,21	7620 ^m ,6	330,43
2833 ^m ,70	327,52	11430 ^m ,0	329,64
4055 ^m ,90	326,66	15240 ^m ,9	328,96

Röhre von 1 ^m ,10 Durchmesser	
durchlauf. Weg	Geschw.
749 ^m ,1	334,16
1417 ^m ,9	332,50
5671 ^m ,8	331,24
11343 ^m ,6	330,68
19851 ^m ,3	330,52

Die Zahlen zeigen somit eine beträchtliche Abnahme der Schallgeschwindigkeit mit der Intensität, gleichzeitig ergeben sie aber auch, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren verschiedener Weite eine sehr verschiedene ist. Sehr deutlich tritt dieser Unterschied bei der Vergleichung der drei in jeder Reihe letzten Werte hervor, welche die mittlere Geschwindigkeit des Schalles geben von dem Momente seiner Erzeugung bis zum Momente, in welchem der Schall nicht mehr wahrnehmbar ist.

Aus diesen Erfahrungen ergibt sich, daß die Wände der Röhren, in welchen die den Schall fortpflanzende Luft eingeschlossen ist, auf die Elasticität der Luft vermindern einwirken müssen, ohne die Dichtigkeit zu vermindern, oder daß die Dichtigkeit vermehrt wird, ohne daß gleichzeitig die Elasticität vergrößert wird. Daß zwischen der schwingenden Luft und den Wänden eine Wechselwirkung besteht, das ergibt sich schon aus der raschen Abnahme der Schallintensität beim Fortpflanzen des Schalles durch die Röhren. Denn da hier die fortschreitende Welle immer wieder dieselbe Luftmasse in Bewegung versetzt, so kann die Abnahme der Schallstärke nur von einer Abgabe der Bewegung an die Röhrenwände herrühren, eine Abgabe, die auch dadurch konstatiert wurde, daß man neben der Röhre auf ihrer ganzen Länge den Schall zu hören imstande war.

Um den Einfluß der Röhrenwände ganz zu eliminieren, mußte man Röhren von unendlich großem Durchmesser anwenden. Regnault glaubt indessen, daß bei der Röhre, deren Durchmesser gleich 1,1^m ist, der Einfluß der Wände schon ganz unmerklich gewesen sei, daß man deshalb die aus der letzten Versuchsreihe sich ergebende Zahl 330^m,6 als die mittlere Geschwindigkeit des durch einen Pistolenschuß erzeugten Schalles von dem Entstehungsmomente bis zu dem, in welchem er verschwindet, ansehen könne.

Die unserer Gleichung entsprechende Geschwindigkeit würde das noch nicht genau sein, da unsere Gleichung voraussetzt, daß die Dichtigkeits-

änderung der Luft unendlich klein ist, somit strenge genommen für den Schall eine unendlich kleine Intensität voraussetzt. Man erhält dieselbe bei diesen Versuchen aus den Zwischenräumen, welche bei den letzten unmittelbar vor dem Verschwinden des Schalles gemachten Beobachtungen zwischen einer und der folgenden Rückkehr des Schalles verstreichen. Regnault erhält hierfür die nur wenig kleinere Zahl

$$c_0 = 330,30.$$

In freier Luft erhielt Regnault für die Geschwindigkeit eines durch Kanonenschüsse erzeugten Schalles in der That fast genau die in der weitesten Röhre gefundene Zahl, nämlich als mittlere Geschwindigkeit

$$c_0 = 330,70 \text{ Meter,}$$

eine Zahl, welche nur um 0,4 von der in der Röhre gefundenen sich unterscheidet.

Gegen die Deutung, welche Regnault seinen Versuchen in Bezug auf die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Intensität des Schalles gegeben, hat später Rink¹⁾ sehr berechtigte Einwände erhoben, und gezeigt, daß Regnaults Versuche eine solche Abhängigkeit keineswegs erkennen lassen, wenn man aus den Berechnungen der Versuche das erste und zweite Durchlaufen der Röhren ausschliesse. Für diese und besonders für das erste kann man die Gesetze der Schallausbreitung gar nicht anwenden. Durch den Pistolenschuß wird nämlich die Luft selbst in der Axe der Röhren mit großer Geschwindigkeit fortgeschleudert, so daß also zunächst sich nicht nur die Schwingungen in der Röhre fortpflanzen, sondern auch der Träger derselben, die Luft. Die Beobachtung des ersten Durchlaufens der Röhre muß also gerade so eine zu große Geschwindigkeit des Schalles geben, wie Versuche in freier Luft, bei welchen man die Fortpflanzung des Schalles mit der Richtung des Windes beobachtet. Möglich ist es, daß auch bei der ersten Rückkehr des Schalles die Luft noch eine von der schwingenden Bewegung unabhängige fortschreitende Bewegung hat, und deshalb schloß Rink aus seiner Berechnung der Regnaultschen Versuche auch diese Beobachtung aus.

Ein weiterer Beweis gegen die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles von der Intensität desselben ergibt sich daraus, daß bei stärkeren Pulverladungen der Pistole die Geschwindigkeiten sich keineswegs größer ergeben, während doch die mit stärkeren Pulverladungen abgegebenen Schüsse einen Schall von erheblich größerer Intensität geben.

In folgender Tabelle sind zum Beweise der Richtigkeit der Einwände von Rink die berechneten Werte der Geschwindigkeit für einige Beobachtungsreihen zusammengestellt, die in dem 1,10^m weiten Rohre erhalten sind. Die erste Kolumne enthält die Nummer der Versuchsreihe, wie Regnault sie bezeichnet hat, die zweite die Pulverladung in Gramm, die folgenden die Schallgeschwindigkeiten, wenn der Schall die Röhre die über jeder Kolumne gegebene Anzahl mal durchlaufen hatte, berechnet aus den beobachteten Zeiten mit Ausnahme des ersten Hin- und Herganges des Schalles; die Kolumne 3 L gibt also die Geschwindigkeit berechnet aus dem dritten; 4 L aus dem dritten und vierten Durchlaufen der Röhre etc.

¹⁾ Rink, Poggend. Ann. Bd. CXLIX.

Nr.	Ladung	3 L	4 L	5 L	6 L	7 L	8 L
1	0,5	330,02	330,29	330,15	330,21	330,11	330,13
2	1	330,36	330,59	330,57	330,61	330,44	330,42
3	1,5	330,29	330,57	330,54	330,60	330,47	330,53
4	2	330,60	330,51	330,84	330,39	330,44	330,30
5	1	330,04	330,26	330,26	330,23	330,15	330,22
6	1	330,36	330,37	330,50	330,67	330,55	330,50

Wie man sieht sprechen diese Zahlen auf das evidenteste gegen die Abhängigkeit der Schallgeschwindigkeit von der Intensität, so- daß also selbst für diese, jedenfalls anfangs noch sehr kräftigen Schalle, die Bemerkung Schröder von der Kolks noch keine Gültigkeit hätte.

Als Mittel der Geschwindigkeit des Schalles in der 1,1 Meter weiten Röhre berechnet Rink in dieser Weise

$$c = 330,5,$$

solche der von Regnault in freier Luft erhaltenen bis auf 0,2 gleich ist.

Einen fast gleichen Wert fand Le Roux¹⁾ für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einer 7^m weiten Röhre nach einer der Regnaultschen ähnlichen Methode, nämlich 330,66^m.

Regnault hat gleichzeitig bei seinen Versuchen die Frage einer erneuten Prüfung unterzogen, ob denn in der That die Schallgeschwindigkeit bei den Drucken dieselbe sei, ein Satz, der strenge nur so weit gültig sein kann, als die Gase dem Mariotteschen Gesetze folgen. Es gelang ihm nicht, einen meßbaren Unterschied in der Schallgeschwindigkeit zu erhalten, trotzdem er den Druck der in einer Röhre eingeschlossenen Luft von 247^{mm} bis 1267^{mm}, also bis zum Fünffachen des Anfangsdruckes steigerte.

Schließlich hat Regnault auch in den Röhren die Geschwindigkeit des Schalles in einigen anderen Gasen als in der Luft gemessen, nämlich in Wasserstoff, Kohlensäure, Stickoxydul und Ammoniak. Nach der Theorie der Geschwindigkeit des Schalles

$$c = \sqrt{\frac{g H \sigma}{s} k (1 + \alpha t)},$$

welcher Gleichung s die Dichtigkeit des Gases bei der Temperatur 0° bedeutet. Für das Verhältniß der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in zwei verschiedenen Gasen ergibt sich daraus

$$c : c_1 = \sqrt{\frac{k}{s}} : \sqrt{\frac{k_1}{s_1}},$$

oder, wenn wir die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft $c_1 = 1$ und die Dichte der Luft $s_1 = 1$ setzen,

$$c = \sqrt{\frac{k}{s k_1}}.$$

Der Wert von c hängt also nur ab von dem Verhältniß der Werte k des Gases und der Luft, sowie von der Dichte des betreffenden Gases. Die

¹⁾ Le Roux, Ann. de chim. et de phys. IV. Serie. T. XII.

von Regnault erhaltenen Werte von c für $c_1 = 1$ und die daraus mit der bekannten Dichte der Gase für die einzelnen Gase nach der Gleichung

$$k = \left(\frac{c}{c_1}\right)^2 \left(\frac{s}{s_1}\right) k_1$$

sich ergebenden Werte von k sind in folgender Tabelle zusammengestellt

	$\frac{c}{c_1}$	$\sqrt{\frac{1}{s}}$	k
Luft	1	1	1,395
Wasserstoff .	3,801	3,799	1,396
Kohlensäure .	0,8009	0,8087	1,368
Stickoxydul .	0,8007	0,8100	1,361
Ammoniak . .	1,2279	1,3025	1,239.

Die für diese Gase gefundenen Werte der Schallgeschwindigkeit und damit die Werte von k können nur angenäherte sein, da es sehr schwierig ist, so ausgedehnte Röhrenleitungen mit vollständig reinen Gasen zu füllen. Wir werden im nächsten Paragraphen genauere Werte mit Hilfe der indirekten Methode der Messung der Schallgeschwindigkeit erhalten.

Aus den Regnaultschen Messungen ergibt sich somit die Schallgeschwindigkeit nicht unerheblich kleiner als aus den früheren Versuchen, nämlich zu 330,7 anstatt zu 332,7 nach den Messungen der holländischen Physiker oder 332,4 nach denen von Bravais und Martin, während sie der von den französischen Akademikern gefundenen Zahl 331,2 näher kommt. Nehmen wir die von diesen Beobachtern gefundenen Werte sämtlich als gleich wahrscheinlich an, wozu wir berechtigt sind, da man dem von Regnault hervorgehobenen psychologischen Momente bei der Beobachtung der zwischen Wahrnehmung des Lichtes und des Schalles verfließenden Zeit wohl nicht den Einfluß zuschreiben kann, daß diese Zeit immer zu klein genommen wird, so ergibt sich als Mittel aus diesen vier jedenfalls besten direkten Messungen der Schallgeschwindigkeit in der Luft der Wert

$$c = 331,76.$$

Betreffs dieser Zahl ist jedoch zu bemerken, daß alle Beobachtungen nicht bei der Temperatur 0^0 gemacht worden sind, sondern bei höheren Temperaturen, und daß dann die Reduktion auf 0^0 dadurch bewerkstelligt ist, daß man den bei einer Temperatur t beobachteten Wert mit $\sqrt{1 + 0,003\ 665\ t}$ dividiert, also vorausgesetzt hat, daß der Wert des Koeffizienten k von der Temperatur unabhängig ist. Wir werden sehen, daß das auch für Luft nicht ganz der Fall ist, daß k mit steigender Temperatur etwas abnimmt, und daß somit der oben angegebene Wert von c etwas zu klein ist. Die Änderung von k ist eine solche, daß der Koeffizient von t anstatt 0,003 665 gleich 0,003 646 zu setzen ist, wodurch z. B. der aus den pariser Beobachtungen abgeleitete Wert anstatt 331,2 gleich 331,43 wird.

Die Bedeutung der Veränderlichkeit dieses Koeffizienten k wird in der Wärmelehre hervortreten, wo wir auch die Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles ergänzen werden, indem wir zeigen, wie dieser Koeffizient infolge der Erwärmung durch Kompression in die Gleichung eintritt.

§ 169.

Indirekte Messung der Schallgeschwindigkeit. Wir haben im vorigen Kapitel nachgewiesen, daß jede Säule irgend eines Körpers, wenn sie in longitudinale Schwingungen versetzt wird, eine Reihe von Tönen gibt. Für Luftsäulen in Pfeifen eingeschlossen erhielten wir als Ausdruck für die Schwingungszahl dieser Töne

$$N = \frac{(2n-1)c}{4(l+x)}$$

für gedeckte Pfeifen, und

$$N = \frac{nc}{2(l+x+y)}$$

für offene Pfeifen; worin l die Länge der Pfeifen, x die Korrektion wegen der Mundöffnung und y die Korrektion bei den offenen Pfeifen wegen des Hervorragens der schwingenden Luftsäule aus der obern Öffnung der Pfeife bedeutet.

Nach den Entwicklungen des vorigen Abschnittes ist die GröÙe c in diesem Ausdruck die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung oder des Schalles in dieser Luftsäule, indem N der reciproke Wert der Schwingungsdauer der stehenden Welle von der Länge $2(l+x)$, resp. $(l+x+y)$ ist. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit erhielten wir aber früher den Quotienten aus der doppelten Länge der stehenden Welle und der Schwingungsdauer der Bewegung, oder

$$c = \frac{2L}{T} = 2LN.$$

Die Schwingungszahlen von Tönen können wir mittels des Monochordes oder der Sirene auf das genaueste erhalten. Da wir nun die Länge l der Röhre direkt messen und die GröÙen x und y entweder nach der Dulong'schen Methode beobachten oder nach der Wertheim'schen berechnen können, so können wir aus den beobachteten Tönen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles sofort erhalten. Bei Anwendung gedeckter Pfeifen erhalten wir, wenn N_1 die entweder direkt erhaltene oder aus einem der harmonischen Töne bestimmte Schwingungszahl des Grundtones ist, für welchen $n = 1$,

$$c = 4(l+x)N_1$$

und für offene Pfeifen

$$c = 2(l+x+y)N_1.$$

Dulong's Versuche¹⁾ führten für Luft auf die Zahl 333^m für 0° als Mittel aus einer sehr großen Zahl von Versuchen; indes glaubte Dulong doch, daß sich die absolute Geschwindigkeit des Schalles in freier Luft durch die Töne der Pfeifen nicht mit Sicherheit bestimmen lasse, und die Zahlen, welche er mitteilt, zeigen auch besonders mit dem richtigen Werte von α in der Korrektion für die Temperatur berechnet Abweichungen bis zum Werte von 10 Meter.

¹⁾ *Dulong*, Untersuchungen über die spezifische Wärme der elastischen Flüssigkeiten. Ann. de chim. et de phys. Tome XLI. Poggend. Ann. Bd. XVI

Wertheim¹⁾ indes hat die Geschwindigkeit des Schalles in Luft mit der Pfeifentöne fast genau mit der Theorie in Übereinstimmung gefunden. Seine Versuche sind bei sehr verschiedenen Temperaturen angestellt, die verschiedenen von ihm erhaltenen Werte sind die folgenden:

Temperatur t	Geschwindigkeit des Schalles bei der Temperatur t c_t	Geschwindigkeit bei 0° $c_0 = \frac{c_t}{\sqrt{1 + 0,003665 t}}$
I. Reihe.		
0°,5 C.	331,98	331,70
2,0	332,74	331,53
4,5	332,75	330,04
8,0	335,43	330,62
8,5	338,05	332,91
9,0	338,01	332,54
12,0	339,46	332,23
12,3	343,01	335,53
16,0	338,68	329,17
26,6	347,82	332,01
II. Reihe.		
9,9	338,85	332,87
16,0	337,20	327,35
III. Reihe.		
21,0	341,15	329,12
IV. Reihe.		
9,3	334,65	329,09
11,6	336,50	329,61
17,0	342,3	332,11
Mittel aller Versuche 331,33.		

Die von Wertheim erhaltene Zahl ist somit um 0^m,7 oder 0,002 von Regnault gefundenen Wertes gröfser als der letztere, trotzdem die Wertheim angewandten Pfeifen im Maximum einen Durchmesser von 4 hatten, also nur etwa 0,33 der von Regnault benutzten engsten R. Es scheint indes auch bei Wertheim der Einfluss der Pfeifenweite unkenntlich. Die Versuche sind mit vier verschiedenen Pfeifen angestellt, deren Durchmesser waren 10, 20, 20, 40^{mm}, drei waren von Messing, die vierten von Glas. Nimmt man anstatt aus diesen Versuchen nur aus den zu jeder Pfeife gehörigen Zahlen das Mittel, so erhält man

Messingpfeife von 40 ^{mm} Durchmesser . . .	332,10	aus Reihe I
„ „ 20 ^{mm} „ . . .	330,11	„ „ II
Glaspfeife „ 20 ^{mm} „ . . .	330,23	„ „ IV
Messingpfeife „ 10 ^{mm} „ . . .	329,12	„ „ III.

Wie man sieht nimmt die aus der Schwingungszahl und den Pfeiflängen berechnete Geschwindigkeit erheblich ab mit dem Durchmesser der Pfeifen, während die beiden Pfeifen gleichen Durchmessers auch die Zahl ergeben.

¹⁾ Wertheim, Über die Geschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten. *de chim. et de phys.* III. Serie. T. XXIII. Poggend. Ann. Bd. LXXVII.

Die Methode der Geschwindigkeitsmessung durch Pfeifentöne beruht eigentlich auf Messung der Wellenlängen, welche, wie wir schon mehrfach erwähnt, keineswegs vollkommen sicher ist; eine Beobachtung hat nun der kürzlich Kundt¹⁾ in den Stand gesetzt, die Länge der Wellen in den Gasen direkt zu messen und so eine sehr bequeme Methode zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeiten zu geben.

Wenn man eine an beiden Seiten offene Röhre in longitudinale Schwingungen versetzt, so gerät die in der Röhre vorhandene Luft nicht mit in Schwingungen; bringt man deshalb in eine solche Röhre Lycopodium oder Kieselsäure, so bewegt sich dies zu den in den Röhrenwänden sich bildenden Savartschen Knotenlinien (§ 145). Anders dagegen, wenn man die Röhren an den Enden verschließt, sei es, daß man sie zustöpselt oder zumilzt. Da die freien Enden eines den tiefsten Longitudinalton ergebenden Rohres stets ein Schwingungsmaximum haben, so stoßen die Endflächen des Rohres ganz periodisch auf die eingeschlossene Luft, und versetzen dieselbe in Schwingungen, welche mit denen der Röhre isochron sind. Da nun diese Schwingungen von beiden Enden der Röhre gegen einander sich entgegenpflanzen, so müssen sich stehende Wellen bilden, an deren Knotenpunkten das Lycopodium oder die Kieselsäure sich ansammelt. Die Länge dieser stehenden Wellen hängt lediglich von der Höhe des erzeugenden Tones und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in dem die Röhre füllenden Gase ab, oder wenn wir nach und nach dieselbe Röhre mit verschiedenen Gasen füllen, so ist die Länge der Wellen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen direkt proportional.

Eine ganz eben solche Bildung von stehenden Wellen in der in einer Röhre eingeschlossenen Luftsäule tritt ein, wenn man die Röhre an einem Ende schließt und durch das andere offene Ende, wie Fig. 287 zeigt, in

Fig. 287.



daselbe den tönenden Stab einführt. Klemmt man die Röhre bei *D* ein und bringt den Stab, der bis zu seiner Mitte in die Röhre eingeführt ist, durch Streichen in der Richtung von *D* nach *A* zum Schwingen, so sind es die Stöße des freien Endes *B* gegen die eingeschlossene Luft, welche dieselbe in Schwingung versetzen; die Schwingungen werden bei *C* reflektiert, so daß auch hier stehende Wellen sich ausbilden, in deren Knoten der Staub sich ansammelt. Bei dieser Art der Erzeugung der Luftschwingungen werden die Knotenlinien durch nichts alteriert, was bei der ersten Art der Erregung, bei der die Röhre selbst schwingt, immerhin durch die Savartschen Linien noch möglich ist. Man kann deshalb bei dieser Art der Erregung die Länge der stehenden Wellen leicht messen und so die Geschwindigkeit des Schalles in Röhren verschiedenen Durchmessers und bei verschiedenen Gasen mit einander vergleichen, oder auch, wenn man die Schwingungszahl des Stabtones bestimmt, ihrem absoluten Werte nach erhalten.

¹⁾ Kundt, Poggend. Ann. Bd. CXXVII. und Bd. CXXXV.

Auf die Einzelheiten des Verfahrens einzugehen, würde uns hier zu weit führen, wir verweisen deswegen auf die Arbeiten von Kundt¹⁾.

Kundts Versuche bestätigen nun zunächst das vorhin aus denen von Wertheim gezogene Resultat, daß die Geschwindigkeit auch hoher Töne von dem Durchmesser der Röhre abhängig ist, und liefern gleichzeitig die Erklärung, weshalb Regnault in Röhren von 0,108 Durchmesser noch eine so bedeutende Verzögerung des Schalles fand, während wir aus den Zahlen Wertheims schon für Pfeifen von 0,04 M. Durchmesser die volle Geschwindigkeit erhielten. Kundt fand nämlich, wie folgende kleine Tabelle zeigt, daß die Verzögerung der Geschwindigkeit mit der Wellenlänge des Tones zunimmt; die Geschwindigkeit in einer Röhre von 13^{mm} Durchmesser ist stets gleich 1 gesetzt.

Durchmesser der Röhren	Geschwindigkeit des Schalles für Töne mit Wellenlängen von		
	180 ^{mm}	90 ^{mm}	60 ^{mm}
^{mm}			
55,0	1,01010	1,00885	1,00584
26,0	1,00908	1,00842	1,00781
13,0	1,00000	1,00000	1,00000
6,5	0,98031	0,99170	0,99176
3,5	0,92628	0,96666	—

Für den tiefsten Ton, der nahezu dem *ais*₂ entspricht, nimmt also die Geschwindigkeit des Schalles bis zu dem Rohrdurchmesser 0,055 so merklich zu, daß die Grenze der Zunahme wohl noch nicht erreicht ist, während für den eine Oktave höhern Ton die Grenze der Röhrenweite, bis zu welcher die Geschwindigkeit wächst, schon bei 26^{mm} liegt. Der Pistolenschuß Regnaults gab nach Versuchen von König einen Ton, dessen Wellenlänge etwa 3,6^m²⁾, dessen Höhe somit fast *g* war; da somit die Länge der Welle 20mal größer ist, kann es nicht auffallend erscheinen, daß der Einfluß der Röhrenwände erst bei so viel größerem Durchmesser unmerkbar wurde.

Gleichzeitig fand Kundt, daß die Beschaffenheit der innern Röhrenwand auf die Geschwindigkeit des Schalles von Einfluß war, bei rauhen Wänden ist die Geschwindigkeit kleiner; einen Einfluß der Intensität vermochte Kundt dagegen nicht zu erkennen.

Daß die Geschwindigkeit des Schalles in engen Röhren sich beträchtlich vermindert, liegt einmal an der Reibung der schwingenden Gasteile an den Röhrenwänden, durch welche die Beweglichkeit der schwingenden Teile vermindert wird, dann aber wesentlich in der Verminderung des Koeffizienten *k*, der, wie erwähnt wurde, in die Gleichung für die Fortpflanzung von Wellen in Gasen eingeht, weil an den verdichteten Stellen eine Erwärmung, an den Stellen der Verdünnung eine Abkühlung eintritt. Diese Erwärmung und Abkühlung wird in Röhren kleiner, weil an den verdichteten Stellen Wärme an die Röhrenwand abgegeben, an den ver-

¹⁾ Ausführlich sind dieselben dargelegt in Poggend. Ann. Bd. CXXXV. Regnault. Mémoires de l'Acad. T. XXXVII. p. 437.

antten Wärme von der Röhrenwand aufgenommen wird. Man erkennt deshalb leicht, daß die Abnahme der Geschwindigkeit in engeren Röhren für Töne größerer Schwingungsdauer die größere sein muß. Denn je länger die Röhre ist, um so größer ist im Verhältnis zur schwingenden Luftfläche die Wandfläche, welche ihren Einfluß ausübt, da die Menge der schwingenden Luft mit dem Quadrate des Röhrendurchmessers, die berührende Wandfläche dagegen mit der ersten Potenz desselben abnimmt. Je langsamer ferner die Schwingungen sind, um so größer ist der Wärmeaustausch mit den Röhrenwänden, da die Verdichtungen und Verdünnungen um so länger dauern.

Helmholtz¹⁾ und Kirchhoff²⁾ haben diese Frage einer genaueren theoretischen Behandlung unterzogen, ersterer unter Berücksichtigung der Reibung allein, letzterer unter Mitberücksichtigung des Wärmeaustausches; beide gelangen zu Gleichungen für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Röhren, welche sich nur durch die Bedeutung einer in der Gleichung auftretenden Konstanten unterscheiden. Ist C die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles im freien Raum, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c in einer Röhre vom Radius r für einen Ton, dessen Schwingungszahl n ist,

$$c = \frac{C}{1 + \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi \cdot n}}} = C \left(1 - \frac{\gamma}{2r\sqrt{\pi \cdot n}} \right),$$

worin die Konstante γ bei Helmholtz die Reibungskonstante der Luft ist, während sie nach Kirchhoff von der Reibung und dem Wärmeaustausch der Luft und der Röhrenwand abhängt. Es soll also nach dieser Gleichung die Abnahme der Geschwindigkeit in Röhren, die Differenz $C - c$ dem Durchmesser der Röhre und der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl umkehrt proportional sein.

Da weder die Versuche von Regnault noch von Kundt ausreichend waren, um die theoretische Beziehung experimentell zu prüfen, haben Schneebeli³⁾ und Adolph Seebeck⁴⁾ neue Versuche über diese Frage angestellt, indem sie, wie Kundt, aber nach einer andern Methode, die Wellenlänge von Tönen verschiedener Höhe in Röhren von verschiedenem Durchmesser maßen. Beide Experimentatoren versetzten in einem einerseits geschlossenen Rohre die Luft durch hineingesandte Töne in stehende Schwingungen und bestimmten direkt mit dem Ohre den Abstand der Schwingungsmaxima zu dem geschlossenen Ende des Rohres. Die von Seebeck gewählte Anordnung zeigt Fig. 288. In dem Rohre AB , an welchem bei C ein kleines Ohr senkrecht zur Längsaxe von AB angeschmolzen ist, kann ein dicht schließender Stempel hin und her bewegt werden. An dem Rohr ist eine Scala angebracht, deren Nullpunkt bei C liegt. Von dem kleinen Rohr CD ist ein Kautschukschlauch aus, dessen Ende in das eine Ohr gesteckt wird, während das andere Ohr durch einen Siegellackpfropfen geschlossen wird.

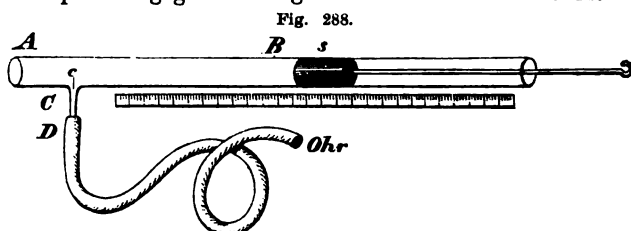
¹⁾ Helmholtz, Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg Bd. III. p. 16.

²⁾ Kirchhoff, Poggend. Ann. Bd. CXXXIV.

³⁾ Schneebeli, Poggend. Ann. Bd. CXXXVI.

⁴⁾ Ad. Seebeck, Poggend. Ann. Bd. CXXXIX.

Erzeugt man nun in dem Rohre stehende Wellen, so nimmt das Ohr kaum einen Ton wahr, wenn bei c ein Schwingungsmaximum ist, da dann die Luft dort nur eine hin- und hergehende Bewegung besitzt, ohne daß Verdichtungen und Verdünnungen eintreten. Es können deshalb in dem abgezweigten Rohre keine longitudinalen Schwingungen entstehen und zum Ohr fortgepflanzt werden. Sendet man deshalb durch eine tönende Stimmgabel, welche sich unmittelbar vor dem Ende A befindet, Schwingungen in das Rohr AB und verschiebt dann den Stempel s so lange, bis das Ohr, in welchem das Kautschukrohr mündet, keinen Ton mehr wahrnimmt, so befindet sich bei c ein Schwingungsmaximum, und da an dem Stempel s sich immer ein Schwingungsknoten befindet, so ist der Abstand der Stempelfläche von c eine viertel Wellenlänge des Tones im Innern des Rohres. Das Vierfache des Abstandes multipliziert mit der Schwingungszahl des Tones gibt somit die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen im Rohre.



Wie Seebeck anführt, ist die auf diese Weise zu erreichende Genauigkeit sehr beträchtlich, bei Wellenlängen von 200^{mm} bis 300^{mm} weichen die einzelnen Messungen nur um 1—3^{mm} von einander ab, die Abweichungen vom Mittel erreichten im allgemeinen kaum 1^{mm}.

Aus den Versuchen von Seebeck sowohl wie von Schneebeli ergibt sich, daß in der That bei engen Röhren die Verzögerung der Schallgeschwindigkeit, so lange die Röhren hinreichend enge sind, so daß man die ganze Luftsäule als gleichförmig schwingend annehmen darf, dem Durchmesser der Röhre umgekehrt proportional ist. So erhielt z. B. Seebeck unter Annahme der Geschwindigkeit des Schalles im freien Raum $C = 332,77$ folgende Werte der Verzögerung $C - c$

Ton c_2 ; $n = 512$			Ton g_1 ; $n = 384$		Ton e_1 ; $n = 320$	
Durchmesser der Röhre	$C - c$		$C - c$		$C - c$	
mm	beob.	berechn.	beob.	berechn.	beob.	berechn.
3,4	9,79	9,79	13,91	13,91	15,51	15,51
9,0	4,33	3,70	5,09	5,25	4,75	5,06
17,5	1,85	1,90	2,91	2,70	3,53	3,01

Die als berechnet angegebenen Werte sind jedesmal aus dem für die engste Röhre gefundenen für die weiteren Röhren unter Voraussetzung der Richtigkeit des Gesetzes abgeleitet, und man sieht, wie Beobachtung und Rechnung auch genügend übereinstimmen.

Kombiniert man die an verschiedenen Röhren unter Anwendung desselben Tones gemachten Beobachtungen, so läßt sich aus denselben die Geschwindigkeit des Schalles im freien Raume ableiten, nach der Gleichung

$$C = \frac{c_1 r_1 - c_2 r_2}{r_1 - r_2},$$

c_1 die Geschwindigkeit des Schalles in der Röhre vom Radius r_1 und c_2 in der Röhre vom Radius r_2 bedeutet. Indem Schneebeli alle seine Versuche zu je zwei in der Art kombinierte, welche in verschiedenen Röhren, deren Durchmesser zwischen 14^{mm} und 90^{mm} waren, ausgeführt waren, fand er das Mittel

$$C = 332,06^{\text{m}},$$

ein Wert, der nur um $0,3^{\text{m}}$ von dem am Schlusse des vorigen Paragraphen gefundenen Mittel abweicht; die extremsten Abweichungen von diesem Mittel betragen $\pm 2^{\text{m}}$, also nur $0,66$ Procent des berechneten Wertes.

Während so die Versuche übereinstimmend die Verzögerung der Schallgeschwindigkeit in ihrer Abhängigkeit von dem Durchmesser der Röhren der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie gemäß finden, kommen beide Experimentatoren in Bezug auf die Abhängigkeit von der Schwingungszahl zu verschiedenen Resultaten. Nach der Theorie soll die Verzögerung in Röhren vom Durchmesser der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl umkehrt proportional sein, nach den Versuchen nimmt aber die Verzögerung rascher ab, wie die Quadratwurzel aus der Schwingungszahl wächst, und Seebeck schließt aus seinen Versuchen, daß die Abnahme der Geschwindigkeit der Quadratwurzel aus der dritten Potenz der Schwingungszahl proportional ist. In der That multipliciert man die in obiger Tabelle mitgetheilten Werte mit $n^{\frac{3}{2}}$, so findet man die in jeder Horizontalreihe sich ergebenden Produkte annähernd konstant; indes scheint, wenn man sich an die indirekten Beobachtungen hält, die Verzögerung ebenso gut den Schwingungszahlen selbst umgekehrt proportional gesetzt werden zu können, so daß sich den Versuchen Seebecks kein bestimmtes Gesetz über die Abhängigkeit der Verzögerung von der Schwingungszahl ableiten läßt.

Später hat Kaiser¹⁾ die Methode der Staubfiguren zu einer erneuten Prüfung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie benutzt; er wandte drei Töne, deren Schwingungszahlen 2357 — 3895 — 5232 Schwingungen waren, an und brachte die Staubfiguren in 5 Röhren, deren Durchmesser

25,8^{mm} 33,3^{mm} 44^{mm} 51,7^{mm} 82^{mm}

angenommen, hervor. Er schloß aus seinen Versuchen, daß sowohl die Abhängigkeit der Verzögerung von dem Durchmesser der Röhre, als von der Schwingungszahl der Theorie entsprechen, daß man indes für die Konstante der theoretischen Gleichung nicht den aus der Theorie sich ergebenden Wert $0,00588$, sondern einen etwa viermal größern Wert $0,0235$ einsetzen muß. In der That geben die auf diese Weise aus den Beobachtungen berechneten Werte für die Schallgeschwindigkeiten eine recht gute Übereinstimmung, indes tritt eine deutliche Abnahme der Werte mit der Röhrendicke ein. Die Werte werden nämlich für die Röhren

I	II	III	IV	V
332,67	332,86	332,34	332,16	332,5
332,87	332,82	332,80	332,80	
332,69				
332,74	332,84	332,57	332,48	

¹⁾ Kaiser, Wiedem. Ann. Bd. II.

Außerdem ergibt sich aus diesen Versuchen für die weiteste Röhre in dieser Weise berechnet eine auffallend große Korrektion, nämlich noch fast ein Meter, während die Versuche Kundts für eine erheblich größere Wellenlänge schon bei 26^{mm} Durchmesser der Röhre die volle Schallgeschwindigkeit ergab. Berechnet man in der oben angegebenen Weise mit Elimination des Korrektionsgliedes die Geschwindigkeit aus den Versuchen mit gleichen Tönen in den verschiedenen Röhren, so erhält man erheblich verschiedene Werte, je nachdem man den tiefsten der drei Töne oder den mittlern anwendet. Für den tiefsten Ton liegen die Werte zwischen 333,4 und 330,91, das Mittel wird 331,76, für den mittlern Ton liegen die Werte zwischen 332,75 und 334,17, das Mittel ist 332,33; gerade die Rechnungen, in denen die weiteste Röhre eingeht, liefern bei der letztern Berechnung die kleinsten Werte. Trotz der Sorgfalt, mit welcher Kaiser seine Versuche anstellte, scheinen dieselben deshalb doch nicht geeignet, die Frage abzuschließen, und ebenso wenig wird man den von Kaiser aus seinen Versuchen abgeleiteten Wert der Schallgeschwindigkeit 332,5, dem am Schlusse des vorigen Paragraphen gezogenen Mittelwert vorziehen.

Wenn nach alledem die indirekte Methode der Messung der Schallgeschwindigkeit für Luft noch keine zuverlässigern Werte ergeben hat, als die direkte, so ist die Methode doch vorzüglich geeignet, die Geschwindigkeit des Schalles in verschiedenen Gasen und in verschiedenen Temperaturen zu vergleichen.

Dulong¹⁾ benutzte zu dem Zwecke die Töne von Orgelpfeifen; er legte die Pfeifen horizontal in einen großen, von innen und außen mit Blei beschlagenen Holzkasten, der ganz vollständig mit dem wohl ausgetrockneten zu untersuchenden Gase gefüllt war. Ein Gasometer, mit demselben Gase angefüllt, stand mit dem Fusse der Pfeife in Verbindung, und trieb das Gas unter konstantem Drucke in die Pfeife hinein. Sobald der Strom anfieng, wurde in einer Wand des Kastens ein Loch geöffnet, um das eindringende Gas wieder abströmen zu lassen.

War nun bei einer und derselben Pfeife N die Schwingungszahl des Tones in einem Gase, N' diejenige in einem andern Gase, so ist bei Anwendung einer gedeckten Pfeife

$$c = 4(l + x) N$$

$$c' = 4(l + x) N',$$

also

$$\frac{c}{c'} = \frac{N}{N'}.$$

Das Verhältnis der beiden Schallgeschwindigkeiten erhalten wir also selbst ohne Kenntnis der anzubringenden Korrektion x , und somit, wenn wir die Geschwindigkeit c' in der Luft als anderweitig bestimmt annehmen, auch die Geschwindigkeit c des Schalles in den andern Gasen.

Ich habe zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeit in den verschiedenen Gasen und bei verschiedenen Temperaturen die Methode der Staubfiguren angewandt²⁾. Das benutzte Rohr hatte einen Durchmesser von nicht ganz

¹⁾ Dulong, Ann. de chim. et de phys. T. X p. 41. Poggend Ann. Bd. XVI.

²⁾ Wüllner, Über die Abhängigkeit der spezifischen Wärme der Gase etc. Wiedem. Ann. Bd. IV.

30^{mm}, der Ton, es war der Longitudinalton einer Glasröhre von 1^m Länge, hatte 2539 Schwingungen. Der tönende Stab trug auf seiner Mitte einen Kautschukstopfen, mit dem er luftdicht in das eine Ende des Wellenrohres eingesetzt wurde. An dem Ende des tönenden Stabes war eine leichte Platte von Ebonit aufgesetzt, deren Durchmesser sehr nahe dem des Wellenrohres gleich war, und welche die Schwingungen an das im Wellenrohr eingeschlossene Gas übertrug. Das andere Ende des Wellenrohres war ebenfalls luftdicht geschlossen, in einer Stopfbüchse liefs sich indes ein Stab verschieben, der im Innern des Wellenrohres ebenfalls eine Ebonitscheibe trug, deren Durchmesser dem des Wellenrohres gleich war, um so zu bewirken, dafs sich zwischen dem Ende des tönenden Stabes und dieser Scheibe immer eine ganze Zahl stehender Wellen befanden. An den beiden Enden des Wellenrohres waren mit Glashähnen verschließbare Röhren angesetzt, durch welche man das Rohr, nachdem es mit der Quecksilberpumpe luftleer gepumpt war, mit beliebigen ganz trocknen Gasen füllen konnte.

Bei den Versuchen wurde der mittlere Teil des Wellenrohres auf eine Strecke von 1,1^m in schmelzendes Eis oder in die Dämpfe des siedenden Wassers gelegt.

Das Korrektionsglied zur Reduktion der in den Röhren beobachteten Schallgeschwindigkeit auf den freien Raum ist zwar nach der Theorie von Helmholtz und Kirchhoff nicht unabhängig von der Natur des Gases. Indes bei den von mir gewählten Dimensionen der Röhre und der Schwingungszahl des Tones ist die Korrektion nur so unbedeutend, dafs sie überhaupt vernachlässigt werden kann. Es ergab sich das auch aus der Messung der Schallgeschwindigkeit in der Luft bei der Temperatur 0°, für welche ich im Mittel aus 6 Versuchsreihen erhielt

$$c_0 = 331,898.$$

Der Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit bei irgend einer Temperatur t ist

$$c = \sqrt{\frac{g \cdot H \cdot \sigma}{s_0}} k (1 + \alpha t).$$

Ist k ebenfalls von der Temperatur abhängig, so dafs wir es

$$k = k_0 (1 + \beta t)$$

setzen können, so können wir schreiben

$$c = c_0 \sqrt{(1 + \beta t) (1 + \alpha t)}$$

oder mit hinreichender Annäherung

$$c = c_0 \sqrt{1 + \gamma t},$$

worin $\gamma = \alpha + \beta$ gesetzt ist.

Nachfolgende Tabelle enthält in Kolonne I die Namen, in II die Dichtigkeit derselben, in III, IV, V die Geschwindigkeiten bei 0° nach Dulong, Regnault und meinen Beobachtungen, in VI die von mir bestimmten Werte α , in VII die von mir bestimmten β .

Name der Gase	Dichtigkeit	Geschwindigkeit des Schalles			c_0 Wöllner	γ
		Dulong	Regnault	Wöllner		
Luft	1	1	1	1	331,898	0,003646
Sauerstoff	1,1056	0,9524	—	—	—	—
Wasserstoff	0,06926	3,8123	3,801	—	—	—
Kohlenoxyd	0,9678	1,0132	—	1,0158	337,129	0,003588
Kohlensäure	1,5290	0,7856	0,8009	0,7812	259,383	0,003401
Stickoxydul	1,527	0,7865	0,8007	0,7823	259,636	0,003307
Ammoniak	0,5967	—	1,2279	1,2534	415,990	0,003436
Äthylen	0,9784	—	—	0,9518	315,90	0,003060

Die Werte von γ sind sämtlich kleiner als die Werte α , welche die Abnahme der Dichtigkeiten darstellen, es folgt somit, daß β einen negativen Wert hat, oder daß die Werte des Koeffizienten k mit steigender Temperatur kleiner werden. Die sich hiernach ergebenden Werte von k , und die Bedeutung deren Veränderlichkeit werden wir bei Gelegenheit der Behandlung der spezifischen Wärme der Gase besprechen.

§ 170.

Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern muß nach dem Früheren mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen übereinstimmen. Für Stäbe erhielten wir dieselbe im vorigen Kapitel durch die Gleichung

$$c = \sqrt{\frac{E}{s}},$$

worin E den Elastizitätskoeffizienten und s das spezifische Gewicht des Stabes bedeutet.

Direkte Messungen dieser Geschwindigkeit sind nur für Gußeisen von Biot¹⁾ vorhanden, welcher sie an einer Verbindung von 376 Röhren, die zusammen eine Länge von 951,25 Meter hatten, ausführte. In eine der Mündungen dieses Röhrenkanals ward ein Eisenring, der mit derselben gleichen Durchmesser hatte, angefügt und in seiner Mitte durch Stäbe von Eisen eine Glocke und ein von einer Stahlfeder gehaltener Hammer befestigt, vermöge deren man den letztern nach Belieben an die Glocke anschlagen lassen konnte. Dann pflanzte sich der Schall der Glocke zur Röhre durch die Stäbe und Ringe von Eisen fort, und stellte man sich an das andere Ende der Röhrenleitung, so mußte man einen doppelten Schall hören, einen, der durch das Metall der Röhre in der Zeit x hindurchgegangen war, den andern, der durch die Luft hindurch sich fortgepflanzt hatte. Man nahm in der That sehr deutlich zwei bestimmte Schläge wahr, zwischen denen eine Zeit von 2,5 Sekunden lag. Hieraus berechnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c' des Schalles im Eisen aus derjenigen in der Luft wie folgt. Die Zeit, welche der Schall brauchte, um in der Luft sich fortzupflanzen, war $\frac{951,25}{c}$, die Zeit x , die er im Eisen brauchte,

¹⁾ Biot, Experimentalphysik, übers. von Fechner. Leipzig 1823. Bd. II. p. 16.

$\frac{951,25}{c}$, die Differenz beider

$$\frac{951,25}{c} - \frac{951,25}{c'} = 2,5,$$

und daraus

$$c' = \frac{951,25 \cdot c}{951,25 - 2,5 \cdot c} = 10,5 c = 3475,5^m,$$

so daß also der Schall im Eisen in einer Sekunde nahe an 3500 Meter zurücklegt, wenn wir die Geschwindigkeit in der Luft in runder Zahl gleich 331^m setzen.

Man kann übrigens die Schallgeschwindigkeit in festen Körpern sehr leicht durch indirekte Beobachtungen gerade so erhalten, wie bei der Luft und den Gasen, durch Beobachtung der Longitudinaltöne eines Stabes. Wenn man einen an beiden Enden freien Stab in longitudinale Schwingungen versetzt, so ist die Schwingungszahl des entstehenden Grundtones:

$$N = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{E}{s}} = \frac{c}{2l},$$

und daraus

$$c = 2l \cdot N,$$

worin l die Länge des Stabes bedeutet.

Mit Hilfe dieser Methode ist von Wertheim¹⁾ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles für eine große Reihe von Metallen bestimmt worden. Ein Vergleich der experimentell erhaltenen Werte mit den theoretisch berechneten bestätigt die Richtigkeit der Theorie auf das vollständigste.

Name des Metalles	Geschwindigkeit in Luft = 1	$E = z \frac{G}{CS^2}$	s	$\sqrt{\frac{E}{s}}$
Blei ausgezogen ¹	4,257	1769.10 ⁸	11,16	3,787
Zinn "	7,480	—	—	—
Gold "	6,424	7977.10 ⁸	18,51	6,247
Silber "	8,057	7218.10 ⁸	10,36	7,940
Zink destilliert. gegossen	9,683	—	—	—
" gewöhnl. ausgez.	11,007	8568.10 ⁸	7,008	10,524
Kupfer ausgezogen	11,167	12213.10 ⁸	8,93	11,128
Platindraht mittl. Dicke	8,467	16720.10 ⁸	21,27	8,437
Eisen (Berry) ausgez.	15,108	20470.10 ⁸	7,74	15,472
Gußstahl ausgezogen	15,108	19180.10 ⁸	7,71	15,003
Stahldraht engl. ausgez.	14,961	18450.10 ⁸	7,71	14,716

Sehr bequem zur Vergleichung der Schallgeschwindigkeit in festen Körpern mit derjenigen in der Luft ist die Methode von Kundt²⁾ (in den vorigen Paragraphen besprochen²⁾). Wendet man in der Fol-

¹⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér.

Ann. Ergänzungsband II.

²⁾ Kundt, Poggend. Ann. Bd. CXXVII.

Anordnung irgend einen tönenden Stab an, so entspricht die Länge des Stabes der Länge einer stehenden Welle, während uns die Länge der in dem mit Staub versehenen Rohr vorhandenen Welle die Länge der stehenden Welle von genau derselben Schwingungsdauer in der Luft gibt. Ist nun c die Geschwindigkeit des Schalles im Stabe, l die Länge des Stabes, N seine Schwingungszahl, so ist

$$c = 2l \cdot N.$$

Ist c_1 die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft, l_1 die Länge der in dem Glasrohr gemessenen Wellen, so ist

$$c_1 = 2l_1 \cdot N,$$

somit

$$\frac{c}{c_1} = \frac{l}{l_1}.$$

Das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten ist gleich dem der Stablänge und der in dem Glasrohre gemessenen Wellen.

Drei Versuche, bei denen ein Messingstab von 941^{mm},5 Länge angewendet wurde, gaben für die Länge der Wellen in dem Rohre $l_1 = 43,30$; 43,29; 43,35. Daraus folgt $c = 10,87$; 10,87; 10,86.

Für drei Stahlstäbe aus demselben Stahl erhielt Kundt

$$c = 15,345; 15,334; 15,343.$$

Für einen Glasstab erhielt Kundt $c = 15,24$, und für einen Kupferdraht $c = 11,960$, ich erhielt für Glas $c = 15,29$.

Die Zahlen stimmen mit denen von Wertheim und den für dieselben Substanzen theoretisch berechneten so vortrefflich, daß die Genauigkeit der Methode dadurch unzweifelhaft bewiesen wird.

In etwas anderer Weise haben Stefan¹⁾ und Warburg²⁾ die Geschwindigkeit des Schalles in festen Körpern untersucht, auf welche sie auch instande waren die Geschwindigkeit in solchen Körpern zu bestimmen, welche nicht durch Anstreichen zum Tönen gebracht werden können, wie Kautschuk, Wachs und dergleichen.

Das Princip der Methode von Stefan ist folgendes. Man formt den Körper, der selbst nicht zum Tönen gebracht werden kann, wie Wachs, in Form eines kurzen Stabes und verbindet ihn fest mit einem Stabe von Glas oder Holz, welcher durch Reiben in tönende Schwingungen versetzt werden kann, so daß der Wachsstab eine Verlängerung des Holzstabes bildet. Das System dieser beiden so verbundenen Stäbe liefert, wenn man den Glasstab reibt, einen gut charakterisierten Longitudinalton, dessen Tonhöhe sich bestimmen läßt. Aus der Tonhöhe des isoliert schwingenden Glasstabes und der Änderung der Tonhöhe, wenn an den Glasstab der Wachsstab angesetzt ist, sowie aus der bekannten Länge und dem Gewichte des Wachsstabes läßt sich dann die Geschwindigkeit des Schalles in dem Wachsstabe berechnen. Die Berechnung dieser Versuche ist zu kompliziert, als daß wir hier darauf eingehen könnten.

So erhielt Stefan bei Wachs für die Temperatur 17° die Geschwindig-

¹⁾ Stefan, Wiener Berichte Bd. LVII. p. 697.

²⁾ Warburg, Poggend. Ann. Bd. CXXXVI.

keit gleich 880^m und fand, daß mit steigender Temperatur für jeden Grad die Geschwindigkeit um 40^m abnahm.

Die Methode von Warburg beruht darauf, daß man einen Stab des zu untersuchenden Materials durch einen andern, für welchen die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bekannt ist, in isochrone transversale Schwingungen versetzt, daß man auf beiden Stäben dann die Knotenpunkte aufsucht und die Länge der schwingenden Abteilungen beider Stäbe vergleicht. Man legt zu dem Ende einen Stab, etwa einen Spiegelglasstreifen, auf, so daß er in zwei Knotenlinien unterstützt ist. In einem Schwingungsmaximum, etwa dem mittelsten, klebt man mit Siegellack einen leichten hölzernen Steg, und klebt mit etwas Klebwachs auf diesen den zu untersuchenden Stab, so daß derselbe dem Spiegelglasstreifen parallel ist. Versetzt man den Spiegelglasstreifen in transversale Schwingungen, so teilen sich diese dem zu untersuchenden Stabe mit, und man kann auf beiden Stäben durch aufgestreuten Sand die Knotenlinien sichtbar machen. Mißt man auf beiden Stäben die Länge der ersten, zweiten, n ten schwingenden Abteilungen, dieselben von den freien Enden aus gerechnet, so gibt die Theorie für das Verhältnis der Schallgeschwindigkeiten in beiden Stäben

$$\frac{c}{c'} = \frac{l_n^2}{l_n'^2} \cdot \frac{h'}{h},$$

worin c die Schallgeschwindigkeit in dem zu untersuchenden Körper, l_n die Länge der, vom freien Ende ab, n ten schwingenden Abteilung auf demselben und h die Dicke des Stabes bedeutet, während c' , l_n' , h' dieselbe Bedeutung für den schwingenden Glasstreifen haben. Um die Methode zu prüfen, verglich Warburg zunächst die Geschwindigkeit des Schalles in Messing und Glas. Er erhielt in zwei Versuchen

$$\frac{c}{c'} = 0,676 \text{ und } 0,645,$$

im Mittel also 0,660, während er nach der Methode von Kundt den Wert 0,668 für dasselbe Verhältnis fand, zwei Werte, die nur um etwas mehr als 1% von einander abweichen. Für die Schallgeschwindigkeit im Glase lieferte ihm die Kundtsche Methode den Wert 15,65, für jene im Messing 10,46, die Geschwindigkeit in Luft gleich 1 gesetzt.

Die von Warburg nach dieser Methode erhaltenen Resultate zeigt folgende Tabelle.

Material	c jene im Glase gleich 1	Specif. Gew.	Elasticitätskoefficient bez. auf Glas = 1
Glas	1	2,390	1
Stearin	0,265	0,974	$\frac{1}{35}$
Paraffin	0,251	0,908	$\frac{1}{42}$
Wachs	0,166	0,971	$\frac{1}{68}$
Talg	0,075	0,917	$\frac{1}{61}$

Die Zahlen gelten für 15° — 17° C.

Setzt man die Geschwindigkeit des Schalles in Luft von 16° C. gleich 340^m, in Glas bezogen auf Luft gleich eins gleich 15,65, so ergibt sich für Wachs 883^m, eine Zahl, welche mit der Stefanschen gut übereinstimmt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, wie wir sie soeben bestimmten, gilt nur für stabförmige feste Körper, für nach allen Richtungen des Raumes ausgedehnte muß sie nach Wertheim größer sein¹⁾.

Der Grund dieser Erscheinung liegt in dem § 49 betrachteten Zusammenhange zwischen dem Elasticitätskoefficienten E und der beim Zuge eintretenden Volumänderung. Wir erhielten damals für das Gewicht p , welches einen Stab vom Querschnitte und der Länge 1, der an dem einem Ende aufgehängt ist, am andern das Gewicht trägt, um die Länge δ ausdehnt,

$$p = E\delta.$$

Andererseits erwähnten wir, daß nach der Theorie von Cauchy für dasselbe Gewicht die Beziehung besteht

$$p = k\delta + Kv \dots (\alpha),$$

worin v die Veränderung der Volumeinheit des Stabes bei jenem Zuge bedeutet. Die Änderung der Volumeinheit bei der Verlängerung δ setzt Wertheim gleich $\frac{1}{3}\delta$; daraus ergab sich gemäß der Gleichung

$$v = \frac{k}{2K + k} \cdot \delta,$$

daß $k = K$ und schliesslich

$$p = \frac{4}{3}k\delta.$$

Für den Elasticitätskoefficienten, jenes Gewicht, welches die Verlängerung δ gleich 1 macht, erhält man dann

$$\frac{p}{\delta} = E = \frac{4}{3}k.$$

Diese GröÙe E wandten wir bisher als Maß der Elasticität an. Nehmen wir aber jetzt einen Stab an, der nicht nur an seinem Ende fest ist, sondern auf dessen Oberfläche nach allen Seiten Kräfte wirken, welche eine Änderung des Querschnittes hindern, so wird jetzt die Verlängerung δ durch ein anderes Gewicht p' bewirkt werden, für welches, da auch jetzt noch die Verlängerung der GröÙe des Gewichtes proportional sein muß,

$$p' = E'\delta$$

und auch jetzt muß für p' die Beziehung bestehen

$$p' = k(\delta + v) \dots (\beta),$$

da die Gleichung (α) für jeden Zug oder Druck besteht, welchen man auf einen Körper wirken läßt, und da weiter k und K zwei nur von der Substanz der Körper abhängige Konstanten sind, somit die für einen bestimmten Fall zwischen ihnen bestehende Gleichheit bestehen muß, wie auch die Kräfte auf den Körper wirken mögen. Wenn nun aber der Stab sich um δ verlängert, nimmt, da jetzt eine Änderung des Querschnittes nicht eintreten

¹⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. III. Sér. T. XXIII.

ann, auch sein Volumen um δ zu, oder es wird

$$v = \delta; p' = 2k\delta$$

und daraus für den Koeffizienten E'

$$E' = 2k.$$

Dieser Koeffizient ist aber als das Maß der elastischen Kraft in diesem Falle zu betrachten, da uns das Produkt $E'\delta$ die Kraft gibt, welche wir zu einer Ausdehnung δ aufwenden müssen, also auch die Kraft, mit welcher sie um δ von einander entfernten Schichten sich wieder einander anziehen.

Aus dem Obigen folgt

$$E : E' = \frac{1}{2} k : 2k, \\ E' = \frac{3}{2} E.$$

Unter dieser Voraussetzung ist also die Kraft, mit welcher sich die in einander entfernten Schichten anziehen, die elastische Kraft des Körpers, das Anderthalbfache von derjenigen, welche bei Verlängerung um die gleiche GröÙe eines nur an seinen Enden festen Stabes auftritt.

Wenn wir in einer ausgedehnten Masse des festen Körpers einen Cylinder dieser Masse verlängern oder verkürzen wollten, so würde in dem Falle, da die Wand dieses Cylinders rings von der gleichen Masse des umgebenden Körpers festgehalten und angezogen wird, das Maß der Elasticität durch die GröÙe E' gegeben sein.

Das ist der Fall, wenn sich in einer ausgedehnten Masse eines festen Körpers der Schall ausbreitet. In der Richtung jedes Radius einer um die Quelle des Schalles gelegten Kugel pflanzen sich longitudinale Wellen fort, in jedem Radius treten also Verdichtungen und Verdünnungen ein. Da aber hier jeder dieser Radien von der gleichen Masse umgeben ist, können bei diesen Ausdehnungen und Zusammendrückungen der Länge nach keine Kontraktionen oder Dilatationen des Querschnittes stattfinden; das Maß der Elasticität ist also E' und nicht E .

Da wir für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles haben

$$c = \sqrt{\frac{e}{d}},$$

wird dieselbe in einer ausgedehnten Masse eines festen Körpers

$$c = \sqrt{\frac{E'}{s}} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{E}{s}},$$

oder nennen wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Stabe dieses Körpers c'

$$c = c' \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Für diejenigen Körper also, für welche die Wertheimsche Annahme richtig ist, verhält sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in einer Kugel oder in einer unbegrenzten Masse zu der Geschwindigkeit in einem Stabe

als $\sqrt{\frac{3}{2}}$ zu 1.

Ist die Volumveränderung nicht 0, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in einem Stab des Körpers ausgedehnten Z

meinem Annahme, daß die Querkontraktion für die verschiedenen Körper verschieden ist, so ist nach § 50

$$E = \frac{3K + k}{2 \frac{K}{k} + 1}.$$

Ist der Koeffizient der Querkontraktion gleich μ , so erhielten wir weiter

$$\mu = \frac{K}{2K + k}$$

$$K = k \cdot \frac{\mu}{1 - 2\mu}; \quad E = k(1 + \mu).$$

Ist der Stab verhindert sich in der Quere zusammen zu ziehen, so ist immer $\delta = v$, somit wird

$$w' = (k + K) \delta = k \cdot \left(\frac{1 - \mu}{1 - 2\mu} \right) \cdot \delta,$$

oder

$$E' = k \frac{1 - \mu}{1 - 2\mu},$$

und daraus

$$\frac{E'}{E} = \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}.$$

Daraus folgt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in ausgedehnten Massen

$$c = \sqrt{\frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}} \cdot \frac{E}{s} = c' \cdot \sqrt{\frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}}.$$

Wenn also μ von Null verschieden ist, also bei der Längsausdehnung überhaupt eine Querkontraktion eintritt, ist $c' > c$.

Diese Ausführungen lassen sich nicht leicht durch Versuche prüfen, da man nicht leicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles durch ausgedehnte Massen beobachten kann; sonst wäre das eine sichere Methode zur Bestimmung von μ .

§ 171.

Geschwindigkeit des Schalles in flüssigen Körpern. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in Flüssigkeiten muß nach dem Früheren mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Longitudinalwellen in den Flüssigkeiten übereinstimmen. Bedeutet H den Druck der Atmosphäre in Centimeter Quecksilberdruck, σ das spezifische Gewicht des Quecksilbers, s die Dichtigkeit und μ die Kompressibilität der betreffenden Flüssigkeit für eine Atmosphäre, so erhielten wir für c in § 146

$$c = \sqrt{\frac{gH\sigma}{\mu s}}.$$

Für Wasser, für welches $\mu = 0,000\,049\,9$, $s = 1$ bei 4°C . ist, wird dieser Ausdruck

$$c = 1418 \text{ Meter.}$$

Dieses Resultat ist durch direkte Versuche von Colladon und Sturm im Jahre 1827 auf dem Genfersee bestätigt worden¹⁾. Zwei Schiffe wur-

¹⁾ Colladon und Sturm, Poggend. Ann. Bd. XII.

in einer bestimmten, gemessenen Entfernung festgelegt. Das erstere eine in das Wasser getauchte Glocke, welche mittels eines an einem befestigten Hammers angeschlagen werden konnte. An dem andern des Hebels befand sich eine brennende Lunte, welche in demselben blicke, in welchem der Hammer die Glocke schlug, eine Quantität er entzündete. Von dem andern Schiffe reichte ein Hörrohr in das er, an dessen aus dem Wasser hervorragenden Ende der Beobachter Ohr anlegte, um den im Wasser fortgepflanzten Schall wahrzunehmen. der gemessenen Distanz der Schiffe und der beobachteten Zeit, welche then der Wahrnehmung der Flamme und des Schalles verflossen war, sich bei einer Temperatur von $8^{\circ},1$ Celsius

$$c = 1435 \text{ Meter.}$$

Setzen wir bei 8° C. nach den Beobachtungen von Grassi $\mu = 0,000\,049$ nach Kopp $s = 0,999\,775$, so wird

$$c = 1437 \text{ Meter,}$$

als das experimentelle Resultat mit dem theoretischen fast identisch ist. Andere direkte Beobachtungen über die Geschwindigkeit des Schalles Flüssigkeiten sind nicht vorhanden. Dagegen hat Wertheim¹⁾ auch hier Töne der offenen Pfeifen benutzt, um die Geschwindigkeit des Schalles Flüssigkeiten zu bestimmen. Das Verfahren, welches er anwandte, um Töne hervorzubringen, sowie die notwendigen Berichtigungen zu er- m, haben wir an den betreffenden Stellen beschrieben. Berechnete theim indes aus seinen Versuchen nach der für offene Pfeifen gültigen ungung aus den beobachteten Schwingungszahlen N die Schallgeschwin- mit c

$$c = 21N,$$

ergab sich eine weit kleinere Geschwindigkeit als die Versuche von und Sturm und die Theorie ergeben, nämlich bei 15° C. als Mittel sehr vielen Versuchen

$$c = 1173,4 \text{ Meter.}$$

Um dieses Resultat mit der Theorie in Einklang zu bringen, nimmt theim an, daß sich in Flüssigkeiten nicht, wie man gewöhnlich an- at, der Druck momentan nach allen Richtungen gleichmäÙig überträgt, also nicht für einen momentanen Druck auf die eine Endfläche eines iner vollkommen ausdehn samen Wand eingeschlossenen Flüssigkeits- ders die Querdilatation gleich sei der durch den Druck hervorgebrach- Verkürzung, das heißt, daß das Volum ungeändert dasselbe sei, son- daß auch dort eine Volumänderung eintrete und zwar gerade so, wie en festen Körpern. Ist diese Annahme gestattet, so muß die Ver- ung des Schalles in einer Flüssigkeitssäule sich zu derjenigen in einer grenzten Flüssigkeit verhalten wie diejenige in einem Stab. hwindigkeit in einer unbegrenzten Masse. Wertheim Geschwindigkeit des Schalles in einer Flüssigkeitssäule Colladon und Sturm sowie die Theorie gaben die

¹⁾ Wertheim, Annales de chim. et de phys. Bd. LXXVII.

einer unbegrenzten Flüssigkeit. Die Wertheimsche Zahl mit $\sqrt{\frac{3}{2}}$ multipliziert, muß dann mit den früheren Zahlen übereinstimmen.

In der That ist

$$1173,4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = 1437,1 \text{ Meter,}$$

so daß die Koincidenz der auf diese Weise von Wertheim berechneten Zahl dafür spricht, daß das von ihm für feste Körper theoretisch abgeleitete Gesetz auch für Flüssigkeiten gültig ist, daß demnach die Gleichheit des Druckes in allen Richtungen nicht bei den Schallschwingungen stattfindet, vielmehr eine flüssige Säule, welche longitudinal vibriert, denselben Ton gibt wie ein starrer Körper, dessen Materie dieselbe kubische Kompressibilität besitzt wie die Flüssigkeit.

Daraus folgt, daß die Gesetze des Gleichgewichts starrer Körper auch für Flüssigkeiten gelten, während eines sehr kurzen Zeitabschnittes nach Anlegung äußerer Kräfte.

Ist dieses Verhältnis zwischen den beiden Geschwindigkeiten einmal festgestellt, so können wir für alle übrige Flüssigkeiten aus der Schallgeschwindigkeit in einer Säule die Geschwindigkeiten in einer unbegrenzten Masse und die Kompressibilität der Flüssigkeiten berechnen. Diese letztere ist für eine große Menge von Flüssigkeiten bereits direkt bestimmt; der Vergleich der nach beiden Methoden erhaltenen Werte der Kompressibilität würde also ein neues Mittel sein, die Wertheimschen Voraussetzungen und die theoretische Bestimmung der Schallgeschwindigkeit zu bestätigen.

Wertheim hat für eine Reihe von Flüssigkeiten die Schallgeschwindigkeiten bestimmt und daraus die Kompressibilität der Flüssigkeiten berechnet. Seine Resultate, mit denen von Grassi (§ 62) zusammengestellt, gibt folgende Tabelle:

Flüssigkeit	Temperatur	Dichte	Schallgeschwindigkeit in der		Kompressibilität nach	
			Säule	unbegrenzten Flüssigkeit	Wertheim	Grassi
			Meter	Meter		
Seinewasser	15°,0	0,9996	1173,4	1437,1	0,0000491	—
do.	30,0	0,9963	1250,9	1528,5	0,0000433	—
do.	40,0	0,9931	1324,8	1622,5	0,0000388	—
do.	60,0	0,9901	1408,2	1724,7	0,0000346	—
Meerwasser	20,0	1,0264	1187,0	1453,8	0,0000467	0,0000445
Lösung v. Kochsalz 36,90 %	18,0	1,1920	1275,0	1561,6	0,0000349	0,0000321
Lösung v. schwefels. Natron 13,35 %	20,0	1,1089	1245,2	1525,1	0,0000393	—
„ 20,27 %	18,8	1,1602	1292,9	1583,5	0,0000348	—
Lösung v. kohlens. Natron 20,7 %	22,2	1,1	1301,8	1594,4	0,0000337	0,0000303
Lösung v. salpeters. Natron 37,5 %	20,9	1,2066	1363,5	1669,9	0,0000301	0,0000306
Lösung von Chlorcalcium 76,5 %	22,5	1,4322	1616,3	1979,6	0,0000181	0,0000201
Alkohol 36° B.	20,0	0,8862	1049,9	1285,9	0,0000733	—
Alkohol absol.	23,0	0,7960	947,0	1159,8	0,0000947	0,0000999
Terpentinöl	24,0	0,8622	989,8	1212,3	0,0000800	—
Schwefeläther	0,0	0,7523	946,3	1259,0	0,0001002	0,000111

Trotz der sich hiernach ergebenden sehr guten Übereinstimmung zwischen der von Wertheim und Grassi gegebenen Kompressionskoeffizienten (schon Helmholtz¹⁾) darauf hingewiesen, daß die von Wertheim gegebene Bestätigung seiner Versuche nicht richtig sein kann. Der Unterschied der Schallgeschwindigkeit in einem Stabe und einer ausgedehnten Masse eines festen Körpers rührt daher, daß der Stab sich in seinen Querdimensionen ändern kann, in der ausgedehnten Masse dagegen nicht. Eine solche Änderung der Querdimension findet in einer Flüssigkeitspfeife nicht statt. Allerdings ist gegen die Schwingungen der Flüssigkeit eine Pfeifenwand von Messing nicht absolut fest, es muß deshalb eine Verlangsamung der Schwingungen in ähnlicher Weise eintreten, wie bei einer Orgelpfeife zwischen den Wänden. Die Verlangsamung muß deshalb von dem Durchmesser der Röhre, der Dicke ihrer Wandung und dem Elastizitätskoeffizienten des Materials der Wandung abhängen; je größer die beiden letztern sind, um so geringer muß die Verzögerung sein.

In der That haben Kundt und Lehmann²⁾ sowie Dvořák³⁾ gezeigt, daß die Einwürfe Helmholtz's richtig sind. Kundt gelang es nämlich, in Flüssigkeiten ganz eben solche und nach derselben Methode Staubfiguren hervorzurufen wie in Gasen, wenn er dafür sorgte, daß die Flüssigkeiten absolut luftfrei waren. Als Pulver benutzte er sehr fein gepulvertes Eisen, sogenanntes *ferrum limatum*. Die Messung der Länge der Wellen ergab für die Geschwindigkeit des Schalles im Wasser gerade wie in Luft. Die Resultate, die Kundt und Lehmann erhielten, entsprachen ganz den Berechnungen von Helmholtz, die Geschwindigkeit des Schalles nahm zu, wenn der Durchmesser der Flüssigkeitssäule abnahm und die Wandstärke der bei den Versuchen benutzten Glasröhren zunahm, wie folgende kleine Tabelle zeigt, die unter δ die Wandstärke, unter D den lichten Durchmesser der Röhre, unter V die aus den gemessenen Wellenlängen sich ergebende Geschwindigkeit des Schalles und unter t die Temperatur enthält, für welche die beobachtete Wert der Geschwindigkeit gilt:

δ	D	V	t
2,2 ^{mm}	28,7 ^{mm}	1040,4 ^m	18,0
3,0	34,0	1227,7	17,0
3,0	23,5	1262,2	18,0
3,5	21,0	1357,6	18,5
5,0	16,5	1360,2	18,5
5,0	14,0	1383,2	22,2

Es nähert sich somit die Geschwindigkeit erheblich der theoretischen. Ähnliche Resultate erhielt Dvořák ebenfalls durch Beobachtung von Staubfiguren, die er indes in anderer Weise erzeugte wie Kundt. Eine horizontale, etwa zwei Meter lange Röhre, die an ihrem einen Ende geschlossen war, wurde an beiden Enden vertikal umgebogen, das offene Ende um 1 Decimeter, das geschlossene Ende nur kurz. Die Röhre wurde dann mit Wasser gefüllt und an das geschlossene Ende eine große Luftblase ge-

¹⁾ Helmholtz, Fortschritte der Physik im Jahre 1848. Herausgegeben von der Berliner physikalischen Gesellschaft p. 114.

²⁾ Kundt und Lehmann. Poggend. Ann. Bd. CLIII.

³⁾ Dvořák, Poggend. Ann. Bd. CLIV.

bracht, so daß die Wassersäule dort durch Luft begrenzt war. Das aufsteigende offene Ende enthielt nur wenig Wasser. Dieses Ende wurde dann als Orgelpfeife angeblasen, indem man kräftig über die Röhre wegblies. Die Schwingungen dieser Luftsäule teilten sich dem Wasser mit, und in demselben ließen sich die Knotenlinien, hergestellt durch von Salpeter befreites Schießpulver, sehr gut messen. Der Vorteil dieses Verfahrens, gegenüber dem Kundtschen ist der, daß das Wasser nicht luftfrei zu sein braucht. Folgende Tabelle enthält einige Beobachtungen

δ	D	V
0,82 ^{mm}	17,9 ^{mm}	998 ^m
0,63	11,7	1046
0,52	8,46	1164
2	15	1213
2	11	1281.

Wie man sieht, stimmen diese Zahlen sehr gut mit denen von Kundt und Lehmann überein.

§ 172.

Reflexion des Schalles. Wenn eine schwingende Bewegung sich in einer unbegrenzten Punktreihe oder einem Punktsystem fortpflanzt, so kehrt sie nicht zurück, indem jeder Punkt an den folgenden seine ganze Bewegung überträgt; wenn aber die Bewegung an einer Grenze ankommt, wo die Elasticität oder die Dichtigkeit des Punktsystems sich ändert, so tritt an dieser Stelle eine Teilung der Bewegung ein, ein Teil geht in das zweite Mittel über, ein Teil kehrt als reflektierte Bewegung in dem ersten Mittel zurück. Die Gesetze dieser Reflexion haben wir § 134 kennen gelernt und gesehen, daß eine kugelförmige Welle von einer ebenen Grenzfläche so zurückgeworfen wird, als käme sie von einem Punkte, der ebensoweit hinter der Fläche liegt, als der Mittelpunkt der Bewegung vor der Fläche liegt. Jeder Radius der zurückgeworfenen Kugel bildet daher mit der Grenzfläche denselben Winkel als der die Fläche an derselben Stelle treffende Radius der einfallenden Kugel, oder der Winkel, welchen der einfallende Wellenstrahl mit der Normale der reflektierenden Fläche, mit dem Einfallslot bildet, ist gleich dem Winkel, welchen der reflektierte Wellenstrahl mit derselben Richtung bildet.

Da der Schall eine Wellenbewegung eines elastischen Mittels ist, so muß das Reflexionsgesetz des Schalles ganz mit dem der Wellen identisch sein. Ein an einer festen Wand in der Luft ankommender Schall wird so zurückgeworfen, daß der zurückgeworfene Schallstrahl mit dem Einfallslot denselben Winkel bildet als der ankommende Schallstrahl.

Trifft demnach ein Schallstrahl senkrecht gegen eine feste Wand, so wird er genau in derselben Richtung zurückgeworfen. Es ist bekannt, daß man im Echo den zurückgeworfenen Schall wahrnehmen kann. Steht man in einiger Entfernung vor einer festen Wand und ruft man gegen dieselbe, so hört man nach einiger Zeit denselben Ton von der Wand zurückkehren. Damit man aber den zurückgeworfenen Ton unterschieden von dem direkten Tone wahrnimmt, ist eine gewisse Zeit notwendig. Die Erfahrung zeigt,

n in einer Sekunde 10 Töne nach einander wahrnehmen kann, mehr deutlich unterscheiden kann, daß aber, wenn mehr Töne treffen, der Eindruck ein verworrener wird.

muß daher zwischen dem direkten und reflektierten Schalle 0,1 Sekunden, wenn wir das Echo deutlich von dem primär erzeugten Töne unterscheiden sollen. Der Schall durchläuft nun in 1 Sekunde 331 Meter, in 0,1 Sekunde also 33,1 Meter; befinden wir uns also 17 Meter von der festen Wand, so wird der Ton, um zur Wand und wieder zu uns zu gelangen, 0,1 Sekunde brauchen, wir hören also das Echo; rücken wir, so fällt es zum Teil mit dem direkten Tone zusammen, wir hören nur ein Verhalten des direkten Tones, entfernen wir uns von der Wand, so verfließt eine größere Zeit, in einer Entfernung von 34 Metern und so fort. In der Entfernung von 34 Meter können wir den ersten Ton noch einen zweiten folgen lassen, der 0,1 Sekunde später erst 0,1 Sekunde später wird der erste zurückgeworfene Ton, deutlich unterscheidbar, zu uns gelangen. In der Entfernung von 51 Meter von der festen Wand wird also das Echo ein sogenanntes zweifaches, in noch größerer Entfernung ein drei- und mehrsilbiges.

Das mehrfache Echo, das heißt die mehrmalige Wiederkehr desselben Tones tritt dann auf, wenn eine Anzahl reflektierender Flächen vorhanden ist, die alle von den in einem bestimmten Punkte erzeugten Schallwellen recht getroffen werden. Wie die Flächen dazu gegen einander stehen müssen, und daß im allgemeinen nur ein bestimmter Ort das mehrfache Echo hört, ist ohne weiteres klar.

Wie früher von der Reflexion der Wellen an krummen Flächen gesagt ist, gilt auch von der des Schalles, das Reflexionsgesetz bleibt dasselbe. Es erklärt sich die bekannte Erscheinung, daß in einem elliptischen Saale an einem Brennpunkte erregte Schall in dem andern Brennpunkte fast ungeänderter Stärke vernommen wird.

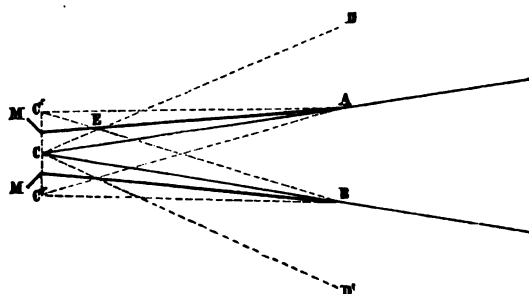
Die Folge der Reflexion des Schalles ist das Verhalten der Töne in einem begrenzten großen Raume und die daraus hervorgehende Unklarheit einer geordneten Reihe von Tönen, z. B. einer Rede. Das gesprochene Wort wird von den entfernten Wänden so zurückgeworfen, daß der reflektierte Schall zum Teil noch mit dem direkten, zum Teil, wenn er langsam gesprochen wird, mit dem des folgenden Wortes zusammenfällt, und besonders das letztere undeutlich macht. Alles was dem ersten Schall stört, wird daher die Deutlichkeit des Hörens in solchen Räumen vermehren. Ist der Raum mit Menschen gefüllt, so hört man deutlich dann die reflektierten Wellen selbst wieder vielfach reflektiert werden und so ihre Regelmäßigkeit gestört wird. Je kleiner ferner der Luftunterschied zwischen der Luft und den Wänden des Raumes ist, desto schwächer sind die reflektierten Wellen. Eine Bekleidung der Wände mit weichen, wenig dichten Stoffen schwächt daher die reflektierten Wellen und mehr die Deutlichkeit des Hörens. Indes wird dadurch auch die Reflexion des Schalles durch den Mangel der sofort zu betrachtenden Resonanz verhindert, deshalb ist das Mittel in Räumen, in welchen der Schall zuhörig und deutlich sein soll, wie in Konzertsälen, Theatern, nicht zu empfehlen.

Man hindert man, daß die von den verschiedenen Wänden reflektierten

Schallwellen nach der gleichen Richtung zurückgeworfen werden, so können sich dieselben nicht verstärken, sie werden daher in dem Falle möglichst wenig stören. Das erreicht man, indem man dem Raume einen rechteckigen Grundris erteilt und nur gerade Wände gibt. Von geraden Wänden werden die von einem Punkte ausgehenden Schallwellen alle divergierend zurückgeworfen. Es ist indes ein noch ungelöstes Problem, welches die Form eines Raumes ist, in welchem eine Reihe erzeugter Töne am besten und deutlichsten klingt.

Eine vielfach gebrauchte Anwendung der Reflexionsgesetze ist das Sprachrohr. Dasselbe hat den Zweck, Rufe in Entfernungen noch deutlich hörbar zu machen, in denen sie bei ungehinderter Verbreitung des Schalles zu schwach werden. Die einfachste Form eines solchen Apparates ist ein konisches Rohr von Pappe oder Metall, die Materie ist ohne Einfluss. Man legt die Lippen in ein Mundstück (Fig. 289), welches sich an der Spitze

Fig. 289.



des Kegels befindet, und man spricht in das Rohr hinein, indem man es nach der Seite hinrichtet, nach welcher hin man den Schall werfen will. Sei z. B. der Ton in dem Mittelpunkte C des Mundstückes erzeugt, so wird sich der Teil CAB der Schallwelle, welcher durch den Kegel begrenzt ist, dessen Mittelpunkt C und

dessen Basis der Umfang AB des konischen Rohres ist, ungehindert ausbreiten. Derjenige Teil der Welle aber, welcher in dem Winkel DCA liegt, wird an den verschiedenen Punkten der Wand MA reflektiert und pflanzt sich fort, als käme er von dem Punkte C als Strahlenkegel CAB . Auch diese Schallstrahlen werden somit innerhalb des Kegels CAB sich fortpflanzen und den Schall nach der Richtung der Axe des Rohres verstärken. Gleiches gilt von dem Strahlenkegel BCD' , und man sieht, daß schließlich der ganze zwischen DCD' liegende Teil der Welle in einem kleinen Kegel kondensiert ist, daß dieser Teil der Schallwelle, anstatt sich im Raum DCD' auszubreiten, den Schall in der Axe des Kegels verstärken wird. Diejenigen Schallstrahlen, welche die Wand noch näher bei M treffen als der Strahl CD , können durch mehrmalige Reflexion zunächst an der Wand MA , dann an der Wand MB und wieder an der Wand MA nach derselben Richtung geworfen werden, und so ebenfalls zur Verstärkung des Schalles beitragen.

Lambert¹⁾ hat den Vorschlag gemacht, das konische Sprachrohr durch ein anderes zu ersetzen, das aus zwei krummen Flächen, einem Ellipsoid und einem Paraboloid zusammengesetzt ist. Das Mundstück ist so eingerichtet (Fig. 290), daß der Mund des Rufenden sich in dem einen Brennpunkte F des Ellipsoids befindet, die sämtlichen Schallstrahlen werden

1) Lambert, Memoiren der Berliner Akademie 1768.

an in dem andern Brennpunkte des Ellipsoides F' vereinigt und schreiten in diesem fort auf die Wand des paraboloidischen Stückes des Sprachrohrs. Der Brennpunkt F' ist zugleich der Brennpunkt der Parabel, und da die

Fig. 290.



sämtlichen Leitstrahlen, welche man von F' an die verschiedenen Punkte des Paraboloides zieht, mit den an eben diesen Punkten gezogenen Normalen der Fläche dieselben Winkel bilden, welche durch diese Punkte parallel mit der Axe gezogene Linien mit der Normale einschließen, so werden

alle von F' ausgehenden, das Paraboloid treffenden Schallstrahlen parallel der Axe reflektiert. Der Schall wird also ohne große Schwächung nach der Richtung der Parabelaxe sich fortpflanzen.

§ 173.

Übergang des Schalles in andere Mittel; Resonanz. Wenn eine schwingende Bewegung an der Grenze zweier Mittel ankommt, so geht, wie wir früher sahen, die schwingende Bewegung nicht nur im ersten Mittel reflektiert zurück, sondern sie geht auch in das zweite Mittel hinüber und pflanzt sich dort mit der für dieses Mittel gehörigen Geschwindigkeit weiter fort. Kommt die Welle, welche wir als eben voraussetzen wollen, in einer gegen die Grenzfläche geneigten Stellung an, so ist die Wellenebene im zweiten Mittel nicht derjenigen im ersten Mittel parallel, sondern gegen die Grenzfläche geneigt. Der Wellenstrahl wird also gebrochen, das Gesetz, nach welchem das geschieht, war folgendes:

1) Der gebrochene Wellenstrahl liegt mit dem einfallenden in derselben Ebene.

2) Der Sinus des Winkels i , den der einfallende Wellenstrahl mit dem Einfallslot bildet, verhält sich zum Sinus des Brechungswinkels r wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Bewegung im ersten Mittel c zu der im zweiten Mittel c' , oder

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{c}{c'}.$$

Dass der Schall nach diesem Gesetze gebrochen wird, hat durch ausgedehnte Versuchsreihen Hajech¹⁾ nachgewiesen. Hajech führte eine Röhre von 77 Millimeter Weite und veränderlicher Länge durch die Scheidewand zweier benachbarter Säle. Die beiden Enden dieser Röhre wurden durch Membranen geschlossen. Eine zweite Röhre, deren Axe in der Verlängerung der ersten lag, auf welche sie eingestellt war, endigte in einer Büchse, in welcher das tönende Instrument, Glocken verschiedener Größe, eingeschlossen wurde. Der Beobachter hielt sich in dem zweiten Saale auf, auf dessen Rückwand ein Kreisbogen gezogen und graduiert war, dessen Mittelpunkt

¹⁾ Hajech, Nuovo Cimento März 1857. Poggendorffs Annalen Bd. CIV

sich vertikal unter dem Ende der Röhre befand. Bei einer ersten Reihe von Versuchen wurden die Membranen senkrecht zur Axe der Röhre gestellt, welche sie verschlossen und die Röhre mit Luft oder andern Gasen gefüllt. Der Schall wurde nicht abgelenkt, sondern am stärksten in der Verlängerung der Röhrenaxe wahrgenommen. Da der Schall in der Axe der Röhre sich bewegte, so traf er senkrecht auf beide Grenzflächen der Röhre; nach dem Brechungsgesetz darf keine Ablenkung eintreten.

Darauf wurde die Membran in dem dem Beobachter zugewandten Ende der Röhre gegen die Axe geneigt, an der andern Seite blieb sie senkrecht. Dort traf also der in der Axe ankommende Schallstrahl wieder senkrecht auf die Grenzfläche, der Einfallswinkel war Null, also auch der Brechungswinkel; der Schall bewegte sich einfach in der Axe der Röhre weiter, mit welcher Substanz dieselbe auch gefüllt war. Der Strahl traf dann die zweite Fläche unter demselben Winkel, den die Membran mit der Axe bildete; der Einfallswinkel war also der Winkel, der diesen zu 90° ergänzte, er wurde einfach durch eine Messung des ersten Winkels erhalten.

Wurde die Röhre mit Luft gefüllt, so trat auch dann keine Ablenkung ein, da innerhalb und außerhalb der Röhre dasselbe Mittel war, der Schall sich also mit der gleichen Geschwindigkeit fortbewegte. Wurde aber das Rohr mit einem andern Gase oder einer Flüssigkeit gefüllt, so trat eine Ablenkung ein. Dieselbe wurde beobachtet dadurch, daß der Beobachter sein Ohr in gleicher Höhe mit dem Ende der Röhre hielt und auf dem Kreisbogen so lange seine Stelle veränderte, bis er den Schall am stärksten wahrnahm, dann von seinem Ohre ein Lot auf den Kreisbogen herabließ und den Winkel bestimmte, den der zu dem getroffenen Punkte gehörige Radius des Kreises mit dem Einfallslote bildete. Da dieser Radius die Richtung des austretenden Schalles angab, so bestimmte dieser Winkel den Brechungswinkel.

Hajech erhielt auf diese Weise folgende zugehörige Einfallswinkel und Brechungswinkel; die letzte Kolonne, welche die nach der Formel

$$\sin r = \frac{c}{c'} \cdot \sin i$$

aus den gegebenen Winkeln i berechneten r enthält, zeigt die Übereinstimmung der Resultate mit dem Brechungsgesetz:

Substanzen in der Röhre	Einfallswinkel	Brechungswinkel	
		beobachtet	berechnet
Wasserstoff	$35^\circ 50'$	8°	$8^\circ 50'$
"	25°	7°	$6^\circ 25'$
Ammoniakgas	41°	$29^\circ 20'$	$30^\circ 22'$
"	$35^\circ 50'$	25°	$26^\circ 50'$
Leuchtgas	$35^\circ 50'$	$25^\circ 40'$	—
Kohlensäure	$35^\circ 50'$	$49^\circ 50'$	$48^\circ 19'$
"	25°	$33^\circ 20'$	$32^\circ 35'$
Brunnenwasser	$35^\circ 50'$	$7^\circ 40'$	$7^\circ 58'$
"	25°	$5^\circ 40'$	$5^\circ 37'$
Gesätt. Kochsalzlösung	$35^\circ 50'$	$6^\circ 15'$	—
"	25°	$5^\circ 10'$	—

Man sieht, wie die Beobachtung das Gesetz bestätigt, welches sich aus der Theorie der Wellenbewegung ergeben hat¹⁾.

Wenn eine schwingende Bewegung in eine dünne Schicht eines zweiten Mittels übergeht und sich in derselben bis an die Grenze fortgepflanzt hat, so tritt beim Austritt in das erste Mittel aus der zweiten Grenze eine teilweise Reflexion der Bewegung ein und die reflektierte Welle kehrt in der Schicht zur ersten Grenze wieder zurück; wenn nun durch die erste Grenze immer neue und neue Bewegungen in das zweite Mittel übergehen, so können sich diese mit den in dem Mittel reflektierten zusammensetzen und stehende Wellen derselben Periode als die ankommende Welle erzeugen, gerade so wie in einem longitudinal schwingenden Stabe solche stehende Wellen durch Interferenz der direkt erregten Wellen und der an der einen Grenze reflektierten entstehen.

Man kann sich davon durch eine ganze Reihe von Versuchen überzeugen. Spannt man auf einem Monochord zwei Saiten vollständig im Einklang auf und setzt dann unter die eine einen Steg, so daß man $\frac{1}{4}$ der Saite absondert und streicht dann dieses $\frac{1}{4}$ mit dem Bogen an, so erhalten wir die zweite Oktave des Tones der ganzen Saite, indem dadurch sich die ganze Saite in vier gleiche schwingende Teile zerlegt. Sofort zeigt sich dann, daß auch die zweite nicht abgeteilte Saite mit der ersten isochron schwingt, denn hält man die erste rasch fest, so hört man noch eine Zeit lang genau denselben Ton auf der zweiten Saite, und bringt man auf die zweite Saite kleine Papier-Reiterchen, so werden dieselben abgeworfen, außer an den Stellen der Schwingungsknoten.

Wenn man in einem Raume ein Klavier oder eine Violine oder irgend ein Saiteninstrument aufstellt und bringt nun in deren Nähe einen Ton hervor, der ein harmonischer Ton einer der Saiten dieser Instrumente ist, so hört man sie auf das deutlichste mitklingen. Bei Anwendung eines Klaviers bekommt man bei gehobenem Dämpfer auf jeden hineingesungenen Ton einen Nachhall, der nicht nur diesen Ton, sondern auch die harmonischen Obertöne deutlich enthält.

Ebenso geben Pfeifen und Gläser, überhaupt eingeschlossene Luftkugeln, Töne an, wenn man einen ihrer harmonischen Töne in der Nähe erzeugt.

Wenn sich auf diese Weise durch den Einfluß einer schwingenden Bewegung in benachbarten Körpern stehende Schwingungen erzeugen, so ist unmittelbar ersichtlich, daß an jeder Grenzstelle die Erscheinungen sehr kompliziert werden, und daß sich deshalb nicht leicht eine Theorie geben läßt über die Form der Schwingungen in den mitschwingenden Körpern. Das aber läßt sich leicht erkennen, daß kräftiges Mitschwingen eines Körpers, also kräftiges Mittönen, nur dann eintreten kann, wenn die in dem mitschwingenden Körper eintretenden Schwingungen dort stehende Wellen geben können, wenn also der ankommende Ton einer der Eigentöne des mitschwingenden Körpers ist. In der Beziehung besteht ein großer

¹⁾ Betreffs der Brechung des Schalles sehe man indes *Mach* und *Fischer* vorgehend. Aus. Bd. CXLIX, welche zeigen, daß man nur unter besondern Umständen eine Brechung des Schalles mit Sicherheit nachweisen kann, da im allgemeinen die Wellenlängen gegen die brechenden Flächen zu groß sind, um ohne weiteres die Huyghenssche Konstruktion anwenden zu können.

Unterschied in der Stärke des Mittönens, je nachdem der mitschwingende Körper die durch einen einmaligen Anstoß erteilten Schwingungen lange beibehält oder schnell wieder verliert. Ein schwingender Körper, der seine Bewegung lange beibehält, wie eine Stimmgabel, oder alle starren elastischen Körper, wird nur merklich mittönen, wenn der ankommende Ton ein Eigenton des schwingenden Körpers ist, denn bei einer sehr kleinen Verstimmung des ankommenden Tones müssen sich die Eigenschwingungen des Körpers und die ankommenden Schwingungen stören, da sie verschiedener Phase werden. Wenn dagegen die Schwingungen des mitschwingenden Körpers, wie etwa bei wenig gespannten, sehr feinen Membranen, sehr rasch an Intensität abnehmen, so kann ein solcher Körper auch in merkliche Schwingungen versetzt werden, wenn der ankommende Ton auch von dem Eigenton desselben verschieden ist. Denn wenn ein Körper die infolge eines ersten Anstoßes entstehende Bewegung schon nach wenigen Schwingungen verliert, so wird jeder neue Anstoß ihm Bewegung erteilen, wenn auch die ankommende Bewegung in etwas anderer Phase ist als jene infolge des vorhergehenden Anstoßes, somit als der geringe Rest der noch in dem Körper vorhandenen schwingenden Bewegung.

Man kann diese Schlüsse leicht experimentell bestätigen; das Extrem nach der einen Richtung bildet etwa eine Stimmgabel, welche durch den Ton einer andern Stimmgabel kaum mehr zum Tönen gebracht wird, wenn derselbe nur um ein oder zwei Schwingungen anders ist. Man nehme zwei Stimmgabeln, die den Ton c_2 , also 512 Schwingungen in der Sekunde geben, beide auf Resonanzkasten stehend, so wird, wenn die Stimmung beider genau die gleiche ist, die andere kräftig mittönen, wenn man die eine anstreicht. Dann verstimme man die eine durch Aufkleben von Wachs, so daß sie nur ein oder zwei Schwingungen weniger macht, was man an den in einem der nächsten Paragraphen zu besprechenden Stößen leicht erkennen kann, man wird dann kaum noch ein Mittönen erhalten. Das Extrem nach der andern Seite bilden die Membranen in den Königschen Flammenkapseln, bei denen kaum Eigenschwingungen vorkommen, bei denen jeder Anstoß nur eine Schwingung bewirkt, eine solche Membran nimmt daher jede Schwingung auf, welche sie trifft.

Helmholtz¹⁾ hat die Beziehung zwischen der Dauer des Nachklings eines einmal in Schwingung versetzten Körpers und der Intensität des Mittönens genauer untersucht. Er gelangt dabei zu folgenden Resultaten.

Wenn wir die Intensität des Tones, der in einem mitschwingenden Körper durch genauen Einklang erzeugt wird, als Einheit setzen, so wird durch einen Ton, der um $\frac{1}{4}$ tiefer oder höher ist, die Tonstärke des mittönenden Körpers gleich 0,1, wenn der mittönende Körper nach 38 Schwingungen nur mehr 0,1 der Tonstärke besitzt, die ihm durch einen einmaligen Anstoß gegeben ist. Nimmt die Intensität der Eigenschwingungen so rasch ab, daß die Stärke des Tones, wenn der mittönende Körper für sich erregt wird, schon nach 19 Schwingungen auf 0,1 herabsinkt, so bewirkt ein Ton, der $\frac{1}{4}$ Ton höher oder tiefer ist, in dem mittönenden Körper

¹⁾ *Helmholtz*, Tonempfindungen III. Ausgabe p. 220 und Beilage X. Diese Sätze über Resonanz lassen gleichzeitig erkennen, weshalb in der Mundhöhle die Eigentöne mitklingen können, selbst wenn sie nicht gerade Obertöne des gesungenen oder gesprochenen Klanges sind.

inen Ton, der 0,1 der Stärke des durch genauen Gleichklang erzeugten Tones besitzt. Die gleiche Tonstärke des Mitschwingens tritt ein durch Töne, welche verschieden sind um

$\frac{1}{2}$ Ton, wenn die Intensität des Eigentones nach 9,5 Schwingungen	
$\frac{1}{4}$ " " " " " "	6,33 "
1 " " " " " "	4,75 "
$\frac{3}{4}$ " " " " " "	3,80 "
keine Terz, " " " " " "	3,17 "
$\frac{1}{2}$ Ton, " " " " " "	2,71 "
große Terz, " " " " " "	2,37 "

auf 0,1 der durch einen Anstoß erregten ursprünglichen Tonstärke herabgesunken ist. Man sieht also, daß nur solche Körper, in denen die einmal erregten Schwingungen sehr rasch an Stärke abnehmen durch Töne, welche von ihren Eigentönen verschieden sind, in merkliche Mitschwingungen versetzt werden, daß also starr elastische Körper nur dann merklich mitschwingen, wenn einer ihrer Eigentöne erklingt. In solchen mitschwingenden Körpern ist also die Tonhöhe gleich derjenigen des erregenden Tones.

Ferner ergibt sich aus den Versuchen von Savart¹⁾ der wie es scheint allgemeine Satz, daß die mitgeteilten Schwingungen stets parallel sind den ankommenden. Von den vielen Versuchen Savarts führen wir nur folgenden an. Ein feiner Streifen von Holz wird an seinem einen Ende an einem auf einem Boden aufgesetzten Holzstück befestigt (Fig. 291), an

Fig. 291.



an dem andern Ende ist eine gespannte Saite befestigt. Wenn man der gespannten Saite mittels eines Violinbogens eine schwingende Bewegung erteilt, senkrecht zur Ebene des Streifens, so gerät der Streifen in transversale Schwingungen, wie man aus der hüpfenden Bewegung des Sandes auf dem Streifen ersieht. Wenn man aber die Saite in einer mit der Ebene des Streifens parallelen Richtung in Schwingung versetzt, so schwingen die Teile des Streifens in der Ebene desselben hin und her. Sand auf den Streifen gestreut, erhält keine hüpfende, sondern nur eine gleitende Bewegung.

Da die Tonhöhe durch die an starr elastische Körper übertragenen Mitschwingungen, wie wir eben ableiteten, nicht geändert wird, so benutzt man in der Musik diese Erscheinung, um schwachen Klängen durch Resonanz eine bedeutende Stärke zu verleihen. Eine Saite einfach in Schraubstöcke von Blei eingespannt, gibt nur einen schwachen, kaum hörbaren Ton. Wenn man sie dagegen auf einer Platte elastischen Holzes ausspannt, mittels elastischer Halter daran befestigt und mittels Stegen von elastischem Holze damit in Verbindung setzt, so wird durch die Resonanz der Platte der Ton sehr bedeutend verstärkt.

¹⁾ Savart, Annales de chim. et de phys. XIX.

Der Klang einer Geige verdankt seine Kraft nur der Resonanz des Bodens, auf welchem die Saiten ausgespannt sind; ebenso ist beim Klavier die Stärke des Tones wesentlich abhängig von der Güte des mitschwingenden Resonanzbodens, mit welchem die Saiten durch den Steg, durch welchen sie gezogen sind, in Verbindung stehen. Ebenso gibt eine Stimmgabel einfach in der Luft gehalten einen äußerst schwachen kaum hörbaren Ton, derselbe wird aber sehr kräftig, wenn man die Gabel wie in Fig. 258 auf einen Resonanzkasten stellt, einen Kasten von elastischem Holze, dessen Luftsäule den Ton der Gabel gibt, oder wenn man sie auf den Resonanzkasten einer Geige oder überhaupt auf eine elastische Platte stellt.

Diese tonverstärkende Wirkung der mitschwingenden Platte erklärt sich unmittelbar aus den Gesetzen der Mechanik. So lange Saiten oder transversal schwingende Stäbe von kleiner Ausdehnung allein in der Luft schwingen, setzen sie nur kleine Luftmengen in Bewegung, wenn sie aber mit ausgedehnten elastischen Flächen in Verbindung, diese in isochrone Mitschwingungen versetzen, wird durch diese Schwingungen eine viel größere Luftmenge in Bewegung versetzt, und mit der Masse der schwingenden Teilchen wächst die Intensität des Tones.

Was aber an Intensität des Tones gewonnen wird, das geht an Dauer verloren; eine Stimmgabel oder eine gespannte Saite behalten, wenn sie für sich schwingen, ihre Bewegung lange bei, mit einem Resonanzboden verbunden, verlieren sie ihren Ton sehr rasch.

Nach dem Vorigen sieht man nun auch, welche Instrumente, um klingend zu werden, mit einem Resonanzboden verbunden werden müssen, welche nicht; alle diejenigen, welche den Ton durch Schwingungen von elastischen Streifen oder gespannten Saiten hervorbringen, brauchen einen Resonanzkasten oder Resonanzboden, diejenigen aber, bei denen die Luft direkt in Bewegung gesetzt wird, wie bei den Blasinstrumenten, bedürfen eines tonverstärkenden Mittels nicht.

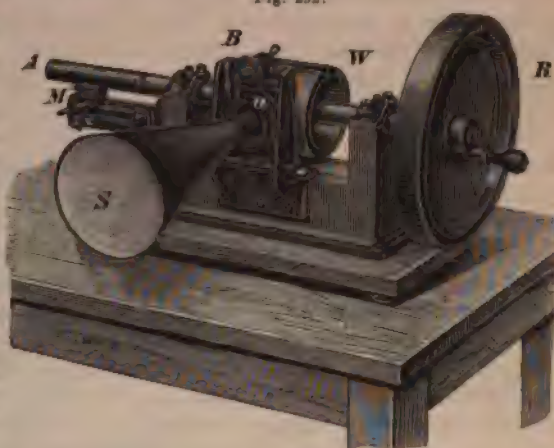
Die Resonanz verändert die Höhe eines erregten Tones nicht, wohl aber hat sie wesentlichen Einfluss auf den Klang, da die in einem Klange vorhandenen Partialtöne durch Resonanz nicht in demselben Verhältnis verstärkt werden. Der Klang einer Geige ist deshalb ein ganz anderer als der einer freien mit dem Bogen gestrichenen Saite. Ja der Klang der Geige wird ganz wesentlich von der Güte des Resonanzkastens bedingt, indem nur ein sehr elastischer gut gearbeiteter Kasten die höheren Partialtöne ebenso verstärkt als die tiefern.

Eine äußerst interessante Anwendung der Resonanz, welche zugleich zeigt, wie vollständig und genau die mitschwingenden Körper die Schwingungen reproducieren, ist neuerlichst in dem von Bell konstruierten Telephon und dem von Edison konstruierten Phonographen gemacht worden. Das Telephon werden wir im vierten Bande besprechen. Beide Apparate zeigen, daß nicht nur feine Gummimembranen, sondern auch starre Platten alle an sie ankommenden Schwingungen aufnehmen, sie verwenden die Schwingungen der Platten nur in etwas verschiedener Weise, um gegen die Platte gesandte Töne oder Klänge oder auch die menschliche Sprache, das Telephon an einem entfernten Ort, der Phonograph am Orte der Erzeugung des Klanges zu reproducieren.

Der wesentliche Teil des Phonographen, von dem Fig. 292 eine Abbildung zeigt in der Form, welche ihm von der Maschinenfabrik Osenbrück & Co. zu Hemelingen bei Bremen gegeben ist, ist die etwa 0,25^{mm} dicke Eisenblechplatte, welche mit ihrem Rande in der kreisförmigen Fassung *a* befestigt ist und den Boden des Schallbeckers *S* bildet. Eine an der Fassung *a* der Platte befestigte Stahlfeder, welche bis genau unter die Mitte der Platte reicht, drückt auf der vom Sprachrohr abgewandten Seite ein kurzes Stück dicken Kautschukrohres gegen die Mitte der Platte. Diese Stahlfeder trägt an ihrem Ende einen feinen vorn nicht zu spitzen, vielmehr etwas abgerundeten Stift senkrecht zur Ebene der Platte. Sendet man nun einen Klang in das Sprachrohr, so nimmt die Platte alle hingeschickten Schwingungen auf und überträgt sie durch das Kautschukrohr auf den Stift, welcher dann gerade so in Bewegung gerät, wie die Flammen der Königschen Flammenapparate Fig. 264, welche, wie wir sahen, jeden Partialton des in den Schalltrichter gesandten Klanges wiedergeben. Die Platte mit dem Schalltrichter wird von einem festen Rahmen getragen, der mit der unter *B* sichtbaren Schraube der Walze *W* etwas näher gebracht oder von ihr entfernt werden kann.

Fig. 292.

Die Spitze schreibt ihre Bewegungen auf die Walze *W*, welche, wie die Figur zeigt, auf der Axe *A* aufgesetzt ist, die durch die Kurbel des Schwungrades *R* in Drehung versetzt werden kann, und bei der Drehung durch die in die Mutter *M* eingreifende Schraube, welche in das Ende der Axe bei *A* eingeschnitten ist, vorwärts bewegt wird. In die Walze *W* ist der Schraube bei *A* ent-



sprechend eine Spiralfurche eingeschnitten. Die Walze *W* wird mit einem Blatte dünner Zinnfolie, etwa 1 Quadratdecimeter 1 Gramm wiegend, überzogen. Der die Platte mit der Spitze tragende Rahmen wird dann so gestellt, daß die Spitze mit sanftem Drucke auf der Zinnfolie über der Vertiefung der Spiralfurche aufsteht.

Sendet man nun in den Schalltrichter, respektive in das bei dem Hineinsenden des Tones ihn ersetzende kleinere Mundstück, einen Klang gegen die Platte oder spricht man mit kräftiger Stimme dagegen, während gleichzeitig die Walze in Rotation versetzt wird, so prägt der Stift, indem die Furche unter ihm weiter gleitet, seine Schwingungen in die Metallfolie ein. Die Eindrücke erscheinen dem freien Auge wie kleine eingedrückte Punkte, mit dem Mikroskope betrachtet erkennt man in ihnen indes mehr oder weniger starke Vertiefungen je nach der Art des Klanges, den sie darstellen. Ein Durchschnitt durch die Eindrücke längs der Furche gibt eine

Kurve, nur nicht mit so starken Erhöhungen und Vertiefungen, wie sie die Enden der Flammen der Königschen Flammenbilder zeigen.

Man bringt dann, wenn die in den Phonographen zu sendenden Klänge oder die Rede beendet ist, die Walze wieder in die Anfangslage zurück, während man den Rahmen mit der Spitze etwas zurückgezogen hat. Ist die Walze wieder in der Anfangslage angekommen, so bringt man die Spitze wieder in die Lage, daß sie an dem Staniol anliegt, wie sie es bei dem Niederschreiben der Schwingungen that. Man ersetzt dann das Mundstück durch den Schalltrichter *S* und dreht die Walze mit derselben Geschwindigkeit wieder vorwärts, wie vorher bei dem Schreiben. Da die gegen die Zinnfolie drückende Spitze genau dieselben Schwingungen, bei ihrer Bewegung über die Vertiefungen fort, wieder annimmt, und der Platte mitteilt, welche sie bei dem Hineinsenden des Klanges oder der Rede angenommen hatte, so kommen jetzt derselbe Klang oder dieselbe Rede wieder aus dem Schalltrichter hervor, welche man vorher hineingesandt hat. Der zurückkehrende Klang ist nur erheblich schwächer, und der Klang der zurückkehrenden Rede ist im allgemeinen etwas näseld, wie Auerbach in den Beiblättern zu Poggendorffs Annalen Bd. II ganz richtig bemerkt.

Ist die Geschwindigkeit, mit der man bei der Reproduktion des Klanges die Walze dreht, eine andere als beim Hineinsenden desselben, so wird die Tonhöhe des reproducirten Klanges eine andere, ist die Geschwindigkeit ungleichmäßig, so werden hineingesungene Klänge unrein, die hineingesprochene Rede bei der Reproduktion undeutlich. Um die bei der Bewegung mit freier Hand schwierig zu erhaltende Gleichmäßigkeit der Bewegung zu erzeugen, dient eben das schwere Schwungrad *R*. Eine noch grössere Regelmäßigkeit ist dadurch zu erreichen, daß man die Axe durch ein Uhrwerk von konstanter Geschwindigkeit dreht.

Die Reproduktion der Klänge und der menschlichen Rede durch den Phonographen ist ein vollgültiger und äußerst interessanter Beweis für die Richtigkeit der Helmholtzschen Theorie des Klanges überhaupt und der Vokalklänge der menschlichen Stimme insbesondere. Hier erhält eben die schwingende Platte bei der Reproduktion des Klanges die Schwingungen in der Zusammengesetztheit zurück, wie sie durch die einzelnen Partialtöne des hineingesandten Klanges bedingt ist, und nichts anderes. Daß die Schwingungen der Platte dann wesentlich denselben Klang reproducieren, beweist eben, daß in dieser Zusammengesetztheit der Schwingungen die Wesenheit des Klanges begründet ist und in nichts andern.

Eine Untersuchung der Kurven, die, wie vorhin erwähnt, ein durch die Vertiefungen des Staniols geführter Längsschnitt liefert, kann eine weitere Bestätigung der Klang- und Vokaltheorie liefern. In dieser Weise haben Fleming Jenkin und Ewing¹⁾ den Phonographen benutzt, indem sie durch eine nicht näher zu beschreibende Vorrichtung die den Vertiefungen entsprechenden Kurven in vergrößertem Maßstabe aufzeichnen ließen, und dann an diesen Kurven die Intensitäten der einzelnen Partialtöne, welche die Vokalklänge zusammensetzten, bestimmten. Auch die so erhaltenen Resultate stimmen im wesentlichen mit der Helmholtzschen Theorie überein²⁾.

¹⁾ Fleming Jenkin und J. A. Ewing. Nature Bd. XVIII p. 340. 394. 454.

²⁾ Man sehe das Referat über diese Arbeit in den Beiblättern zu Poggendorffs Annalen Bd. II p. 691 von Auerbach.

§ 174.

Das menschliche Ohr. Durch die Mittheilung der schwingenden Bewegung an die die Gehörnerven umgebenden elastischen Medien und dadurch an den Gehörnerven selbst nehmen wir den Schall wahr.

Das Gehörorgan des Menschen umfaßt drei Abtheilungen von Hohlräumen, welche zum größten Teil in dem festen Knochen des Schläfenbeines eingeschlossen sind, das äußere, mittlere und innere Ohr; die beiden ersten sind mit Luft, das innere Ohr ist mit Wasser angefüllt.

Zum äußern Ohr gehört die Ohrmuschel und der äußere Gehörgang, zum mittlern Ohr die Paukenhöhle und die Ohrtrumpete, die tuba Eustachii.

Der äußere Gehörgang *a* (Fig. 293) ist durch das Trommelfell *b*, welches in seinem ganzen Umfange an Knochen angeheftet ist, von der Paukenhöhle *c* getrennt, diese verengert sich weiterhin zur Ohrtrumpete *d*, welche in der Nasenhöhle mündet. Die Höhle des innern Ohres, von der Fig. 294 einen Abguß in natürlicher Gröfse darstellt, liegt in dem Knochen, welcher die hintere Wand der Paukenhöhle bildet. Zwischen ihr und dem Trommelfell liegt in der Paukenhöhle die Reihe der Gehörknöchelchen.

Fig. 293.

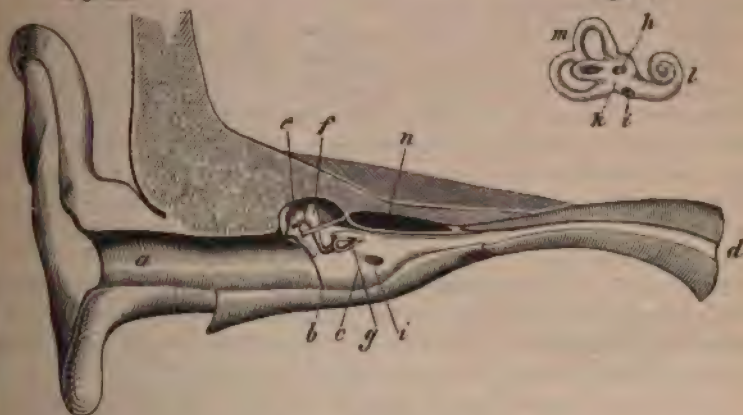
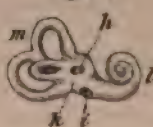


Fig. 294.



Der Hammer (malleus) *e* ist mit seinem langen Fortsatz oder Stiel im Centrum des Trommelfells, ferner in einer Linie von da zum obern Ansatzende hinauf und nahe dem letztern noch einmal mit seinem kurzen Fortsatze am Trommelfell angeheftet. Außerdem ist er noch durch einen kurzen Fortsatz, der gerade nach vorn über dem Rande des Trommelfells liegt (und deshalb in der Figur abgeschnitten ist), an der Knochenwand der Paukenhöhle angeheftet.

Sein Kopf, der den obern Rand des Paukenfelles überragt, steht durch ein Gelenk mit dem zweiten Knochen, dem Ambos (incus) *f* (Fig. 293) in Verbindung. Der Ambos ist außerdem mit einem kurzen (in der Figur hinter dem Hammer liegenden) Fortsatz an der hintern Wand der Paukenhöhle angestützt.

Vom Ambos geht ein langer Fortsatz parallel dem Stiele des Hammers nach unten; an seinem Ende ist der dritte Knochen, der Steigbügel *g*

(Fig. 293) befestigt, der horizontal nach hinten liegt. Die Platte, in der seine beiden Leisten zusammenstoßen, der Fußtritt, ist an ihrem Rande herum häutig mit dem Rande des ovalen Fensters *h* (Fig. 294) verbunden, welches in der Mitte des hintern Theiles der Paukenhöhle in die Höhle des innern Ohres führt.

Das innere Ohr steht durch zwei Öffnungen mit der Paukenhöhle in Verbindung durch das ovale Fenster *h*, welches von der Platte des Steigbügels bedeckt ist, und das unterhalb demselben liegende runde Fenster *i*, welches durch eine einfache feine Membran geschlossen ist. Das ovale Fenster führt zum mittlern Theile des innern Ohres, zum Vorhof (vestibulum) *k* (Fig. 294), in welchem dem Fenster und somit der Platte des Steigbügels gerade gegenüber ein Zweig des Gehörnerves einmündet. Vom Vorhof geht nach der einen Seite der spiralig gewundene Gang der Schnecke (cochlea) *l* (Fig. 294) aus, in welchem sich ein besonderer Ast der Nerven von der Axe aus verteilt. Zur Schnecke führt außerdem direkt von der Paukenhöhle aus das runde Fenster *i*.

Nach der andern Seite gehen vom Vorhofe die drei halbzirkelförmigen Kanäle *m*, in drei zu einander senkrechten Ebenen gebogen, in je zwei Mündungen aus. Auch diese erhalten durch die eine etwas erweiterte Mündung Äste des Gehörnerven.

Das Trommelfell ist mit seinem Centrum ein wenig trichterförmig in die Paukenhöhle hinein vertieft und dadurch gespannt. Diese Spannung kann durch eine Drehung des Hammers um die den obern Rand des Trommelfelles tangierende (zur Ebene der Figur senkrechte) Axe des Fortsatzes, mit dem er an die Wand der Paukenhöhle befestigt ist, etwas vermehrt werden. Dadurch rückt das untere Ende seines Stieles dem ovalen Fenster näher, und da die andern Gehörknöchelchen seiner Bewegung einigermaßen folgen, so wird dadurch der Fußtritt des Steigbügels etwas in das ovale Fenster hineingetrieben.

Das Wasser des Labyrinthes kann diesem Drucke nur dadurch ausweichen, daß es die das runde Fenster verschließende Membran gegen die Paukenhöhle hinausdrängt, so daß mit der stärkern Spannung des Trommelfelles auch diejenige dieser Membran wächst.

Im großen und ganzen geht aus der anatomischen Beschreibung des Gehörorgans die Art der Schallwahrnehmung hinlänglich deutlich hervor. Die Schwingungen der Luft teilen sich zunächst dem Trommelfelle mit, das dadurch entweder in longitudinale Schwingungen, wie Johannes Müller annimmt, oder in transversale Schwingungen, bei denen die Membran als solche schwingt, wie andere wollen, versetzt wird. Die Schwingungen des Trommelfells pflanzen sich dann durch die Reihe der Gehörknöchelchen zum ovalen Fenster und so in die Flüssigkeit des Vorhofes, und durch die Luft der Paukenhöhle zum runden Fenster und in die Flüssigkeit der Schnecke fort. In beiden Flüssigkeiten, der des Vorhofes sowohl, dem ovalen Fenster gerade gegenüber, als auch jener der Schnecke endigen Teile der Gehörnerven.

Aber auch in den halbzirkelförmigen Kanälen endigen Zweige des Gehörnerves, auch diese müssen daher zum Hören beitragen. Es ist nun eine wahrscheinliche Hypothese, daß die durch den Ton erregten Schwingungen der Kopfknochen sich der Flüssigkeit in den halbzirkelförmigen Kanälen

theilen, und daß diese dann durch die in denselben mündenden Nervenendigungen percipiert werden.

Die neuern anatomischen Entdeckungen über den Bau des innern Ohres, besonders die Art, wie die Nerven dort endigen, von Max Schultze und von Marchese Corti haben Helmholtz¹⁾ in den Stand gesetzt, die Perception des Schalles genauer zu erkennen. Es würde die uns in diesem Buche gesteckten Grenzen weit überschreiten, wollten wir diese Fragen hier ausführlich besprechen; nur einen Punkt müssen wir etwas genauer hervorheben, nämlich wodurch nach der Hypothese von Helmholtz das menschliche Ohr in den Stand gesetzt wird, jeden Klang in seine einzelnen Partialtöne zu zerlegen. Diese Zerlegung findet wahrscheinlich in der Schnecke statt und wird ermöglicht durch die eigenthümlichen Gebilde, mit welchen dort die Nervenendigungen in Verbindung stehen. Die Schnecke ist nämlich ihrer ganzen Länge nach durch eine theils knöcherne, theils membranöse Scheidewand in zwei Hälften geteilt, eine obere und eine untere, die eine mündet im Vorhof, die andere läuft gegen die Paukenhöhle aus und ist durch die Membran des runden Fensters geschlossen. Der knöcherne Teil der Scheidewand befindet sich an der innern Seite der Windungen und durch diesen Teil derselben treten die Nervenfasern in die häutige Membran über, und dort endigen sie an den Cortischen Fasern, membranösen Streifen, welche an jener häutigen Membran, der membrana basilaris angewachsen, zwischen derselben und einer an der Schneckenwand befindlichen Membran, der Cortischen Membran ausgespannt sind. Die Breite der membrana basilaris ist in ihrem Beginn eine geringe, sie wächst, je mehr sie sich der Kuppel der Schnecke nähert bis mehr als zum Zwölffachen. Die Membran selbst besteht aus radialen, sie der Breite nach durchsetzenden ziemlich festen Fasern, welche parallel, in der angegebenen Weise in der Länge wachsend neben einander gelagert sind, und welche in der Längsrichtung der Membran viel weniger fest mit einander verbunden sind. Durch diese eigenthümliche Struktur, in Folge deren die Membran in der Richtung der Breite sehr viel stärker gespannt ist als in der Richtung der Länge, erhält sich die membrana basilaris annähernd so, als wären ihre Radialfasern ein System von gespannten Saiten, deren membranöse Verbindung dazu dient die schwingende Flüssigkeit der Schnecke an dem freien Durchtritt zwischen den Saiten zu hindern, und so zu bewirken, daß die Schwingungen der Flüssigkeit sich auf die Membran übertragen. Es werden deshalb die Bewegungen der einzelnen Fasern der Membran dieselben sein, es wäre jede einzelne unabhängig von den andern und folgte jede für sich den Schwingungen des Wassers in der Schnecke. Für diese radialen Fasern der membrana basilaris mit ihren Anhängen, den Cortischen Fasern nimmt Helmholtz an, daß jede für eine bestimmte Schwingungszahl abgemessen ist. Danach wird ein in das Ohr eindringender Ton namentlich an jener Stelle der Membran in Mitschwingungen versetzt, an denen der Tonagenten der gespannten und mit den verschiedenen Anhangsgebilden besetzten Radialfasern der Membran dem erregenden Ton am besten entspricht, von da werden sich die Schwingungen in schnell abnehmender Stärke auf die benachbarten Teile ausbreiten. Daß die Fasern, trotz ihrer

¹⁾ Helmholtz, Tonempfindungen III. Ausgabe p. 198—232.

geringen Länge auf die tieferen Töne der Tonskala abgestimmt sein können, das liegt nach der Annahme von Helmholtz eben in den Anhangsgebilden, welche die Fasern belasten.

Durch die Schwingungen der Radialfasern der Membran werden also direkt die mit denselben verbundenen Cortischen Fasern in dieselben Schwingungen versetzt, und damit die in diesen Fasern befindlichen Nervenanteile, welche die Empfindung des Tones vermitteln. Es würde demnach für jeden Ton eine bestimmte oder doch eine beschränkte Zahl von Nervenfasern erregt, so daß die verschiedenen Töne von ganz verschiedenen Fasern empfunden werden.

Aus dieser Theorie des Hörens, welche dasselbe als einen speziellen Fall des Mittönens auffaßt, erklärt sich zunächst die große Empfindlichkeit, welche ein geübtes Ohr für geringe Unterschiede in der Tonhöhe hat, welche nach Angabe von E. H. Weber soweit geht, daß das Ohr Töne als verschieden erkennt, deren Schwingungsverhältnis 1000 : 1001 ist, eine Angabe, welche Cornu und Mercadier¹⁾ bestätigen. Dieselben geben an, daß ein geübtes Ohr bei der tönenden Saite eines Monochordes, welche die Länge von einem Meter hat, deutlich die Verschiebung des Steges um 1^{mm} wahrnehme.

Nach Köl liker enthält nämlich das Ohr etwa 3000 Cortische Fasern. Rechnet man nun etwa 200 auf die Töne, welche außerhalb der in der Musik gebrauchten Grenzen liegen, so würden für die 7 Oktaven, deren Töne in der Musik benutzt werden, 2800 Fasern übrig bleiben, also etwa 400 für jede Oktave; nach der Angabe von E. H. Weber würde ein geübtes Ohr etwa 700 Tonstufen innerhalb der Oktave zu unterscheiden imstande sein, also eine noch größere Zahl, als der für jede Oktave vorhandenen Anzahl von Cortischen Fasern entspricht. Das liegt nach Helmholtz daran, daß wenn ein Ton angegeben wird, dessen Höhe zwischen dem zweier benachbarter Cortischer Fasern liegt, daß dann beide in Schwingungen versetzt werden, diejenige aber stärker, deren Eigenton dem angegebenen näher liegt. Die Empfindlichkeit des Ohres für verschiedene Tonhöhen wird also nur von der Feinheit abhängen, mit welcher der Unterschied der Erregungsstärke der beiden Fasern wahrgenommen werden kann. Dieses Einwirken eines Tones auf mehrere Fasern erklärt es auch, daß bei kontinuierlich steigender Tonhöhe unsere Empfindung sich kontinuierlich ändert und nicht stufenweise springt, wie es der Fall sein müßte, wenn durch jeden Ton nur eine einzelne Cortische Faser in Schwingung versetzt würde.

Aus dieser Theorie des Hörens ergibt sich weiter, daß wenn ein zusammengesetzter Klang oder Accord dem Ohre zugeleitet wird, daß dann alle diejenigen Fasern erregt werden, deren Eigenton in der Klangmasse vorhanden ist. Da somit die Empfindungen örtlich getrennt sind, so muß bei gehöriger Aufmerksamkeit und Übung das Ohr die einzelnen Töne auch getrennt auffassen können.

Unser Ohr muß demnach die zusammengesetzten Klänge gerade so in ihre einfachen Bestandteile zerlegen, wie eine Reihe abgestimmter Resonatoren oder Membranen durch die ihnen entsprechenden Töne eines zusammengesetzten Klanges zum Tönen gebracht werden. Das Hören ist, soweit es physikalisch oder physiologisch definierbar ist, ein spezieller Fall des Mittönens.

¹⁾ Cornu und Mercadier, Comptes Rendus T. LXVIII. p. 301.

§ 175.

Einfluss der Bewegung des tönenden Körpers oder des Ohres auf die Höhe des wahrgenommenen Tones. Wenn wir den durch eine schwingende Bewegung der Luft bestehenden Schall durch die den Nerven mitgetheilten Schwingungen empfinden und die Anzahl der in der Zeiteinheit in das Ohr eindringenden Schwingungen maßgebend ist für die Höhe des empfundenen Tones, so muß es auf die letztere von Einfluss sein, ob der Beobachter und das tönende Instrument sich von einander in einer konstanten Entfernung befinden, oder ob die beiden sich einander nähern oder von einander entfernen.

Doppler¹⁾ hat diesen Satz näher verfolgt und kommt zu dem Schlusse, daß wenn der Beobachter und das tönende Instrument sich nähern, der wahrgenommene Ton höher werden muß, da dann die Eindrücke auf das Ohr sich rascher folgen als im Zustande der Ruhe. Ebenso muß der Ton tiefer werden, wenn der Beobachter und die Tonquellen sich von einander entfernen, da dann die Zahl der in das Ohr eindringenden Wellen eine kleinere wird.

Bezeichnen wir die Länge der Wellen mit l , die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft mit c , diejenige, mit welcher der schwingende Körper nach einer Richtung hin bewegt wird, mit b , so wird nach dieser Richtung in die Länge der Wellen um $\frac{b}{c} \cdot l$ verkürzt, nach der entgegengesetzten Seite hin aber um ebensoviel verlängert. Denn hat z. B. der von dem tönenden Körper ausgehende Wellenberg um die Länge einer Welle sich fortgepflanzt, so würde bei ruhendem Instrumente der folgende Wellenberg das Instrument verlassen, und da er von derselben Stelle ausgeht, gerade um die Länge einer Welle von dem ersten entfernt sein. Hat sich aber das Instrument während dieser Zeit in der Richtung der vorschreitenden Welle bewegt, so geht der zweite Wellenberg nach derselben Zeit wie vorhin von einem dem ersten Wellenberge nähern Orte aus, er ist also von dem ersten um weniger als die Länge der Welle bei der Ruhe entfernt, der die Welle wird kürzer. Nach der andern Seite wird sie aber um ebensoviel länger.

Ist die Länge der Welle l , so ist die Zeit, während welcher der erste Wellenberg um l sich fortpflanzt, gleich der Schwingungsdauer T , also, da $l = c \cdot T$,

$$T = \frac{l}{c},$$

und da wir die Geschwindigkeit des tönenden Körpers mit b bezeichneten, so hat sich derselbe in der Zeit T um die Strecke

$$b \cdot T = \frac{b}{c} \cdot l$$

in der Richtung der Welle fortbewegt, die Länge der Welle wird also dadurch

$$l \left(1 \mp \frac{b}{c} \right) = \frac{c}{n} \left(1 \mp \frac{b}{c} \right),$$

¹⁾ Doppler, Über farbiges Licht der Doppelsterne. Prag 1842.

wenn wir mit n die Schwingungszahl oder was dasselbe ist, die Anzahl der auf die Strecke c kommenden Wellen bezeichnen, wenn das Instrument ruht.

Die an einem ruhenden Ort ankommende Schwingungszahl ist am gleich dem Quotienten aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und der Wellenlänge, also hier gleich

$$\frac{c}{n \left(1 \mp \frac{b}{c}\right)} = n \cdot \frac{c}{c \mp b},$$

wo das negative Vorzeichen für die Orte gilt, denen sich das Instrument nähert, und das positive für die, von denen es sich entfernt.

Wenn andererseits der Beobachter sich gegen das ruhende Instrument bewegt mit einer Geschwindigkeit a , so werden in der Zeiteinheit nicht nur die Schwingungen in das Ohr kommen, welche den ruhenden Beobachter treffen, sondern auch diejenigen, welche auf der Strecke a liegen, so daß die Zahl der wahrgenommenen Schwingungen wird

$$n' = n + \frac{a}{l},$$

und entfernt sich der Beobachter

$$n' = n - \frac{a}{l},$$

oder da $l = \frac{c}{n}$,

$$n' = n \pm \frac{a}{l} = n \cdot \frac{c \pm a}{c}.$$

In jedem Falle wird also die Schwingungsmenge, die das Ohr erhält, beim Annähern von Beobachter und Tonquelle größer, beim Entfernen kleiner; findet das Erste statt, muß der Ton höher, das Zweite, tiefer werden.

Diese Folgerung ist durch die Erfahrung bestätigt.

A. Seebeck¹⁾ gibt an, daß er in den Papieren seines Vaters eine dahin gehörige Angabe gefunden habe. Ein Schlitten, wie man sie im Gebirge zum jähen Herabrutschen an Bergabhängen gebraucht, gab dem Beobachter Gelegenheit zu bemerken, daß der Ton einer Pfeife, die auf dem Schlitten geblasen wurde, beim Vorüberfahren plötzlich tiefer wurde.

Buys Ballot²⁾ hat eine ausgedehnte Beobachtungsreihe über diesen Punkt angestellt. Auf der Eisenbahn zwischen Utrecht und Maarsen waren möglichst nahe der Bahn mehrere Musiker aufgestellt, welche die Tonhöhe eines auf einem mit der Lokomotive vortüberfahrenden Signalhorne gegebenen Tones schützten; ein anderer auf der Lokomotive fahrender Beobachter verglich den Ton der auf den Stationen geblasenen Hörner bei Annäherung und Entfernung der Lokomotive mit dem des mitfahrenden Hornes. Die Geschwindigkeit des Wagens wurde bestimmt, indem nach zwei Chronometern die Zeit aufgeschrieben wurde, welche zum Durchlaufen von 100 Metern gebraucht war.

¹⁾ Seebeck, in Doves Repertorium Bd. VIII. p. 87.

²⁾ Buys Ballot, Poggendorffs Annalen. Bd. LXVI.

Die Beobachtungen bestätigen im allgemeinen die Theorie, indem fast immer Veränderungen der Tonhöhe in dem von der Theorie geforderten Sinne eintreten; eine genaue Übereinstimmung der berechneten Tonänderungen mit den beobachteten kann bei solchen Versuchen nicht erwartet werden, es nur eine Schätzung des Beobachters die Änderung der Tonhöhe bestimmt.

Dagegen ist es Vogel¹⁾ gelungen eine volle Bestätigung der Theorie zu erhalten, indem er den Ton der Dampfpeife einer Lokomotive benutzte und mit Hilfe eines Musikers genau die Tonhöhe bestimmte, wenn die Lokomotive mit konstanter Geschwindigkeit sich ihm näherte und dann nach dem Vorüberfahren sich entfernte. Die Änderung der Tonhöhe entsprach mit einer merkwürdigen Genauigkeit der Dopplerschen Theorie.

Man kann die Erscheinung des Mittönens benutzen, wie zuerst Mayer²⁾ gezeigt hat, um zu beweisen, daß in der That die Änderung der Tonhöhe gerade die von der Theorie verlangte ist. Man nimmt zwei genau gleiche Stimmgabeln etwa c_2 , 512 Schwingungen gebend; streicht man die eine an, so tönt die andere kräftig mit. Verstimmt man die eine, etwa durch Überziehen eines leichten straffen Kautschukringes, so daß sie in der Sekunde zwei Schwingungen weniger macht, so tönt die andere Gabel nicht mehr mit, wenn man die verstimmte anstreicht. Stellt man sich dann aber mit der verstimmten Gabel in einiger Entfernung von der nicht verstimmten auf, bringt erstere zum Tönen, und bewegt sich dann mit der verstimmten tönenden Gabel mit der konstanten Geschwindigkeit um etwa 1,2 Meter gegen die andere hin, so kommt dieselbe wieder zum Tönen. Stellt man die verstimmte Gabel auf, so muß man, um dieselbe zum Mittönen zu bringen, die nicht verstimmte mit derselben Geschwindigkeit entfernen. Wenn man dagegen die zweite Gabel nicht verstimmt, so tönt die erste nicht, wenn man mit der tönenden Gabel sich mit der gleichen Geschwindigkeit nähert oder entfernt. Daß diese Bewegungsgeschwindigkeit der Dopplerschen Theorie entspricht, ergibt sich leicht. Es müssen von der verstimmten Gabel her in der Sekunde 512 Schwingungen zur nicht verstimmten Gabel gelangen, während sie selbst in der Sekunde 510 Schwingungen macht. Die Geschwindigkeit b , mit der sie der nicht verstimmten Gabel genähert werden muß, ergibt sich somit aus

$$512 = 510 \cdot \frac{c}{c - b}.$$

Setzen wir die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft bei gewöhnlicher Temperatur rund $c = 340^m$, so wird

$$b = 1,21^m,$$

wie es vorhin angegeben wurde. Man kann so die Richtigkeit des Dopplerschen Satzes sogar objektiv sichtbar machen, wenn man die Schwingungen der Gabel auf die eine oder andere Weise sichtbar macht.

¹⁾ H. C. Vogel, Poggend. Ann. Bd. CLVIII.

²⁾ A. M. Mayer, Poggend. Ann. Bd. CXI VI.

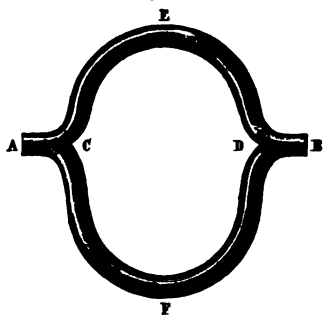
§ 176.

Interferenz des Schalles. Wenn sich nach einer und derselben Richtung zwei Schallwellen gleicher Länge fortpflanzen, so muß nach der Natur der Wellenbewegung die Resultierende aus den beiden Schallwellen abhängen von der Phasendifferenz, mit welcher die beiden Wellen zusammentreffen.

Treffen zwei Schallwellen ohne Phasendifferenz zusammen, so müssen sie sich verstärken, treffen sie dagegen mit einer Phasendifferenz von einer halben Wellenlänge zusammen, so müssen sie sich aufheben. Dafs letzteres in der That der Fall ist, davon kann man sich durch einen einfachen Versuch überzeugen. Bringt man eine Klangscheibe zum Tönen, so dafs das diagonale Kreuz entsteht, so schwingen die neben einander liegenden Quadranten gleichzeitig nach entgegengesetzten Richtungen, indem, wie wir sahen, die Knotenlinien zwei in entgegengesetzter Phase befindliche Teile der Scheibe trennen. Führt man nun eine solche tönende Scheibe am Ohre vorüber, so verschwindet der Ton jedesmal, wenn das Ohr sich vor einer Knotenlinie befindet. Von dem einen Quadranten wird dann ein Wellenberg ins Ohr gesandt und zugleich von dem andern ein Wellenthal, die Bewegung des Trommelfelles ist daher infolge der einen Welle die entgegengesetzte derjenigen der andern Welle, die Bewegung und somit der Schall hört auf.

Diesen Fall der Interferenz von Schallwellen hat Hopkins¹⁾ auf sehr einfache Weise sichtbar gemacht. Er stellte eine Röhre von Pappe oder Holz her, welche unten gabelförmig in zwei Röhren endigte, und deren oberes Ende mit einer feinen Membran überspannt war. Bestreut man die Membran mit etwas trockenem Sand und hält die Röhre so über eine tönende Klangscheibe, dafs die beiden offenen Enden der Gabel sich über

Fig. 295.



zwei neben einander liegenden Quadranten der Scheibe befinden, so gerät die oben über die Röhre gespannte Membran nicht in schwingende Bewegung, der Sand bleibt ruhig, hält man aber die offenen Enden der Gabel über gegenüberliegende Quadranten, so gerät der Sand in hüpfende Bewegung. Im ersten Falle gehen von den beiden Quadranten zugleich entgegengesetzte Bewegungen in die Röhre, dieselben heben sich auf, im letzten Falle aber gleichgerichtete, sie verstärken sich.

In anderer Weise hat Nörremberg²⁾ die Interferenz der Schallwellen gezeigt. Ein verzweigtes Rohr von der Form Fig. 295 wurde in eine Wand eingemauert, und auf der einen Seite der Wand ein Ton erzeugt, der nur durch die Luft des Rohres in den durch die Wand abgetrennten Raum eindringen konnte. Wurde eine der beiden Röhren verstopft, so drangen alle Töne durch das Rohr hindurch, wurden aber beide geöffnet, so blieben alle Töne aus, für welche die Differenz der Röhrenlängen ein ungerades Vielfaches einer halben Wellenlänge war.

¹⁾ Hopkins, Poggend. Ann. Bd. XLIV.

²⁾ Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. Braunschw. 1856. p. 382. Diese Methode ist vorgeschlagen von J. F. W. Herschel, Philosophical Magazin, 3. ser. T. III. 1833. Poggend. Ann. Bd. XXXI.

Eine sehr bequeme Form, welche zu einer Reihe verschiedener Versuche brauchbar ist, hat Quincke¹⁾ dem eben besprochenen Interferenzapparat gegeben. Fig. 296 gibt eine dieser Formen, Fig. 297 eine andere. Die erste in den gleich anzugebenden Dimensionen löscht den Ton a_1 (440 Schwingungen) und alle seine ungeraden Vielfachen aus. Zwei T-förmige Glasröhren CAC_1 und CBC_1 sind an den Enden rechtwinklig umbogen und bei C durch einen kurzen, bei C_1 durch einen langen Kautschukschlauch verbunden. Gibt man dem letztern eine Länge von etwa 390^{mm} , so entspricht er einer halben Wellenlänge des Tones a_1 in Luft. Das mit einem kurzen Kautschukschlauch versehene Ende A des Apparates setzt man in den äußern Gehörgang des einen Ohres, verstopft das andere mit einem Knetlackpfropf und läßt den Klang der Stimmgabel durch den langen Kautschukschlauch BB_1 und die verzweigte Röhrenleitung ins Ohr gelangen,

Fig. 296.

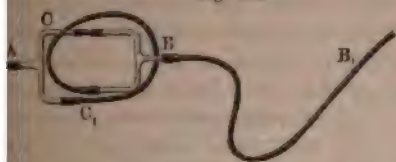
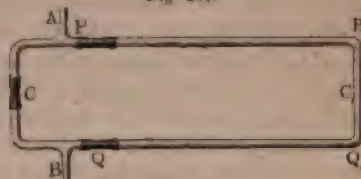


Fig. 297.



dem man die Zinken der angeschlagenen Gabel vor das offene Ende B_1 des Schlauches hält, oder auch den Stiel der Gabel in den Schlauch steckt und die Gabel anschlägt. Die dem Grundton der Gabel entsprechenden Töne löschen sich dann bei B aus, und man nimmt ihn nicht wahr. Steckt man aber bei C oder C_1 den Kautschukschlauch zu, so daß die Töne nur durch ein Rohr dringen kann, so tritt der Ton kräftig in das Ohr hinein.

Der Apparat Fig. 297 unterscheidet sich von dem eben besprochenen dadurch, daß der lange Kautschukschlauch durch das Glasrohr PP_1Q_1Q ersetzt ist; indem man eine Reihe solcher Röhren herstellt, die an Stelle des Stückes BCA verbunden werden, kann man die Interferenzversuche für eine ganze Anzahl von Tönen stimmen.

Von den mannichfachen Versuchen, zu welchen diese Röhren dienen können, erwähnen wir hier nur die Beobachtung der Klangfarbe. Eine solche Röhre löscht nicht nur einen bestimmten Ton aus, sondern auch alle seine ungeradzahigen Obertöne; deshalb löscht eine solche Röhre den Klang einer gedeckten Orgelpfeife ganz aus, es bleibt nur das Blasegeräusch zurück, einer offenen Orgelpfeife dagegen ändert sie nur den Klang, da die geraden Partialtöne des Klanges nicht ausgelöscht werden. Man kann deshalb durch eine solche Röhre sofort erkennen, ob in einem Klange nur gerade, oder ob auch gerade Partialtöne in ihm enthalten sind.

Eine sehr instruktive Einrichtung hat König diesen Interferenzröhren gegeben, indem er sie mit seinen manometrischen Flammen in Verbindung setzte. An die Stelle des Ohres bei der Quinckeschen Einrichtung treten

¹⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXVIII.

die § 160 (Fig. 262) erwähnten kleinen Kapseln mit den Flammen. Königs Interferenzröhre ist posaunenartig eingerichtet. Ist die Röhre ganz zusammengeschoben, so sind beide dem eindringenden Tone offene Wege ganz gleich, er dringt in die Kapsel ein und setzt die Flamme in Vibration; zieht man nun die eine Hälfte aus, so wird der eine Weg des Tones länger, und ist er gleich $\frac{1}{2}$ Wellenlänge, so heben sich die Schwingungen in der Kapsel auf, und die Flamme brennt ruhig. Indem man auf diese Weise die Länge der Welle eines Tones von bekannter Schwingungszahl messen kann, liefert der Apparat sogar ein sehr bequemes Mittel, die Geschwindigkeit des Schalles zu bestimmen.

Interferenz des Schalles durch gleichzeitiges Aussenden entgegengesetzt gerichteter Impulse von zwei naheliegenden Orten hat Seebeck¹⁾ mittels der Sirene sehr deutlich nachgewiesen. Richtet man gegen eine Löcherreihe einer Sirene von den beiden entgegengesetzten Seiten her senkrecht gegen die Scheibe zwei Röhren und zwar so, daß, wenn die eine sich vor einem Loche befindet, die andere sich dem nächsten gegenüber befindet, so erhält man bei gleichzeitigem Anblasen keinen Ton, sondern hört nur das Geräusch der durchströmenden Luft, indem sich die beiden Stöße der Luft nach entgegengesetzter Richtung bei ihrer Fortpflanzung zum Ohre des Beobachters aufheben. Schließt man aber eine der Röhren, so tritt der der Umdrehungsgeschwindigkeit der Sirene entsprechende Ton hervor. Stellt man die Röhren aber so, daß die Stöße alternierend erfolgen, so also, daß der Abstand der Röhren gleich dem halben Abstände der Löcher ist, so hört man denselben Ton, nur viel stärker.

Wenn man auf einer Scheibe konzentrisch zwei Löcherreihen anbringt, von denen die eine doppelt so viel Löcher hat, als die andere, so gibt diese die Oktave von dem Tone der letztern, und man hört, wenn beide gleichzeitig und gleichseitig angeblasen werden, in der Regel beide Töne zugleich.

Geschieht jedoch das Anblasen von beiden Seiten her und zwar so, daß jeder Luftstrom des tiefern Tones mit einem Luftstrome des höhern Tones zusammenfällt, so verschwindet der höhere Ton ganz und man hört nur den tiefern.

Es werden in diesem Falle die abwechselnden Impulse des höhern Tones durch die gleichzeitigen des tiefern aufgehoben und die Hälfte der Impulse des höhern Tones erzeugt den tiefern Ton.

Eine sehr interessante Interferenz des Schalles ist von W. Weber bei transversalschwingenden Stäben und Stimmgabeln beobachtet²⁾ und später von Kiessling genauer untersucht³⁾. Gehen von zwei Punkten *A* und *B* (Fig. 298), deren Abstand in Bezug auf die Länge der Schallwellen nicht verschwindend klein ist, gleichzeitig Verdichtungen und Verdünnungen aus, so werden sich diese rings um *A* und *B* und zwar, wenn wir nur eine durch *A* und *B* gelegte Horizontalebene betrachten, kreisförmig ausbreiten. Die gleichzeitig von *A* und *B* ausgehenden Kreise werden sich dann in Punkten

¹⁾ A. Seebeck, Doves Repertorium Bd. VI.

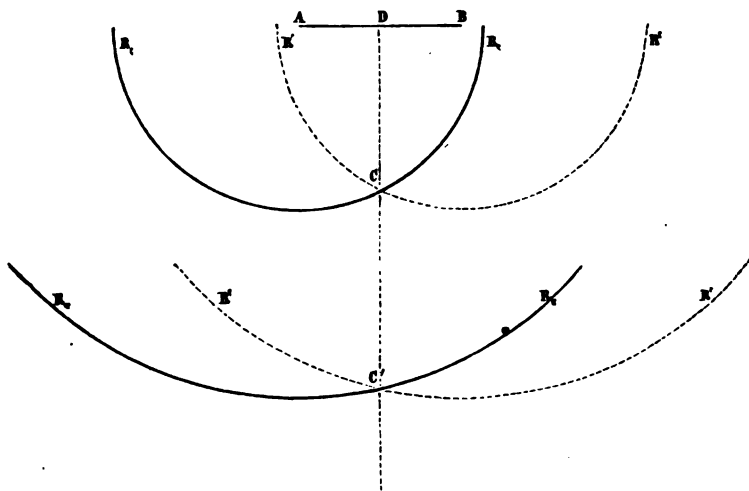
²⁾ W. Weber, O. C. S. Schweigger und Schweigger-Seidel Jahrbuch für Chemie und Physik Bd. XLVIII (18).

³⁾ Kiessling, Poggend. Ann. Bd. CXXX.

C , C' schneiden, welche in einer zu AB senkrechten, in der Mitte von D errichteten Linie liegen. Die in der Nähe dieser Linie liegenden Lufttheilchen werden dann gleichzeitig immer von einem von A ausgehenden Wellenberge und von B ausgehenden Wellenthale getroffen, sie werden daher immer in Ruhe sein, auf der ganzen Linie CD muß der Schall verschwinden.

Wie Kiessling durch genaue Messungen konstatiert hat, findet eine solche Interferenz bei jedem parallelepipedischen in transversale Schwingungen versetzten Stabe statt; es tritt dort die Interferenz in einer durch die Axe des Stabes gelegten nahezu zur Schwingungsrichtung senkrechten Ebene auf. Um sie zu beobachten nimmt man am besten einen Stab von rechteckigem Querschnitt, dessen Seiten ziemlich von einander verschieden sind,

Fig. 298.



damit der Stab parallel der einen Seite schwingend einen wesentlich andern Ton gibt als parallel der andern Seite schwingend. Ein solcher Stab ist einem nahezu quadratischen vorzuziehen, weil, wenn man den Stab parallel einer Seite in Schwingungen versetzt, auch immer Schwingungen parallel der andern Seite auftreten. Ist nun die Dicke des Stabes nach beiden Richtungen nahe dieselbe, so ist der Ton für beide Schwingungsrichtungen auch nahe gleich, und die Beobachtung wird dann durch die im nächsten Paragraphen zu besprechenden Stöße gestört und unsicher. Man hängt den Stab in zwei Knoten auf und bringt ihn durch Streichen mit dem Bogen parallel einer Seite zum Schwingen. Man führt dann in das eine Ohr, während das andere fest verschlossen ist, einen Kautschukschlauch, dessen anderes Ende gerade, das heißt senkrecht zur Schlauchaxe abgeschnitten ist. Führt man dieses Ende des Schlauches in einiger Entfernung vom Stabe in einer der Schwingungsrichtung parallelen Richtung an dem Stabe vorüber, so verschwindet der Ton vollständig, sobald die Mitte der untern Schlauchöffnung sich gerade in der durch CD (Fig. 298) und die Stabaxe gelegten Ebene befindet. Wie Kiessling angibt, läßt sich

die Lage der Interferenzebene auf diese Weise sehr genau feststellen, da schon eine Verschiebung des Schlauchendes um $0,1^{\text{mm}}$ genügt, um den Ton wieder hörbar zu machen.

Am leichtesten lassen sich diese Interferenzen an einer Stimmgabel beobachten. Dreht man eine solche sehr rasch vor dem Ohre um den Stiel derselben als vertikale Axe herum, so hört man den Ton entsprechend den 4 Interferenzflächen $J_1 J_2 J_3 J_4$ (Fig. 299), viermal verschwinden. Eine genauere Untersuchung der Interferenzflächen in diesem Falle hat Kiessling

Fig. 299.



ergeben, daß sie hyperbolisch gekrümmt sind, infolge der Reflexionen, welche die von den inneren Seiten der Zinken ausgehenden Schwingungen an der andern Zinke erfahren, und weil die Bewegung der Luft an der einen Zinke auch durch jene von der andern Zinke erregten beeinflusst wird. Umgibt man die eine Zinke mit einer möglichst engen Glasröhre, so daß die Bewegung dieser Zinke sich der umgebenden Luft nicht mitteilt, und wegen der starken Krümmung der Glasröhre keine merkliche Reflexion der Wellen zu den von der andern Zinke erregten Schwingungen eintritt, so finden die Interferenzen wieder in einer Ebene statt. Bringt man dann aber zwischen den beiden Zinken eine ebene Glasplatte an, so daß eine Reflexion der von der einen Zinke erregten Welle an derselben stattfindet, so tritt die Krümmung wieder hervor, ein Beweis, daß die Krümmung der Interferenzfläche eine Folge

der Durchkreuzung teils der reflektierten mit den direkt erregten, teils der von der andern Zinke herrührenden mit den von der einen Zinke erregten Schwingungen ist.

§ 177.

Interferenz von Wellen ungleicher Länge. Stöße. In dem vorigen Paragraphen haben wir das Zusammentreffen zweier Wellenzüge gleicher Periode betrachtet und haben gesehen, wie dadurch die den einzelnen Wellenzügen entsprechenden Töne verstärkt oder geschwächt, oder selbst unterdrückt werden, je nach der Phasendifferenz, mit welcher die Wellenzüge gleichzeitig in unserem Ohre ankommen. Die Resultierende dieser Interferenzen war aber eine stetig sich gleich bleibende, die Verstärkung oder Schwächung des Tones dauerte in ganz gleicher Weise fort, so lange die einzelnen Töne fortdauerten, da die Wellen von gleicher Geschwindigkeit und Länge mit konstanter Phasendifferenz immer an einem und demselben Orte ankommen.

Wie zwei Wellenzüge gleicher Länge, so können auch zwei Wellenzüge verschiedener Länge mit einander interferieren, jedoch ist das Resultat der Interferenz ein wesentlich anderes, viel komplizierteres als in dem vorigen Falle.

Werden nämlich an einem und demselben Orte zwei Töne mit verschiedener Schwingungszahl erregt, so tritt in diesen nicht immer zu-

gleich Wellenberg oder Wellenthal auf, sondern in beiden Tönen zu verschiedenen Zeiten, da sie in dem einen Tone rascher auf einander folgen als in dem andern. Gibt der höhere Ton in der Sekunde z. B. eine Schwingung mehr, und nehmen wir an, daß beim Beginne die Schwingungen beider genau gleichzeitig waren, so werden allmählich die Schwingungen des tiefern Tones gegen diejenigen des höhern zurückbleiben; nach einer halben Sekunde wird der tiefere Ton gerade ein Thal aussenden, wenn der höhere einen Wellenberg aussendet. Nach einer weitem halben Sekunde wird der tiefere Ton um noch eine halbe Schwingung zurückbleiben, so daß am Ende der ersten Sekunde wieder Wellenberg und Wellenberg zusammentreffen.

Zwei derartige Wellen können sich daher nicht dauernd schwächen oder dauernd stärken, da die Schwingungen nicht gleichzeitig gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, sondern bald gleichgerichtet, bald entgegengesetzt gerichtet sind. Das Ohr eines Beobachters wird daher abwechselnd, wenn zugleich die Wellenberge oder die Wellenthäler das Ohr treffen, die Summe der Impulse der einzelnen Wellen erhalten, oder wenn ein Wellenberg und ein Wellenthal zusammentreffen, die Differenz der Impulse. Während demnach das Ohr beide Töne wahrnimmt, wird es zugleich von Zeit zu Zeit Verstärkungen und Schwächungen des Tones wahrnehmen müssen.

Die Erfahrung bestätigt diese Schlüsse vollkommen, denn läßt man zugleich zwei Töne, die nahezu gleich gestimmt sind, ansprechen, so hört man während des Tönens von Zeit zu Zeit deutliche Schläge, indem die Intensität des Tones abwechselnd gestärkt und geschwächt wird.

Diese Schläge nennt man Stöße oder Schwebungen. Beträgt der Unterschied der Schwingungszahlen in der Sekunde eins, so fällt am Anfange jeder Sekunde Wellenberg und Wellenberg zusammen, wir werden daher in jeder Sekunde eine Verstärkung des Tones, einen Stoß wahrnehmen. Ist der Unterschied der Schwingungszahlen gleich zwei, so wird bei gleichzeitigem Anfang beider Töne nach der ersten Viertelsekunde der höhere Ton dem tiefern um $\frac{1}{2}$, nach einer halben Sekunde um eine ganze Oscillation vorgeeilt sein. Schon nach einer halben Sekunde werden also dann wieder zwei Wellenberge zusammentreffen, wir werden in der Sekunde zwei Stöße wahrnehmen.

Daß die Zahl der Stöße überhaupt gleich der Differenz der Schwingungen derjenigen Töne sein muß, aus denen sie entstehen, entwickelt Hällström¹⁾ in folgender Weise. Seien r und s die Schwingungen der angestimmten Töne in der Sekunde, und x die Anzahl der Stöße. In der Zeit $\frac{1}{x}$ entsteht dann ein Stoß, und in dieser Zeit macht der Ton mit der Schwingungszahl r , $\frac{r}{x}$, der andere Ton $\frac{s}{x}$ Schwingungen, da r und s die Schwingungszahl in der Zeit 1 ist.

In derselben Zeit aber, in welcher durch das Zusammenwirken der Schwingungen ein Stoß entsteht, muß, wie wir vorhin erwähnten, der höhere Ton eine Schwingung mehr vollführen, oder es muß

$$\frac{s}{x} - \frac{r}{x} = 1,$$

$$s - r = x$$

¹⁾ Hällström, Poggend. Ann. Bd. XXIV.

oder allgemein die Anzahl der Stöße in einer Sekunde muß gleich der Differenz der Schwingungszahlen beider Töne sein.

Man hat vielfach darüber gestritten, ob die Stöße nur subjektiver Natur seien, das heißt, ob sie nur im Ohre durch Zusammentreffen der einzelnen Impulse entstanden, oder ob sie objektiver Natur seien, das heißt, ob wirklich an den Interferenzstellen eine stärkere Bewegung der Luftteilchen vorhanden sei. Ein einfacher vom Orgelbauer F. Lange¹⁾ in Berlin konstruierter Apparat beweist jedoch die objektive Natur der Stöße auf das entschiedenste. Lange brachte in den Fuß einer Zungenpfeife mit gläserner Wand zwei Rohrwerke und setzte auf jedes eine Pfeife, so daß er zwei Zungenpfeifen erhielt, die durch denselben Luftstrom angeblasen wurden. Die Pfeifen werden nahe gleich gestimmt, so daß die Stöße sich sehr langsam folgen. Bei Betrachtung der Zungen sieht man dann, wie die Exkursion derselben bei jedem Stoß um vieles bedeutender ist als sonst; ein direkter Beweis, daß die den Stoß erzeugenden Impulse in der That sich zu größern Schwingungen summieren, daß die Stöße nicht subjektiver, sondern objektiver Natur sind.

König²⁾, der in einer ausgedehnten Untersuchung, bei welcher er zur Tonerzeugung, um einfache Töne zu erhalten, nur Stimmgabeln benutzte, die Zahl der von zwei Tönen gegebenen Stöße innerhalb der ganzen Skala der Tonleiter bestimmte, gelangt in Bezug auf die Stöße zu einem etwas andern Resultat, er glaubt, daß nicht nur Stöße entstehen, welche gleich der Differenz der Schwingungszahl der Töne sind, sondern daß, wenn man sich einem harmonischen Intervall nähert, auch Stöße auftreten, gerade als wenn der Grundton von dem betreffenden Obertone begleitet wäre. Gehen wir also von einem Tone aus, der etwa 64 Schwingungen macht, $C = c_{-1}$, und nehmen eine zweite Gabel, deren Töne wir durch Laufgewichte, die an den Zinken verschiebbar sind, allmählich bis zur doppelten Schwingungszahl erhöhen können, so hört man zunächst die Stöße gleich der Differenz der Schwingungszahl, die bis zu 10, entsprechend 74 Schwingungen der zweiten Gabel, einzeln hörbar sind. Bei weiterer Steigerung der Tonhöhe der zweiten Gabel hört man die Stöße als Rollen. Nähert sich die zweite Gabel der Quint, so geht nach Königs Bezeichnung das Rollen in ein verworrenes Rasseln über, wie wenn zu den bisher gehörten Stößen auch solche mit der Oktave des Grundtones hinzukämen. Geht man über die Quint hinaus, so dauert dieses Rasseln zunächst fort, zwischen der Sext und Septime geht dasselbe wieder in Rollen über, und bei der Septime, die 120 Schwingungen entspricht, hört man wieder einzeln 8 Stöße, also die Zahl der Stöße, welche der Differenz der Schwingungen mit der Oktave des andern Stimmgabeltones entsprechen. Nähert sich der Ton der Oktave, so nimmt dem entsprechend die Zahl der Stöße ab, bis sie bei der Oktave verschwinden. König nimmt somit an, daß nicht nur zwei dem Einklange nahe Töne Stöße geben, die der Differenz ihrer Schwingungen entsprechen, sondern auch Töne, die nahe im Verhältnisse 1 : 2, ebenso auch 1 : 3, 1 : 4 u. s. w. stehen, gerade so, wie wenn der tiefere Ton von den betreffenden Obertönen begleitet wäre.

¹⁾ Der Apparat wurde mir von Herrn Lange im Jahre 1857 zu Berlin gezeigt; er ist in manche Kabinette übergegangen.

²⁾ König, Poggend. Ann. Bd. CLVII.

König ist auch der Ansicht, daß sich diese Stöße aus der Zusammensetzung der Schwingungen der beiden Töne ableiten lassen, eine Auffassung, der ich mich jedoch nicht anschließen kann.

Helmholtz¹⁾ sieht diese von König als obere bezeichneten Stöße als solche an, die in der That mit den betreffenden Obertönen des Grundtones gebildet werden, indem er darauf hinweist, daß bei den kräftigen von König angewandten Schwingungen der Gabeln die Obertöne auftreten müssen. Bei einer Gabel, die 64 Schwingungen in der Sekunde machte, konnte er mit geeigneten Resonatoren die Obertöne bis zum fünften hören, wenn die Gabel stark angeschlagen war; die Zinken machten dann Schwingungen, deren Amplitude 1 Centimeter betrug. Bei so großer Breite der Schwingungen des scharfkantigen Körpers, wie es die Gabelzinken sind, müssen in der umgebenden Luft Wirbelbewegungen entstehen, die erheblich von dem Gesetze der einfachen Schwingungen abweichen, und deshalb in ähnlicher Weise die Obertöne hervorrufen, wie es die schwingenden Zungen thun. Daß das Auftreten der Obertöne durch derartige Störungen der einfachen Bewegungen infolge der großen Amplituden bedingt ist, ergibt sich auch daraus, daß sie bei dem Austönen der Gabel viel früher als der doch auch sehr schwach hörbare Grundton der Gabel verschwinden, da bei dem Austönen der Gabel die Schwingungen kleiner und kleiner werden und dann die Luft nur mehr nach ihrer eigenen Periode in Bewegung versetzen.

Eine sehr wichtige Anwendung der Stöße rührt von Scheibler²⁾ her, nämlich ihre Anwendung zum reinen Stimmen zweier Töne und zur Bestimmung ihrer absoluten Schwingungszahl. Wie ersteres, was ein mehr praktisches Interesse hat, geschehen kann, sieht man leicht, da die Stöße sich um so langsamer folgen, je näher die Töne gleich gestimmt sind, je geringer ihr Schwingungsunterschied ist. Jedem Ton entspricht ein tiefer liegender und ein höher liegender, der mit ihm in der Sekunde eine genau bestimmte Zahl z. B. vier Stöße gibt. Dies benutzte Scheibler folgendermaßen. Eine Stimmgabel gibt z. B. a_1 an, er stellt dann eine Stimmgabel her, die einen etwas tiefern Ton hat und mit der a_1 -Gabel genau vier Stöße in der Sekunde gibt. Um nun die Saite eines Monochords genau auf a_1 zu stimmen, wird sie mit der tiefern Gabel verglichen und so gespannt, bis sie mit derselben vier Stöße gibt. Der Ton der Saite ist dann genau eingestrichene a_1 .

Um die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, wandte Scheibler zwei Methoden an. Die erste Methode bestand in Folgendem.

Auf einem Monochord wurde eine Saite aufgespannt, welche genau den Ton einer a_1 -Gabel angab und die Länge der Saite in 2000 Teile geteilt. Da der Steg der Saite war verschiebbar, so daß die Saite verlängert oder verkürzt werden konnte. In beiden Fällen gab der Ton der Saite mit der Gabel Stöße. Scheibler bestimmte nun mit größter Genauigkeit, um wieviel die Saite verlängert oder verkürzt werden mußte, damit sie mit der Gabel genau vier Stöße in einer Sekunde gab. Die Stellen, wo der Steg sich dann befindet, nannte er Nebenstellen.

¹⁾ Helmholtz, Tonempfindungen, IV. Ausgabe p. 263.

²⁾ Röber in Doves Repertorium. Bd. III. Poggend. Ann. Bd. XXXII.

Da die Anzahl der Stöße gleich ist dem Unterschiede der Schwingungszahlen der beiden Töne, so ist, wenn wir die Schwingungszahl der a -Saite mit x bezeichnen, die Schwingungszahl der bis zur tiefern Nebenstelle verlängerten Saite $x - 4$, der bis zur höhern Nebenstelle verkürzten $x + 4$. Ist die Saite bis zur tiefern Nebenstelle um a länger, bis zur höhern um b kürzer, so ist nach den Schwingungsgesetzen der gespannten Saiten

$$x : x - 4 = 2000 + a : 2000$$

und

$$x : x + 4 = 2000 - b : 2000,$$

oder

$$x : 4 = 2000 + a : a$$

und

$$x : 4 = 2000 - b : b.$$

Jede der beiden Gleichungen gibt uns x , so daß wir durch zwei solche Versuche eine Kontrolle des aus einem gefundenen Wertes haben.

Bei den Versuchen mit seiner Stimmgabel fand Scheibler $a = 18,2$, und daraus

$$x = 443,56$$

als Schwingungszahl seiner a -Stimmgabel.

Die andere Zählung der absoluten Schwingungszahl geschieht nur durch Beobachtung der Stöße. Ihr Princip ist folgendes. Die Anzahl der Stöße gibt uns den Unterschied der Schwingungszahl beider Töne. Kennen wir das Verhältnis der beiden Schwingungszahlen, so können wir an beiden, dem Verhältnis und der Differenz der Schwingungszahlen beide berechnen.

Nun geben zwei meßbar verschiedene Töne jedoch keine Stöße, sondern Kombinationstöne. Um daher den Schwingungsunterschied zweier Töne zu erhalten, wandte Scheibler Zwischentöne an. Er stellte eine Reihe von Stimmgabeln her, deren Töne möglichst genau nach der gleichschwebenden Temperatur gestimmt, die chromatische Tonleiter von a gaben. Dann verfertigte er eine Anzahl sogenannter Zwischengabeln, deren Töne zwischen je zweien der chromatischen Tonleiter lagen, deren jede mit der nächst tiefern und der nächst höhern eine messbare Anzahl von Stößen gab. So z. B. verfertigte er zwei Gabeln, deren erste einen Ton gab etwas höher als a , deren zweite einen Ton gab etwas tiefer als a . Die erste gab mit a in der Minute 272,4 Stöße, die zweite mit der ersten in der Minute 270,8 Stöße und mit der a -Gabel 240 Stöße.

Ist demnach die Schwingungszahl von $a = x$, so ist die Schwingungszahl der ersten Zwischengabel $x + 4,54$, die der zweiten, welche mit der ersten in der Minute 270,8, in der Sekunde daher 4,52 Stöße gab, gleich $x + 4,54 + 4,52$ und die der a -Gabel $x + 13,06$.

In der temperierten Skala ist die Schwingungszahl von a

$$x' = x \sqrt[3]{2} = x \cdot 1,05946.$$

Zur Berechnung von x und x' haben wir daher

$$\frac{x'}{x} = 1,05946,$$

$$x' - x = 13,06,$$

$$13,06 + x = 1,05946 x,$$

$$x = \frac{13,06}{0,05946} = 219,6.$$

Um aber noch genauere Resultate zu erhalten, schritt Scheibler in dieser Weise durch die ganze Tonleiter fort und bestimmte den Schwingungsunterschied zwischen a und a_1 . Er fand, wenn wir die Schwingungszahl des Tones a_1 mit x_1 bezeichnen,

$$x_1 - x = 219,6667.$$

Nun ist aber zugleich

$$x_1 = 2x$$

und demnach

$$x = 219,666,$$

$$x_1 = 439,333.$$

Diese Methode, die absolute Schwingungszahl der Töne zu bestimmen, ist zwar etwas mühsam, aber in den Händen eines geschickten Experimentators wohl die genaueste, da man hier keinerlei störenden Einfluß zu befürchten hat.

§ 178.

Kombinationstöne. Wenn man zwei musikalische Töne verschiedener Höhe gleichzeitig und kräftig tönen läßt, so nimmt man, wenn das Intervall derselben nicht zu klein ist, im allgemeinen keine Schwebungen wahr, es tritt dann aber eine andere Einwirkung des gleichzeitigen Tönens, ein neuer Ton, der sogenannte Kombinationston hervor, Töne, welche zuerst von Sorge¹⁾ beobachtet und später von Tartini allgemeiner bekannt gemacht sind, nach welchem sie auch wohl den Namen Tartinischer Töne führen.

Wie die Zahl der Schwebungen gleich der Differenz der Schwingungszahl der sie bildenden Töne ist, so ist auch die Schwingungszahl dieser Kombinationstöne gleich der Differenz in der Schwingungszahl der Töne, aus denen sie hervorgehen. So entsteht z. B. aus Grundton und Quinte als Kombinationston die tiefere Oktave des Grundtones; da die beiden Töne die Schwingungszahlen 2 und 3 haben, so ist ihre Differenz gleich 1, also der halben Schwingungszahl des Grundtones oder die Schwingungszahl der tiefern Oktave. Aus Grundton und Terz, welchen die Schwingungszahlen 4 und 5 entsprechen, bildet sich der Kombinationston 1, also die zweittiefere Oktave des Grundtones, aus Grundton und Quarte, welche dem Verhältnis 3 und 4 entsprechen, die Unterquint der tiefern Oktave, oder die zweittiefere Oktave der Quarte.

Läßt man anstatt zweier einfacher Töne zwei zusammengesetzte Klänge gleichzeitig ertönen, so liefern nicht nur die Grundtöne, sondern auch die harmonischen Obertöne mit einander und mit den Grundtönen Kombinations-

¹⁾ Sorge. Man sehe Helmholtz, Tonempfindungen. p. 228.

töne nach demselben Gesetze. Sind die Schwingungszahlen der Grundtöne r und s , so sind die harmonischen Obertöne $2r, 3r \dots 2s, 3s \dots$ und das Schema der sich bildenden Kombinationstöne ist folgendes:

$$\begin{array}{rcl} r \text{ und } s & \text{geben} & s - r \\ 2r \text{ " } s & \text{"} & 2r - s \\ 2s \text{ " } r & \text{"} & 2s - r \\ 2s \text{ " } 2r & \text{"} & \frac{2s}{2} - 2r. \end{array}$$

So geben Grundton und Terz, 4 und 5, mit ihren Obertönen die Kombinationstöne 1, 3, 6, 2 etc., von denen der Ton 3 oft sehr deutlich zu hören ist.

Aber auch bei einfachen Tönen können solche mehrfache Kombinationstöne auftreten, gerade als wenn die entstehenden Kombinationstöne mit einander und den primären Tönen wieder Kombinationstöne lieferten. Folgendes Schema stellt die so möglichen Töne dar.

Ursprüngliche Töne	Kombinationstöne
r, s	$s - r$ erster
$s - r, r$	$2r - s$ zweiter
$2r - s, s$	$2s - 2r$ dritter
$2r - s, s - r$	$3r - 2s$ vierter u. s. f.

$s - r$ und r sowie $2r - s$ und r geben keine neuen Töne, sondern die schon vorhandenen r und $s - r$.

Die Kombinationstöne lassen sich am besten beobachten, wenn die komponierenden Töne ein und dieselbe Luftmasse in heftige Erschütterung versetzen, deshalb ganz besonders, wenn man eine mit mehreren Löcherreihen versehene Sirene auf einen Windkasten setzt und gleichzeitig zwei Löcherreihen anbläst.

Man hört nur einen Ton, wenn man eine Löcherreihe anbläst; sobald man die zweite, wie das bei der mit einem Duraccord versehenen Doveschen Sirene sehr leicht geht, öffnet, hört man außer dem zweiten Tone noch eine Reihe von Kombinationstönen.

Ebenso erhält man die Kombinationstöne mit der Physiharmonika oder zwei auf derselben Windlade stehenden Zungenpfeifen sehr deutlich; auch mit der Geige sind sie sehr gut zu erhalten.

Außer den bisher besprochenen hat Helmholtz¹⁾ noch eine zweite Klasse von Kombinationstönen entdeckt, welche er Summationstöne nennt, und deren Tonhöhe dadurch gegeben ist, daß die Schwingungszahl stets gleich ist der Summe der Schwingungen der sie bildenden Töne. Grundton und Quint liefern so die Terz der folgenden Oktave $2 + 3 = 5$, Grundton und große Terz $4 + 5 = 9$ die Sekunde der höhern Oktave, Grundton und Sexte die Quarte der höhern Oktave. Die Bedingung, daß man die Summationstöne kräftig hört, ist dieselbe, welche die erste Art, die Helmholtz Differenzstöne nennt, kräftig hören läßt, beide Töne müssen dieselbe Luftmasse in Bewegung setzen; man hört sie deshalb mit der mehrstimmigen Sirene oder mit Orgelpfeifen am besten, immer aber sind die Summationstöne schwächer als die Differenzstöne. Nichtsdestoweniger ist ihre Wahr-

¹⁾ Helmholtz, Poggend. Ann. Bd. XXX.

nung nicht schwer, da sie zu den sie bildenden Tönen und den Differenzen im allgemeinen in einem unharmonischen Verhältnisse stehen.

Die Kombinationstöne sah man früher als rein subjektive Töne an, die aus den Schwebungen, wenn sie hinreichende Schnelligkeit haben, im Ohre sich bilden, man glaubte, wenn die Stöße mit hinreichender Schnelligkeit erfolgen, daß sie dann im Ohre als Ton empfunden werden. Helmholtz hat jedoch darauf aufmerksam gemacht, daß diese Theorie der Kombinationstöne unrichtig sei. Zunächst nämlich existieren die Kombinationstöne zum Teil objektiv außer dem Ohr, denn man kann dieselben bei einer Sirene oder den Orgelpfeifen durch für sie abgestimmte Resonatoren verstärken. Wie wir aber früher hervorgehoben haben, wird die Luft eines Resonators nur in Schwingungen versetzt, wenn dem Eigentone des Resonators entsprechende einfache Schwingungen in denselben eindringen. Ebenso kann man mit einer Quinckeschen Interferenzröhre den Nachweis liefern, daß die Kombinationstöne von Orgelpfeifen oder einer Physharmonika objektiv existenz haben¹⁾. Stimmt man eine solche Röhre auf einen der beiden Töne ab, so tritt der Kombinationston auch dann deutlich auf, obwohl der eine der beiden Töne gar nicht zum Ohre dringen kann. In andern Fällen bildet sich der Kombinationston allerdings erst im Ohr, z. B. wenn man zwei Stimmgabeln als Tonquellen benutzt, indes auch in dem Falle kann man sie nicht als aus der Empfindung der Schwebungen hervorgehend betrachten, sondern sie bilden sich am Trommelfell, welches den Kombinationstönen entsprechend schwingt²⁾. Denn zunächst würde eine andere Entstehungsweise die Summationstöne unmöglich machen, da dieselben keine Schwebungen entsprechen, dann aber auch widerspricht diese Annahme der feststehenden Erfahrung, daß das Ohr jedes Tongemisch in seine einfachen Töne zerlegt. Würden deshalb außerhalb des Ohres die Schwingungen nur nach der Periode der komponierenden Töne erfolgen, so würde das Ohr niemals aus ihnen einen neuen Ton bilden.

Helmholtz³⁾ hat deshalb eine neue Theorie der Kombinationstöne gegeben, indem er annimmt, daß bei dem Zusammenwirken der Schallwellen das einfache Interferenzgesetz keine Gültigkeit mehr hat. Das einfache Interferenzgesetz sprachen wir dahin aus (§ 128), daß bei dem Zusammenwirken mehrerer Schwingungen die resultierende Bewegung einfach gleich der Summe der Teilbewegungen sei. Diesem Gesetze liegt aber die Voraussetzung zu Grunde, daß auch für die resultierende Bewegung der Satz seine Gültigkeit bewahre, daß in jedem Momente die Kraft, mit welcher das schwingende Teilchen gegen die Gleichgewichtslage zurückgetrieben wird, dem Abstände des Teilchens von der Gleichgewichtslage proportional ist, also die Gleichung auch hier besteht

$$\varphi = -ky,$$

¹⁾ Quincke, Poggend. Ann. Bd. CXXVIII. p. 186.

²⁾ König versucht in seiner schon im vorigen Paragraphen erwähnten Arbeit diese Kombinationstöne den Nachweis zu liefern, daß sie aus den Stößen entstehen, und nennt sie deshalb Stoßstöne, er übersieht aber bei seiner ganzen Aktion, daß diese erst im Ohr sich bildenden Töne durch die Schwingungen des Trommelfells in der sofort abzuleitenden Weise durch die Obertöne der angabeltöne entstehen.

³⁾ Helmholtz, Poggend. Ann. Bd. XCIX. p. 532.

wenn y den Abstand des Teilchens von der Gleichgewichtslage bedeutet. Dieser Satz gilt aber nur unter der Voraussetzung sehr kleiner Amplitude. Werden die Amplituden der Schwingungen groß, so dürfen wir diese Voraussetzung nicht mehr machen, dann hängt der Wert von φ nicht nur von der ersten, sondern auch von höhern Potenzen von y ab. Helmholtz nimmt nun an, daß bei dem Zusammenwirken zweier Töne die Amplituden der Schwingungen, sei es der Luft, sei es nur des Trommelfells, eine solche GröÙe erhalten, daß auch die Quadrate der Verschiebungen einen merklichen Einfluß auf die bewegenden Kräfte erhalten, und weist nach, daß dann neue Systeme einfacher Schwingungen entstehen müssen, deren Schwingungsdauer derjenigen der Kombinationstöne, und zwar sowohl der Differenztöne als der Summationstöne entspricht.

Bezeichnen wir die Masse eines beweglichen Punktes mit m , so wird die Kraft, wenn er sich im Abstände y von der Gleichgewichtslage befindet, die ihn gegen dieselbe zurückzieht, durch

$$-m\varphi = ay + by^2$$

dargestellt; wirken gleichzeitig zwei schwingende Bewegungen auf den Punkt ein, welche durch die Gleichungen gegeben sind

$$y = a \cdot \sin 2\pi \frac{t}{T} = a \cdot \sin(pt)$$

$$y' = \beta \cdot \sin 2\pi \left(\frac{t}{T_1} + \tau \right) = \beta \cdot \sin(qt + c),$$

so sind die Kräfte, welche infolge dessen auf den betrachteten Punkt zur Zeit t wirken, nach § 126

$$-mp^2 a \sin(pt) - mq^2 \beta \sin(qt + c);$$

wir erhalten demnach für die den Punkt zur Zeit t gegen die Gleichgewichtslage treibende Kraft, wenn wir seinen Abstand von der Gleichgewichtslage zur Zeit t mit y bezeichnen,

$$-m \frac{d^2 y}{dt^2} = ay + by^2 + f \cdot \sin(pt) + g \cdot \sin(qt + c),$$

wenn wir wie früher für $\varphi = \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{de}{dt}$ einsetzen und die Koeffizienten der beiden letzten Glieder mit f und g bezeichnen.

Die Integralrechnung leitet hieraus folgende Beziehung zwischen y und t ab.

$$y = A \cdot \sin \left(t \cdot \sqrt{\frac{a}{m}} + h \right) + u \cdot \sin(pt) + v \cdot \sin(qt + c) + w \cdot \cos(2pt) + i \cdot \cos 2(qt + c) + k \cdot \cos[(p - q)t - c] + l \cdot \cos[(p + q)t + c],$$

und jedes dieser Glieder gibt für sich eine eigene schwingende Bewegung, deren Amplituden A, u, v, w, i, k, l in bestimmter Weise von den Größen a, b, f, g, p, q abhängig sind. Das erste Glied gibt diejenige Bewegung, welche der Punkt annimmt, wenn er einmal aus der Gleichgewichtslage gebracht sich selbst überlassen wird; seine Schwingungsdauer ist gegeben (§ 126) durch

$$\sqrt{\frac{a}{m}} = \frac{2\pi}{T}; \quad \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{a}{m}},$$

das zweite und dritte Glied die ursprüngliche Bewegung, das vierte und fünfte Bewegungen von doppelter Schnelligkeit, also die Oktaven der ursprünglichen Töne, das sechste den Differenzton und das siebente den Summationston. Denn die Schwingungszahl des vorletzten Gliedes ist, da

$$p - q = 2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1} \right) = 2\pi(N - N_1),$$

gleich der Differenz der Schwingungen der ursprünglichen Töne. Ebenso ist die Schwingungszahl des letzten Gliedes gleich $N + N_1$.

Außer den hingschriebenen Gliedern liefert die ursprüngliche Gleichung noch weitere, deren Schwingungszahlen höheren harmonischen Tönen und dem zweiten, dritten etc. Kombinationstone entsprechen. Es genüge indes, soweit die Resultate der Helmholtzschen Rechnung angedeutet zu haben, deren Entwicklung die uns hier gestatteten mathematischen Hilfsmittel weit überschreiten würde.

Die Theorie von Helmholtz erklärt auch unmittelbar, weshalb die Kombinationstöne bei der Sirene so stark werden, da dort, wenn die Luft gleichzeitig durch zwei Löcherreihen entweicht, die Schwingungsamplitude wegen des Herausstürzens einer großen Luftmasse ins Freie eine sehr große werden muß. Werden die Töne anders, etwa durch Stimmgabeln erzeugt, so bilden sich diese Schwingungen erst am Trommelfell, in welchem sich dann Schwingungen finden, welche der Periode der Kombinationstöne entsprechen.

§ 179.

Ursachen der Konsonanz und Dissonanz. Im § 155 haben wir aus der Erfahrung abgeleitete Gesetz mitgeteilt, daß in der Musik die Intervalle, welche durch die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 gegeben sind, konstant sein, daß zwei von diesen Tönen gleichzeitig angegeben auf das Ohr einen wohlthuenden Eindruck machen, während andere Töne, wie 8, 9 oder 15, 16 oder 1 und $\frac{1}{8}$ u. s. f. zusammen angegeben dissonant sind. Aber den Grund der Konsonanz gerade jener Intervalle und der Dissonanz der übrigen konnten wir damals keine andere Angabe machen. Erst die Theorie von Helmholtz über die musikalischen Klänge in Verbindung mit den in den beiden letzten Paragraphen gemachten Erfahrungen über die Schwebungen und Kombinationstöne macht es möglich zu erkennen, weshalb jene einfachen Intervalle Konsonanzen liefern, während die übrigen Intervalle dissonant sind¹⁾.

Die Grundlage der Helmholtzschen Theorie der Konsonanz und Dissonanz ist der Satz, daß eine Klangmasse nur dann auf unser Ohr einen angenehmen Eindruck machen kann, wenn sie gleichmäßig abfließt, wenn die Töne neben einander bestehen ohne sich zu stören; daß dagegen eine Klangmasse einen unangenehmen Eindruck auf das Ohr macht, daß sie dissonant ist, wenn dieselbe aus einzelnen Stößen besteht, wenn es ein durch Schwebungen intermittierender Klang ist. Die Schwebungen können dabei so rasch erfolgen, daß wir uns der einzelnen nicht deutlich bewußt werden, daß wir sie nicht zählen können. Helmholtz vergleicht, um diesen Satz zu begründen, sehr treffend die Tonempfindungen mit den Licht-

¹⁾ Helmholtz, Tonempfindungen p. 273 ff. erste Ausgabe 1863.

empfindungen, die ganz ähnliches bieten. Keine Beleuchtung macht auf das Auge einen unangenehmen Eindruck als eine flackernde, bei welcher in rascher Folge der Lichtreiz stärker und schwächer wird. Ein knarrender, intermittierender Ton ist nun für die Gehörnerven ganz dasselbe, was ein flackerndes Licht für die Gesichtsnerven ist; es wird dadurch eine viel intensivere und unangenehmere Reizung des Organes bewirkt wie durch einen gleichmäßigen dauernden Ton.

Früher glaubte man, daß man die Schwebungen als solche nur vernehme, wenn sie langsam erfolgen, daß sie aber bei rascher Folge sich zu dem ersten Differenzton zusammensetzen; die Unrichtigkeit dieser Ansicht haben wir vorhin nachgewiesen; Helmholtz gibt aber außerdem eine Beobachtungsmethode an, durch die man sich überzeugen kann, daß man die Schwebungen noch deutlich wahrnimmt, wenn sie die Zahl 30 übersteigen. Man braucht nur mit zwei auf a' abgestimmten Gabeln oder gedeckten Orgelpfeifen durch Verstimmung der einen Schwebungen hervorzubringen, und die Verstimmung ganz allmählich zu verstärken. Anfänglich, wenn in der Sekunde nur 4–6 Schwebungen entstehen, kann man sie einzeln auffassen und zählen, wird die Verstimmung größer und größer, etwa bis zu einem Halbton, wo die Zahl der Schwebungen etwa 30 beträgt, so gelingt das nicht mehr. Aber wenn man so eine allmähliche Steigerung der Zahl der Stöße hervorbringt, so erkennt man deutlich, daß der sinnliche Eindruck derjenige einzelner Stöße ist, und erkennt weiter auch, daß eben dieser intermittierende Eindruck es ist, welcher das Unangenehme der Dissonanz bewirkt.

Wenn man die Zahl der Stöße durch Erweiterung des Intervalls vergrößert, durch Übergang zu einem ganzen Ton auf 60 oder zu einer kleinen Terz $a_1 c_2$ auf 88 bringt, so wird der Eindruck des intermittierenden Klanges immer schwächer, und bei der kleinen Terz ist kaum eine Spur desselben mehr wahrzunehmen, sie macht schon den Eindruck eines gleichmäßig abfließenden Tones. Man könnte deshalb glauben, daß wie bei dem Auge ein sich rasch wiederholendes Aufblitzen eines Lichtes den Eindruck kontinuierlicher Beleuchtung macht, so auch bei dem Ohre ein etwa 90mal in der Sekunde wiederkehrender Tonstoß den Eindruck eines kontinuierlichen Tones mache. Daß indes dem nicht so ist, davon kann man sich leicht überzeugen, indem man die Zahl der Stöße anstatt durch Erweiterung des Intervalls durch Verlegung des engeren Intervalls in höhere Gegenden der Skala vergrößert. Der Halbton $h c_1$ gibt 33 Schwebungen, die deutlich als intermittierende Stöße erkannt werden, gibt man unmittelbar nachher $h_1 c_2$ mit 66, $h_2 c_3$ mit 132 Stößen an, so erkennt man, daß der sinnliche Eindruck wesentlich derselbe ist. Die Wahrnehmbarkeit der Schwebungen hängt also nicht allein von ihrer Anzahl ab, sondern auch davon, daß die sie erzeugenden Intervalle hinreichend nahe liegen. Den Grund für den letztern Umstand sieht Helmholtz darin, daß Schwebungen im Ohre nur dann bestehen können, wenn die Töne der Skala nahe genug liegen, um dieselben Nervenanhängsel, dieselben Cortischen Fasern in Mitschwingungen zu versetzen. Wenn sich die beiden angegebenen Töne zu weit von einander entfernen, werden die Schwingungen der von beiden gemeinsam erregten Fasern zu schwach, als daß man deren Schwebungen noch wahrnehmen könnte.

Die Wahrnehmbarkeit der Stüfse hängt also von der Zahl derselben und der Weite des Intervalls ab; ist das Intervall enge, so nimmt man eine große Zahl wahr, ist es weiter, so kommt nur eine weit geringere Zahl zur Empfindung, und bei weiten Intervallen wie Quart oder Quint kommen sie gar nicht mehr zur Wahrnehmung.

Aus diesen Sätzen von Helmholtz ergibt sich zunächst, daß alle engen Intervalle, große und kleine Sekunden innerhalb des in der Musik gebrachten Tonsystems dissonierend sein müssen, sie erklären, weshalb die Dissonanzen in den mittlern Tonlagen am schärfsten sind, und weshalb in den tiefern Tonlagen, in der großen und tiefern Hälfte der kleinen Oktave die kleinen Terzen schon merklich rauh klingen, da sie in diesen zwischen 15 und 30 Schwebungen geben.

Aus der Helmholtzschen Theorie des Klanges ergibt sich dann aber ebenso, weshalb die große und kleine Septime und die verstimmt konsonierenden Intervalle der musikalischen Klänge dissonant sind. Wie wir nämlich sahen, sind die Klänge nicht einfache Töne, sondern Accorde, die aus dem Grundton und seinen harmonischen Obertönen aufgebaut sind. Gerade so nun wie die einfachen Töne Schwebungen hervorbringen, so thun es auch die Obertöne der Klänge mit einander und den Grundtönen und außerdem können auch die Kombinationstöne Schwebungen veranlassen. Wenn deshalb zwei Klänge, welche, wie fast alle in der Musik gebrachten Klänge, deutliche Obertöne haben, unter diesen solche besitzen, welche hinreichend nahe zusammenliegen, so werden diese Schwebungen liefern und deshalb die beiden Klänge ein dissonantes Intervall bilden.

Man erkennt darnach sofort, daß die kleine oder große Septime eine Dissonanz sein muß, da der erste Oberton des Grundtones mit den Septimen das Intervall eines Halbtones oder eines ganzen Tones bildet. Die große Septime ist $1 : \frac{1}{9}$, der erste Oberton des Grundtones ist 2 oder $\frac{1}{9}$, man sieht, das Verhältnis dieses zur Septime ist $\frac{1}{2}$, ein Halbton. Dasselbe gilt für die große und kleine None.

Dem entgegen erkennt man sofort, daß die Oktave eine vollkommene Konsonanz sein muß, da die Obertöne der Oktave auch alle Obertöne des Grundtones sind, und deshalb keine andern Schwebungen auftreten können wie in dem Klange des Grundtones selbst, Schwebungen, die erst sehr hohen Obertönen entsprechen, welche deshalb so schwach sind, daß sie nicht mehr gehört werden.

Die auf die Oktave folgende ebenfalls noch als vollkommen zu bezeichnende Konsonanz ist die Quint, deren Schwingungsverhältnis 2 : 3 ist. Die in diesen beiden Klängen enthaltenen Obertöne sind

Grundton	2,	4,	6,	8,	10,	12
Quinte		3	6		9	12.

Man sieht, der erste Oberton der Quint fällt mit dem zweiten der Oktave zusammen und der dritte Oberton der Quint steht zu dem vierten und fünften Oberton der Oktave im Verhältnis eines ganzen Tones.

Eben weil es die tiefsten Obertöne sind, welche in diesen Intervallen zusammenfallen, in der Oktave der Grundton des zweiten Klanges mit dem ersten Oberton des ersten, in der Quint der erste Oberton des zweiten mit dem zweiten Obertone des ersten, in der Duodecime 1 : 3 der Grundton des

52





00 12 6 1232

